

Tom Lindstrøm og Klara Hveberg

Tilleggs kapitler til

Kalkulus

3. utgave

Universitetsforlaget, Oslo

© 3. utgave Universitetsforlaget AS 2006

1. utgave 1995

2. utgave 1996

ISBN-13: 978-82-15-00977-3

ISBN-10: 82-15-00977-8

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning, og kan straffes med bøter eller fengsel.

Boken har egen nettside: www.universitetsforlaget.no/kalkulus

Henvendelser om denne utgivelsen kan rettes til:

Universitetsforlaget AS

Postboks 508 Sentrum

0105 Oslo

www.universitetsforlaget.no

Sats, figurer og formgivning: Arve Michaelsen/Matematisk Sats

Boken er satt med: MathTimes og Times Roman 10/12

Forord

Dette kapitlet består av to lange seksjoner. Den første omhandler vektorregning i \mathbb{R}^n samt litt elementær matriseregning, det andre omhandler den grunnleggende teorien for funksjoner av flere variable inkludert partiellderivasjon og kjerneregul, men ikke optimering og multipl integrasjon. Denne seksjonen forutsetter at studentene har en solid forståelse av kontinuitet og deriverbarhet av funksjoner av én variabel tilsvarende de første sju kapitlene i *Kalkulus*.

En mindre del av stoffet i dette kapitlet finnes også i tilleggskapittel T1, men behandling her er knappere og mer generell (fremstillingen i T1 konsentrerer seg hovedsaklig om vektoregning i \mathbb{R}^2 og \mathbb{R}^3). Det er mulig å lese T1 først og så T2, men overlapp mellom kapitlene er så pass stort at de fleste nok vil være mer fornøyd med å velge ett av kapitlene. Ønsker man en snill og forsiktig videreføring av vektorregningen i videregående skole, er kapittel T1 best egnet, men ønsker man en raskere og mer ambisiøs innføring, er dette kapitlet det beste valget (og i tillegg får man altså en innføring i funksjoner av flere variable). Kapitlene har til forskjellige tider vært brukt i første semester ved Universitetet i Oslo og fungerer godt for studentgruppen der.

Litt om notasjon og organisering: Kapitlet er delt inn i to nummererte seksjoner som igjen er delt opp i unummererte avsnitt. Definisjoner, setninger og teoremer er nummerert fortløpende innen hver seksjon. Eksempler og figurer er også nummerert seksjonsvis, men med egen nummerering. Vi bruker ■ for å markere slutten på et bevis og ■ for å markere slutten på et eksempel.

Blindern, 26. oktober 2006,
Tom Lindstrøm og Klara Hveberg

Innhold

Forord	3
2 Flervariabel analyse med lineær algebra	7
2.1 Vektorer og matriser 7	
Regning med n -tupler 8	
Oppgaver 11	
Geometri for n -tupler 12	
Oppgaver 19	
Komplekse n -tupler 21	
Oppgaver 24	
Matriser 25	
Oppgaver 31	
Multiplikasjon av matriser 33	
Oppgaver 40	
Identitetsmatriser og inverse matriser 41	
Oppgaver 45	
2.2 Funksjoner fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m 46	
Litt topologi i \mathbb{R}^n 48	
Følger i \mathbb{R}^n 50	
Oppgaver 55	
Kontinuerlige funksjoner 56	
Oppgaver 60	
Grenseverdier 61	
Oppgaver 64	
Derivasjon av skalarfelt 64	
Oppgaver 75	
Partiellderiverte av høyere orden 76	
Oppgaver 79	
Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner 79	
Oppgaver 84	

Kjerneregelen	84
Oppgaver	92
Lineærabildninger	94
Eigenverdier	98
Oppgaver	100
Affinabildninger	102
Linearisering	103
Oppgaver	106
Fasit	109

Flervariabel analyse med lineær algebra

Dette kapitlet består av to lange seksjoner. I den første seksjonen skal vi videreføre og generalisere vektorregningen fra videregående skole. Vi skal se hvordan vi kan regne med vektorer i høyere dimensjoner enn 3 — det er ikke så skummelt som det kanskje høres ut til — og vi skal se hvordan matriser kan brukes til å transformere vektorer. I den andre seksjonen skal vi studere funksjoner av flere variable, altså funksjoner $f(x, y, z, \dots)$ som avhenger av mer enn én størrelse x . Vektorer og matriser er nyttige redskap når vi skal regne med slike funksjoner.

T2.1 Vektorer og matriser

Tall spiller en sentral rolle i matematikken — så sentral at mange nok vil si at der det er tall, er det matematikk, og der det ikke er tall, er det ikke matematikk! Fullt så enkelt er det ikke — det finnes mange grener av matematikken der tall spiller en underordnet rolle — men det er likevel ikke til å komme forbi at tall er et av fagets aller viktigste bestanddeler.

I din tidligere matematikkutdanning har du lært å regne med mange slags tall: hele tall, desimaltall, brøker, irrasjonale tall og til og med komplekse tall. I dette kapitlet skal vi gå et skritt videre og regne med tupler av tall, dvs. flere tall på en gang. Du har vært borti dette tidligere når du har regnet med vektorer i planet og i rommet — en vektor $[x, y]$ i planet er et 2-tupel, mens en vektor $[x, y, z]$ i rommet er et 3-tupel. Vi skal nå gå videre og regne med n -tupler for alle naturlige tall n . Hvis du

tenker geometrisk, kan dette høres skummelt ut — hvordan skal man kunne forestille seg en 4-dimensjonal vektor $[x, y, z, u]$? Tenker du mer algebraisk, er det ikke noe skummelt i det hele tatt; et 4-tupple $[x, y, z, u]$ er bare en notasjon for å holde styr på fire tall på en praktisk og kortfattet måte. I dette kapitlet skal vi utvikle både algebra og geometri, for selv om det å regne algebraisk med tupler er trygt og ukomplisert, mister man fort oversikten, og den gjenvinner man først når man lærer å tenke på tupler som geometriske objekter.

Regning med n -tupler

La oss begynne med den grunnleggende definisjonen. Et n -tupple er et uttrykk (a_1, a_2, \dots, a_n) der a_1, a_2, \dots, a_n er reelle tall. Vi ser at $(2, -1, 7, 3)$ er et 4-tupple, mens $(0, 1, \pi, \frac{3}{2}, -7, 3)$ er et 6-tupple. To n -tupler (a_1, a_2, \dots, a_n) og (b_1, b_2, \dots, b_n) regnes som like dersom de inneholder de samme tallene i samme rekkefølge, dvs. hvis $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Legg merke til at $(3, 2, 4) \neq (2, 3, 4)$; selv om tallene er de samme, er rekkefølgen forskjellig.

I dette kapitlet skal vi bruke bokstaver i **fete typer** som navn på n -tupler, f.eks. $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$. Det er vanskelig å bruke fete typer når man skriver for hånd, og man kan da isteden skrive en pil eller en strek over bokstavene; dvs. $\vec{a} = (-2, 3, 0, -17)$ eller $\bar{a} = (-2, 3, 0, -17)$.

Vi skriver $\mathbf{0}$ for det n -tupplet som har alle komponenter lik 0, altså $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Hvis vi har et n -tupple $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, skriver vi $-\mathbf{a}$ for n -tupplet $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$.

Det er en naturlig måte å definere addisjon og subtraksjon av n -tupler på. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, så er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

Vi sier at vi adderer og subtraherer *komponentvis*. Legg merke til at vi bare kan addere og subtrahere tupler med like mange komponenter — oppskriften ovenfor gir oss ikke noen måte å addere et 3-tupple og et 7-tupple på. Før vi ser på et eksempel, tar vi med en regneoperasjon til. Dersom s er et tall og $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ er et n -tupple, definerer vi produktet av s og \mathbf{a} til å være

$$s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, \dots, sa_n)$$

Vi ganger altså s inn i hver komponent i \mathbf{a} .

T2.1.1 Eksempel Vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$. Da er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2 + 4, 3 + (-1), 0 + 3, -17 + 17) = (2, 2, 3, 0)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-2 - 4, 3 - (-1), 0 - 3, -17 - 17) = (-6, 4, -3, -34)$$

Hvis $s = 3$, får vi

$$s\mathbf{a} = (3 \cdot (-2), 3 \cdot 3, 3 \cdot 0, 3 \cdot (-17)) = (-6, 9, 0, -51)$$



Vi skal innføre en regneoperasjon til. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ er to n -tupler, definerer vi *skalarproduktet* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ved

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Legg merke til at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ikke er et n -tupel, men et tall (eller en *skalar* som man ofte sier når man vil understreke at noe er et tall og ikke et n -tupel). Hvis vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$ som ovenfor, ser vi at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-17) \cdot 17 = -8 - 3 + 0 - 289 = -300$$

Vi har nå sett hvordan vi kan regne med n -tupler, og det er kanskje på tide å ta en kikk på noen eksempler som antyder hvorfor det er et poeng med slike regnestykker. Det første eksemplet viser at n -tupler er naturlige redskap når vi skal holde styr på mer informasjon enn det som kan rommes i et enkelt tall, og at regneoperasjonene svarer til regnestykker det ofte er naturlig å utføre i slike sammenhenger.

T2.1.2 Eksempel En forretning har ansatt 7 studenter på timebasis. For å holde styr på hvor mange timer hver student har arbeidet så langt, kan vi bruke et 7-tupel $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_7)$ der t_1 er antall timer den første studenten har arbeidet, t_2 er antall timer den andre studenten har arbeidet osv. Dersom studentene arbeider mer senere, kan vi på samme måte kode tilleggstimene som et 7-tupel $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_7)$. Det totale antall timer som studentene har arbeidet, er nå gitt ved $\mathbf{t} + \mathbf{s}$.

Studentene har ulik erfaring og derfor ulik lønn. Hvis student nummer én har en timelønn på p_1 kroner, student nummer to har en timelønn på p_2 kroner osv., kan vi også representere lønnen som et 7-tupel $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_7)$. Dersom studentene har arbeidet $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_7)$ timer, er den totale lønnen som forretningen skylder, gitt av skalarproduktet $\mathbf{p} \cdot \mathbf{t} = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_7 t_7$. Dersom alle studentene får et lønns tillegg på 7 prosent, får vi det nye lønnstuppelet ved å gange det gamle med skalaren 1.07, altså $1.07\mathbf{p}$. ■

Vi tar med noen eksempler til som viser hvordan n -tupler brukes til å holde styr på tallmessig informasjon i forskjellige sammenhenger.

T2.1.3 Eksempel Tilstanden til en gassbeholder er bestemt av trykket p , temperaturen T og volumet V . Hvis du får i oppdrag å måle tilstanden til beholderen ved forskjellige tidspunkt, kan det være naturlig å bruke 4-tupler $\mathbf{a} = (t, p, T, V)$ der t er tidspunktet for målingen. Forskjellen mellom to målinger \mathbf{a} og \mathbf{b} er da gitt ved differensen $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. ■

T2.1.4 Eksempel Et bilde på en fjernsynsskjerm eller en dataskjerm er bygget opp av små lysende punkter (piksler). Et vanlig format er $1280 \times 1024 = 1\,310\,720$ piksler. I hvert punkt må vi angi styrken til hver av de tre grunnfargene rødt, grønt og blått, så totalt har vi $3 \times 1\,310\,720 = 3\,932\,160$ tall å holde styr på. En naturlig måte å gjøre dette på, er å oppfatte bilder som 3 932 160-tupler! ■

Her er noen enkle regneregler for n -tupler (det finnes flere):

T2.1.5 Regneregler for n -tupler Dersom \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} er n -tupler og s og t er reelle tall, gjelder følgende regneregler:

- (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- (c) $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$
- (d) $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
- (e) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ og $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- (f) $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- (g) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Bevis: Alle disse reglene bevises lett ved å regne ut venstre- og høyresiden og kontrollere at svarene stemmer overens. Vi tar (c) og (g) som eksempler:

(c) Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, ser vi at venstresiden kan skrives

$$\begin{aligned} s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), \dots, s(a_n + b_n)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, \dots, sa_n + sb_n) \end{aligned}$$

Tilsvarende kan høyresiden skrives

$$\begin{aligned} s\mathbf{a} + s\mathbf{b} &= (sa_1, sa_2, \dots, sa_n) + (sb_1, sb_2, \dots, sb_n) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, \dots, sa_n + sb_n) \end{aligned}$$

Siden de to uttrykkene er like, er (c) bevist.

(g) Vi ser at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$$

siden kvadrater aldri er negative. Likhet har vi dersom $a_1^2 = 0, a_2^2 = 0, \dots, a_n^2 = 0$, dvs. dersom $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$. ■

Vi har hittil skrevet våre n -tupler liggende

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

men vi kan også skrive dem stående

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

I det første tilfellet kaller vi \mathbf{a} en *radvektor*, mens vi i det andre kaller \mathbf{a} en *søylevektor*. I de fleste situasjoner spiller det ingen rolle om vi skriver n -tuplene på den ene eller andre formen, og vi velger da ofte å skrive dem som radvektorer siden det tar minst

plass. Det finnes imidlertid tilfeller der det er viktig å skille mellom radvektorer og søylevektorer, men det skal vi komme tilbake til senere — foreløpig kan du skrive dine vektorer på den måten du måtte ønske. Legg for øvrig merke til at det ofte kan være lettere å få øye på strukturen i et regnestykke når du bruker søylevektorer, f.eks. kan

$$s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 + tb_1 + rc_1 \\ sa_2 + tb_2 + rc_2 \\ \vdots \\ sa_n + tb_n + rc_n \end{pmatrix}$$

virke mer oversiktlig enn

$$\begin{aligned} s(a_1, a_2, \dots, a_n) + t(b_1, b_2, \dots, b_n) + r(c_1, c_2, \dots, c_n) \\ = (sa_1 + tb_1 + rc_1, sa_2 + tb_2 + rc_2, \dots, sa_n + tb_n + rc_n) \end{aligned}$$

La oss avslutte denne seksjonen med noen flere ord om notasjon. Mengden av alle n -tupler kaller vi \mathbf{R}^n . Når vi skriver $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, betyr dette derfor ikke noe annet enn at \mathbf{a} er et n -tupel. Hittil har vi holdt oss til reelle n -tupler, men vi kan selvfølgelig også tenke oss n -tupler (c_1, c_2, \dots, c_n) der komponentene c_1, c_2, \dots, c_n er *komplekse* tall. Mengden av alle slike n -tupler kaller vi \mathbf{C}^n . Vi skal se nærmere på komplekse n -tupler litt senere. Notasjonen kan også gjøres enda mer generell: Dersom A er en hvilken som helst mengde, betegner A^n mengden av alle n -tupler (a_1, a_2, \dots, a_n) der $a_i \in A$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$.

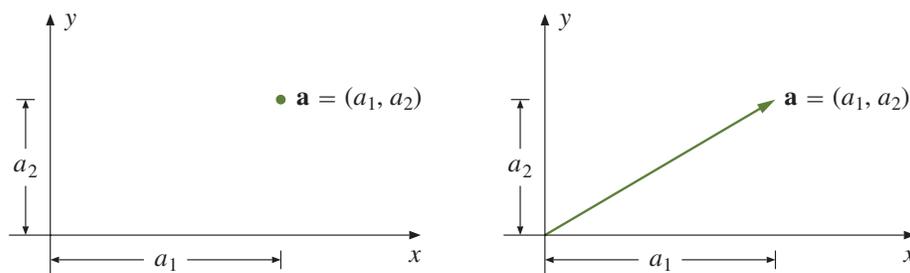
Helt til slutt legger vi merke til at et 1-tupel (a_1) ikke er noe annet enn et tall inni en parentes. Parentesen spiller ingen rolle (den er bare med for å avgrense uttrykket), og vi skal derfor regne 1-tupellet (a_1) og tallet a_1 som det samme objektet. Dette betyr at \mathbb{R}^1 og \mathbb{R} er den samme mengden.

Oppgaver

1. Finn $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (1, -2, 4, -5, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 5, 5, 0, -3)$ og $s = 3$.
2. Finn $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (7, 0, 4, -2, -5, 4)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1, -6, 0, -1)$ og $s = -4$.
3. Vis at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er:
 - a) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$
 - b) $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$
 - c) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$
4. Bevis punktene d), e), f) i setning T2.1.5.
5. Et grossistfirma har n vareslag på lager, m_1 enheter av vareslag 1, m_2 enheter av vareslag 2 osv. Verdien av hver enhet er p_1 for vareslag 1, p_2 for vareslag 2 osv. Uttrykk den totale verdien av varelageret som skalarproduktet mellom to n -tupler.

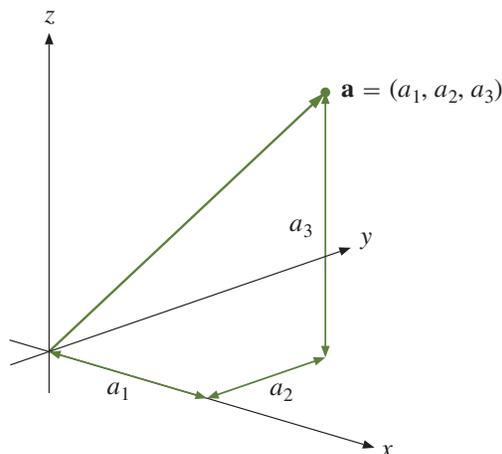
Geometri for n -tupler

Et 2-tupel er ikke noe annet enn et par (a_1, a_2) . Geometrisk kan vi tenke på et slikt par på to måter — enten som et *punkt* med koordinater a_1 og a_2 , eller som en *vektor* (pil) som starter i origo og ender i dette punktet (se figur T2.1.1). I skolematematikken bruker man gjerne forskjellig notasjon ettersom man tenker på paret som et punkt eller som en vektor — et punkt (a_1, a_2) har runde parenteser, mens en vektor $[a_1, a_2]$ har klammeparenteser. Det er ganske tungvint å bruke to forskjellige notasjoner, og vi vil derfor bruke runde parenteser $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ uansett om vi tenker på \mathbf{a} som et punkt eller som en vektor. Hva som er naturlig, fremgår som regel av sammenhengen. Snakker vi om en linje gjennom \mathbf{a} , er det naturlig å tenke på \mathbf{a} som et punkt, men snakker vi om en linje parallell med \mathbf{a} , er det naturlig å tenke på \mathbf{a} som en vektor. Når vi lager figurer, vil vi noen ganger tegne paret (a_1, a_2) som en vektor og andre ganger som et punkt, alt etter hva vi synes passer best i hvert enkelt tilfelle (se figur T2.1.1).



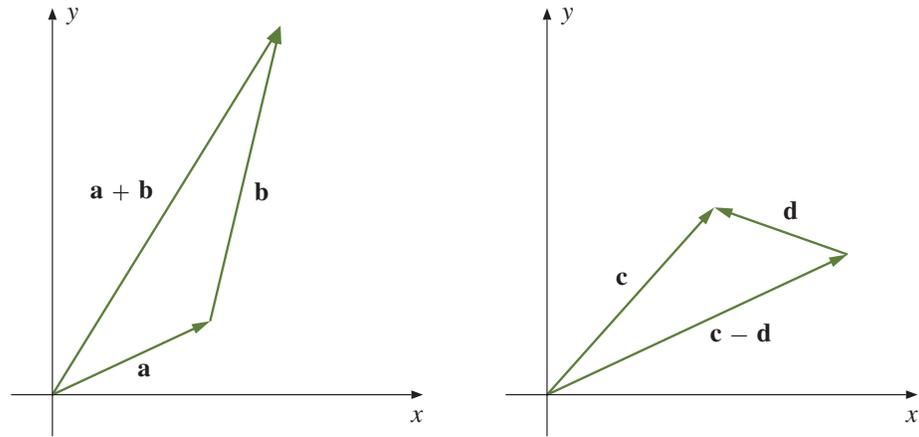
Figur T2.1.1 \mathbf{a} som et punkt og som en vektor

På tilsvarende vis kan vi oppfatte 3-tupler som punkter og vektorer i rommet. Figuren nedenfor viser hvordan et 3-tupel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ kan oppfattes som en vektor i rommet.



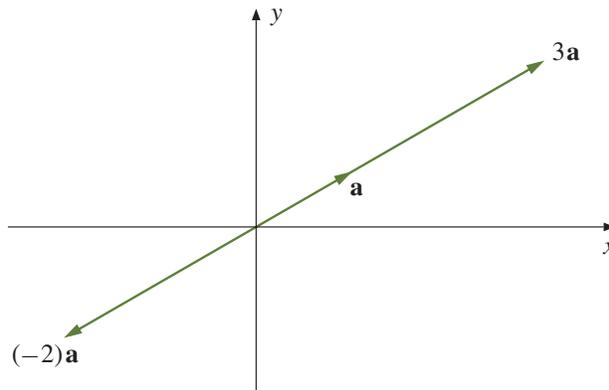
Figur T2.1.2 Et 3-tupel som en vektor i rommet

Som du vet fra skolematematikken, har de algebraiske operasjonene vi innførte i forrige seksjon, en geometrisk tolkning når vi tenker på tupler som vektorer i planet eller rommet. Figur T2.1.3 viser hvordan vi får frem addisjon og subtraksjon ved å sette sammen vektorer:



Figur T2.1.3 Addisjon og subtraksjon av vektorer

Multiplikasjon med en skalar har også en geometrisk tolkning. Dersom vi ganger \mathbf{a} med et *positivt* tall s , beholder vektoren retningen, men blir s ganger så lang. Dersom vi ganger \mathbf{a} med et *negativt* tall s , snur retningen 180° , og den nye vektoren blir $|s|$ ganger så lang som den opprinnelige (se figur T2.1.4).



Figur T2.1.4 Multiplikasjon med et tall

Det er også andre sammenhenger mellom regneoperasjoner og geometri. Fra skolematematikken vet du for eksempel at to (ikke-null) vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} er parallelle dersom det finnes et tall s slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b}$, og at de er ortogonale (dvs. står normalt på hverandre) dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Du vet også at lengden $|\mathbf{a}|$ til vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ kan regnes ut fra koordinatene:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

og at det er en sammenheng mellom lengden og skalarproduktet:

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

Det er sammenhengen mellom geometri og algebra som gir liv til vektorregning i to og tre dimensjoner, og det hadde vært nyttig om vi kunne bruke vår geometriske intuisjon på samme måte når vi arbeidet med generelle n -tupler. Dette kan virke som en uoverkommelig oppgave — hvis 2-tupler representerer 2-dimensjonale objekter i planet, og 3-tupler representerer 3-dimensjonale objekter i rommet, så burde 4-tupler representere 4-dimensjonale objekter i et slags 4-dimensjonalt rom? Og, enda verre,

5-tupler burde representere 5-dimensjonale objekter i et 5-dimensjonalt rom, 6-tupler 6-dimensjonale objekter i et 6-dimensjonalt rom osv? Hvem av oss kan med hånden på hjertet si at de har noen særlig geometrisk intuisjon for det som skjer i 4-, 5- og 6-dimensjonale rom?

Heldigvis behøver vi ikke å ha en slik intuisjon på forhånd, men kan bygge den opp gradvis. Ideen er enkel: vi overfører geometriske begreper fra planet og rommet til det generelle tilfellet ved å bruke de algebraiske beskrivelsene av geometriske egenskaper. Her er et eksempel: At to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale (dvs. at de står normalt på hverandre), er i utgangspunktet en geometrisk egenskap. Denne egenskapen kan vi beskrive algebraisk ved $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vi bruker nå denne algebraiske beskrivelsen til å *definere* at to n -tupler \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ (vi sier da at de står *normalt på hverandre*). På denne måten får vi innført det geometriske begrepet ortogonalitet i høyere dimensjoner uten å måtte støtte oss til noen geometrisk intuisjon. Når begrepet først er innført på denne måten, kan vi undersøke i hvilken grad det svarer til våre (geometriske) forestillinger om hva ortogonalitet er. På den måten bygger vi etter hvert opp en intuisjon om hva ortogonalitet av n -tupler er, og denne intuisjonen tar fort en geometrisk form.

La oss begynne med litt terminologi: Mengden \mathbf{R}^n av alle n -tupler kalles det *n -dimensjonale euklidske rommet*, og et n -tupel \mathbf{a} kalles også en *n -dimensjonal vektor* eller et *n -dimensjonalt punkt*. Som i det 2- og 3-dimensjonale tilfellet skal vi ofte bruke ordet «vektor» når det er naturlig å tenke på \mathbf{a} som et geometrisk objekt med lengde og retning, og vi skal bruke ordet «punkt» når vi er opptatt av noe (f.eks. en linje eller et plan) som går gjennom \mathbf{a} . Logisk sett er det selvfølgelig unødvendig å ha mer enn ett navn på disse objektene, men pedagogisk er det ofte en fordel å kunne bruke et ord som antyder hvilke egenskaper vi er opptatt av i hver enkelt situasjon. Vi har valgt det nøytrale ordet « n -tupel» som utgangspunkt for ikke å binde oss for sterkt til den ene eller andre tolkningen.

Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ er en to-dimensjonal vektor, er lengden gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Tilsvarende er lengden til en tre-dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

For en n -dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ er det derfor naturlig å definere *lengden* (eller *normen* som den også kalles) ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

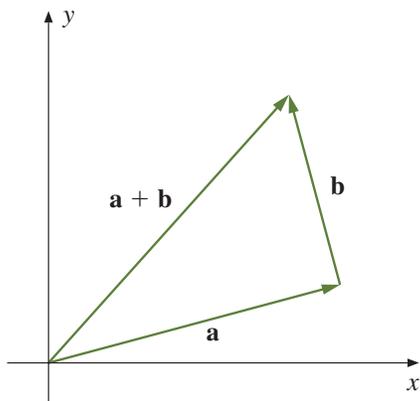
I kapittel 1 definerte vi skalarproduktet av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ til å være

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Vi har den vanlige sammenhengen mellom lengden og skalarproduktet

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \text{eller med andre ord} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Vi har allerede definert to n -tupler \mathbf{a} og \mathbf{b} til å være *ortogonale* (eller *stå normalt på hverandre*) dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ved hjelp av denne definisjonen kan vi formulere en



Figur T2.1.5 Multiplikasjon med et tall

n -dimensjonal versjon av et meget berømt resultat (figur T2.1.5 viser den geometriske motivasjonen).

T2.1.6 Pythagoras' setning for n -tupler Dersom \mathbf{a} , \mathbf{b} er ortogonale, så er

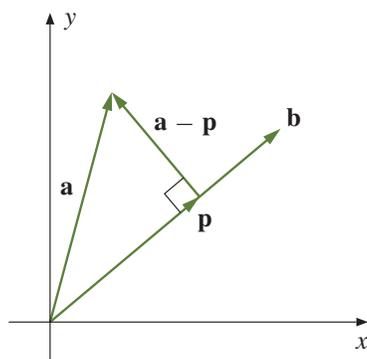
$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

Bevis: Dette er bare et enkelt regnestykke (husk regnereglene for n -tupler fra kapittel 1):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2 \cdot 0 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

■

Setningen ovenfor er vårt første eksempel på et resultat om n -tupler som er inspirert av en geometrisk observasjon. Vårt neste problem tar utgangspunkt i figur T2.1.6. Vi tenker oss at vi er gitt to vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , og at vi ønsker å finne *projeksjonen* \mathbf{p} av \mathbf{a} ned på \mathbf{b} . Dette betyr at \mathbf{p} er vektoren parallell med \mathbf{b} slik at $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ står normalt på \mathbf{b} .



Figur T2.1.6 Projeksjonen \mathbf{p} av \mathbf{a} ned på \mathbf{b}

I utgangspunktet er dette en geometrisk problemstilling som bare gir mening for vektorer i planet og rommet, men vi kan bruke vår oversettingsfilosofi til å gi mening til problemet for generelle n -tupler \mathbf{a} og \mathbf{b} . Siden det n -tuplet \mathbf{p} vi er på jakt etter skal være parallelt med \mathbf{b} , må det finnes et tall t slik at $\mathbf{p} = t\mathbf{b}$, og siden $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ skal stå normalt på \mathbf{b} , må vi ha

$$0 = (\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} - t\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - t|\mathbf{b}|^2$$

Løser vi denne ligningen med hensyn på t , får vi

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

som betyr at

$$\mathbf{p} = t\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

Vi får dermed dette resultatet:

T2.1.7 Setning Anta at \mathbf{a} og \mathbf{b} er to ikke-null vektorer i \mathbb{R}^n . Da er projeksjonen \mathbf{p} av \mathbf{a} ned på \mathbf{b} gitt ved:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

Lengden til projeksjonen er

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}.$$

Bevis: Den første formelen har vi allerede utledet. Den andre kan vi for eksempel finne med følgende regnestykke:

$$|\mathbf{p}| = |t\mathbf{b}| = |t||\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|^2} |\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

■

La oss kombinere resultatet vi nettopp har bevist med Pythagoras' setning. Siden $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ står normalt på \mathbf{b} , må den også stå normalt på \mathbf{p} som er parallell med \mathbf{b} (sjekk dette!). Det betyr at vi kan bruke Pythagoras' setning på vektorene \mathbf{p} , $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ og \mathbf{a} (se figur T2.1.6 for å få intuisjonen):

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{p}|^2$$

Siden $|\mathbf{a} - \mathbf{p}|^2 \geq 0$, betyr dette at

$$|\mathbf{a}|^2 \geq |\mathbf{p}|^2$$

som medfører at

$$|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{p}|$$

(husk at både $|\mathbf{a}|$ og $|\mathbf{p}|$ er positive). Ifølge setningen ovenfor er $|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$, og setter vi dette inn i ulikheten, får vi

$$|\mathbf{a}| \geq \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

Ganger vi med $|\mathbf{b}|$ på begge sider, sitter vi igjen med

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$$

Vi har kommet frem til en berømt og meget nyttig ulikhet:

T2.1.8 Schwarz' ulikhet For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gjelder

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Vi har likhet (dvs. $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$) hvis og bare hvis \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle.

Bevis: I utledningen av ulikheten har vi strengt tatt gått ut i fra at $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, men ulikheten gjelder åpenbart også om én eller begge vektorer er lik $\mathbf{0}$ (for da er venstresiden i ulikheten lik 0). Det gjenstår dermed bare å sjekke den siste påstanden. Leser du gjennom utledningen av ulikheten en gang til, vil du se at vi har likhet når $|\mathbf{a} - \mathbf{p}| = 0$, dvs. når $\mathbf{a} = \mathbf{p}$. Siden \mathbf{p} er parallell med \mathbf{b} , skjer dette når \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle. ■

Du husker sikkert fra skolematematikken at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$$

der v er vinkelen mellom vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} . I utgangspunktet gir denne formelen bare mening når \mathbf{a} og \mathbf{b} er vektorer i planet eller rommet — for generelle n -tupler vet vi jo ikke hva vinkler er. Ved hjelp av Schwarz' ulikhet kan vi nå snu situasjonen på hodet; vi *definerer* rett og slett vinkelen mellom to n -tupler \mathbf{a} og \mathbf{b} til å være den vinkelen v mellom 0° og 180° som er slik at $\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$. Legg merke til at siden Schwarz' ulikhet garanterer at $-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \leq 1$, så finnes det alltid en slik vinkel v som definisjonen forutsetter. Vi ser også at vi får $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$.

Hva er så vitsen med et slikt abstrakt og merkelig vinkelbegrep? Kan disse vinklene brukes til noe, og oppfører de seg som de vinklene vi er vant til fra planet og rommet? Dette er fornuftige spørsmål som bare erfaring kan gi svar på. Erfaringen viser at disse vinklene fungerer utmerket, og at de i det store og hele har de samme egenskapene som vinkler i 2 og 3 dimensjoner. Vi skal ikke komme nærmere inn på dette her, men tar med et eksempel på hvordan man finner en vinkel:

T2.1.9 Eksempel Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (2, -1, 0, 1, 1)$ og $\mathbf{b} = (0, 1, 3, -2, 0)$. Vi har

$$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{(2, -1, 0, 1, 1) \cdot (0, 1, 3, -2, 0)}{|(2, -1, 0, 1, 1)|| (0, 1, 3, -2, 0)|} = \frac{-3}{\sqrt{7}\sqrt{14}} = -\frac{3\sqrt{2}}{14}$$

Bruker vi en lommeregner, finner vi at $-\frac{3\sqrt{2}}{14} \approx -0.3030$. Dette gir

$$v \approx \arccos(-0.3030) \approx 107.6^\circ.$$

■

Et viktig resultat i planet og rommet er trekantulikheten som sier at $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Ved hjelp av Schwarz' ulikhet skal vi nå vise at trekantulikheten også gjelder i n dimensjoner.

T2.1.10 Trekantulikheten For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gjelder

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

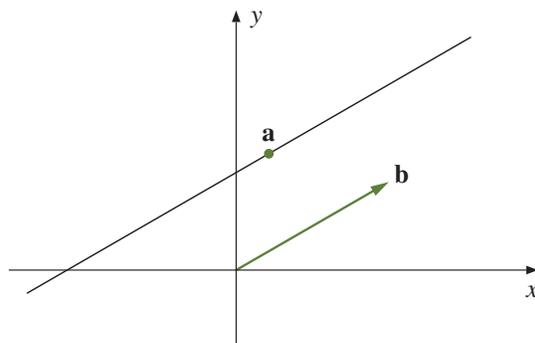
Bevis: Vi har

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \\ &\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 \end{aligned}$$

der vi har brukt at ifølge Schwarz' ulikhet er $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. ■

Geometrisk sier trekantulikheten at lengden til den ene siden i en trekant alltid er mindre enn summen av de to andre sidene. Resultatet ovenfor forteller oss at dette også gjelder i høyere dimensjoner. Faktisk spiller trekantulikheten en nøkkelrolle i de fleste forsøk på å generalisere avstandsbegrepet til nye sammenhenger. I dette kapitlet skal vi ha stor glede av trekantulikheten når vi studerer funksjoner av flere variable.

La oss avslutte denne seksjonen med å se på hvordan vi kan generalisere begrepet *linje* til \mathbb{R}^n . Vi starter i planet. Figur T2.1.7 viser en rett linje gjennom punktet \mathbf{a} parallell med vektoren \mathbf{b} .



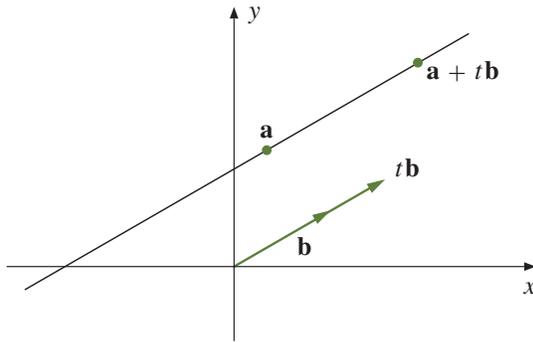
Figur T2.1.7 Rett linje gjennom \mathbf{a} parallell med \mathbf{b}

Siden enhver vektor $t\mathbf{b}$ er parallell med \mathbf{b} , ser vi at alle punkter av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ må ligge på linjen (se figur T2.1.8). Det er heller ikke så vanskelig å overbevise seg om at ethvert punkt på linjen må være av formen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for ett eller annet tall t .

Vi har dermed kommet frem til at de punktene som ligger på den rette linjen, er nøyaktig de som er av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for et reelt tall t . Vi skriver gjerne

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

og tenker på $\mathbf{r}(t)$ som et punkt som beveger seg langs linjen når t endrer seg.



Figur T2.1.8 Parameterfremstilling av en rett linje

Det er nå lett å generalisere begrepet rett linje til \mathbb{R}^n . Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, så består den rette linjen gjennom punktet \mathbf{a} og med retningsvektor \mathbf{b} av alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Bruker vi koordinater, ser vi at hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, så blir

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \dots, a_n + tb_n)$$

T2.1.11 Eksempel Finn en parameterfremstilling til linjen gjennom punktet $\mathbf{a} = (1, 2, 0, -1)$ med retningsvektor $\mathbf{b} = (-1, 2, -3, 1)$, og avgjør om punktet $\mathbf{c} = (2, -1, 1, 4)$ ligger på linjen.

Parameterfremstillingen er

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (1 - t, 2 + 2t, -3t, -1 + t)$$

Skal punktet \mathbf{c} ligge på linjen, må det finnes et tall t slik at $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}$, dvs. at følgende ligninger må være oppfylt:

$$1 - t = 2, \quad 2 + 2t = -1, \quad -3t = 1, \quad -1 + t = 4$$

Siden det ikke finnes noe tall t som oppfyller alle disse ligningene, ligger ikke \mathbf{c} på linjen. ■

Oppgaver

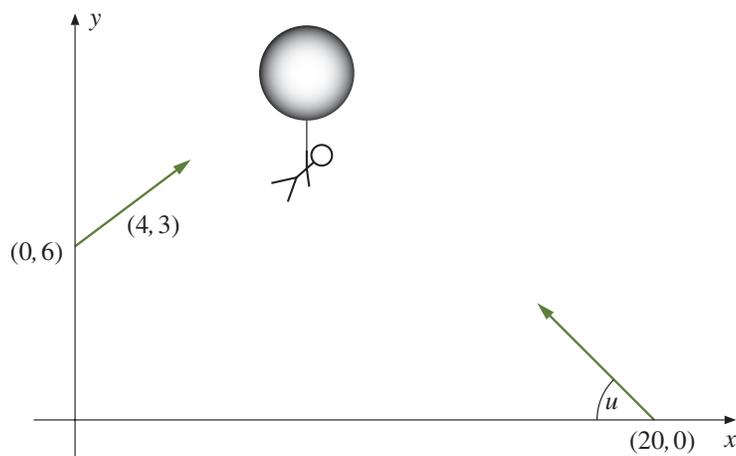
6. Finn skalarproduktet av $(-2, 3)$ og $(4, 1)$. Finn også vinkelen mellom vektorene.
7. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$ og vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} er 45° . Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
8. Finn vinkelen mellom vektorene $(1, 2, 3)$ og $(-1, 0, 1)$.
9. Regn ut vinkelen mellom $(-1, 2, 6, 2, 4)$ og $(1, 0, 3, 1, 1)$.
10. Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (4, 3, 1, 2)$ og $\mathbf{b} = (-1, 3, 2, 0)$. Finn også projeksjonen av \mathbf{a} ned på \mathbf{b} .
11. Hvor lang er projeksjonen av $(-3, 4, 2, 5)$ ned på $(0, 3, 1, 2)$?
12. Skriv $\mathbf{a} = (4, 3)$ som en sum av to vektorer \mathbf{b} og \mathbf{c} der \mathbf{b} er parallell med $\mathbf{d} = (1, 2)$ og \mathbf{c} står normalt på \mathbf{d} .

13. Skriv $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ som en sum av to vektorer \mathbf{b} og \mathbf{c} der \mathbf{b} er parallell med $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$ og \mathbf{c} står normalt på \mathbf{d} .
14. Finn vinkelen som hver av vektorene $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 1)$ danner med x -aksen. Regn ut $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og bruk svaret til å finne et eksakt uttrykk for $\cos(15^\circ)$.
15. Finn to vektorer som begge står normalt på $(3, 2, -1)$ og som ikke er parallelle.
16. Vis at dersom \mathbf{a} står normalt på både \mathbf{b} og \mathbf{c} , så står \mathbf{a} normalt på $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.
17. a) Vis at for $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, gjelder: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$.
 b) Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ når $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 4$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$.
 c) Anta at $|\mathbf{c}| = 3$, $|\mathbf{d}| = 4$ og $|\mathbf{c} + \mathbf{d}| = 5$. Finn vinkelen mellom \mathbf{c} og \mathbf{d} .
18. Per påstår at han har to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} slik at $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 7$. Hvorfor tror du ikke på ham?
19. Kari påstår at hun har to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} slik at $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -16$. Hvorfor tror du ikke på henne?
20. Vis at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Vis også at $|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, og konkluder med at $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.
21. Avstanden $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mellom to punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ er lik lengden til vektoren som forbinder dem, dvs. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Bevis at $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ for alle vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Hva er den geometriske tolkningen av denne ulikheten?
22. Vis at for alle vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} gjelder $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$. Vis at i et parallelogram er summen av kvadratene av sidene lik summen av kvadratene av diagonalene.
23. Finn en parameterfremstilling av linjen som går gjennom punktet $(-1, -1, 2)$ og er parallell med $(2, 3, 1)$.
24. Finn en parameterfremstilling av linjen gjennom $(-3, -2, 5, 8)$ parallell med $(1, -2, -1, 3)$. Sjekk om punktet $(1, -6, 3, 14)$ ligger på linjen.
25. Finn en parameterfremstilling av linjen som går gjennom punktene $(2, -1, 3)$ og $(3, 8, -2)$.
26. Finn en parameterfremstilling av linjen som går gjennom punktene $(7, -3, 2, 4, -2)$ og $(2, 1, -1, -1, 5)$.
27. Finn en parameterfremstilling for linjen som går gjennom $(5, -2)$ og som står normalt på $(-1, 2)$.
28. Finn en parameterfremstilling for linjen i planet som har ligning $2x + 3y = 6$.
29. En linje i planet har parameterfremstilling $(-3 + 2t, 2 - t)$. Finn en ligning av typen $y = ax + b$ for denne linjen.
30. To skip er på kryssende kurs. Ved tiden $t = 0$ er det ene skipet i punktet $(0, 4)$, og det andre skipet i punktet $(39, 14)$ (alle avstander er målt i nautiske mil.) Det første skipet beveger seg parallelt med vektoren $(3, 4)$ med en fart av 15 knop (1 knop = 1 nautisk mil per time). Det andre skipet beveger seg parallelt med vektoren $(-12, 5)$ med en fart av 13 knop.
 a) Hvor vil kursene krysse hverandre?
 b) Vil skipene kolliderer?
31. To fly er i det samme området. Ved tiden $t = 0$ er det ene flyet i punktet $(0, 0, 2000)$ og flyr med en fart på 150 m/s parallelt med vektoren $(2, 2, 1)$. Det andre flyet er ved tiden $t = 0$ i punktet

(5000, -1000, 4000) og 20 sekunder senere i punktet (4400, 2000, 4000). Flyet følger en rett linje og holder konstant hastighet.

- Vil kursene til de to flyene skjære hverandre?
- Vil flyene kolliderer?

32. I sin evige jakt etter honning forsøker Ole Brumm å invadere et tre ved hjelp av en ballong. Plutselig blir ballongen tatt av et vindkast og farer av sted med Ole Brumm. Etter å ha tenkt seg om et øyeblikk, innser Kristoffer Robin at hans eneste sjanse til å redde vennen er å skyte istykker ballongen med lekegeværet sitt. Figuren nedenfor viser en skisse av situasjonen.



Når vindkastet kommer ved tiden $t = 0$, befinner ballongen seg i punktet $(0, 6)$. Den blir ført av gårde med en fart av 5 m/s i retningen $(4, 3)$. Ved tiden $t = 2$ skyter Kristoffer Robin mot ballongen fra sin posisjon $(20, 0)$. Vinkelen mellom geværet og underlaget er u , og vi regner med at kulen beveger seg retlinjet med en fart av 70 m/s. Alle avstander er målt i meter og tiden er målt i sekunder.

- Forklar at ballongens posisjon ved tiden t er $(4t, 6 + 3t)$.
- Vis at kulens posisjon ved tiden t er $(20 - 70(t - 2) \cos u, 70(t - 2) \sin u)$.
- Hvilken vinkel u må Kristoffer Robin holde geværet i for å treffe midt i ballongen? Hvor langt er det ned til bakken når ballongen blir truffet?

33. I denne oppgaven skal vi se på et annet bevis for Schwarz' ulikhet.

- Vis at for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er

$$0 \leq |a\mathbf{x} \pm b\mathbf{y}|^2 = a^2|\mathbf{x}|^2 \pm 2ab\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + b^2|\mathbf{y}|^2$$

- Velg $a = |\mathbf{y}|$, $b = |\mathbf{x}|$ i ulikhetene ovenfor og utled Schwarz' ulikhet.

Komplekse n -tupler

Hittil har vi bare sett på n -tupler $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ der komponentene a_1, a_2, \dots, a_n er reelle tall. Vi skal nå ta en rask titt på det komplekse tilfellet. Som nevnt tidligere kalles mengden av alle komplekse n -tupler for \mathbb{C}^n . Addisjon og subtraksjon av komplekse n -tupler foregår komponentvis akkurat som i det reelle tilfellet. Også multiplikasjon med skalar (som nå godt kan være kompleks) foregår akkurat som før. La oss se på et eksempel:

T2.1.12 Eksempel Regn ut $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ når $s = 1 + i$, $t = i$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}$.

Vi får (husk at $i^2 = -1$):

$$\begin{aligned} s\mathbf{a} + t\mathbf{b} &= (1 + i) \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + i)2 \\ (1 + i)i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i(1 - i) \\ i(1 + i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ i - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i + 1 \\ i - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ -2 + 2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Når vi skal definere *normen* (dvs. *lengden*) til et komplekst n -tupplel, må vi være litt forsiktig. Dersom $\mathbf{a} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, setter vi

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

Vi tar altså tallverdien til komponentene før vi kvadrerer dem. Grunnen til dette er at kvadratet til et komplekst tall ikke behøver å være positivt og derfor gir et dårlig mål på størrelse.

T2.1.13 Eksempel Finn normen til vektoren $\mathbf{a} = (2 + i, 4 + i, 1 - 3i)$. Husk at dersom $z = a + ib$, så er $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ og dermed $|z|^2 = a^2 + b^2$. Dette gir

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= \sqrt{|2 + i|^2 + |4 + i|^2 + |1 - 3i|^2} \\ &= \sqrt{(2^2 + 1^2) + (4^2 + 1^2) + (1^2 + (-3)^2)} \\ &= \sqrt{4 + 1 + 16 + 1 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Lengden til vektoren er altså $4\sqrt{2}$.

■

For å få til det riktige samspillet mellom normen og skalarproduktet, må vi også gjøre en liten justering i definisjonen av skalarprodukt. Dersom $\mathbf{a} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ og $\mathbf{b} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, definerer vi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n}$$

Vi komplekskonjugerer altså den andre faktoren i skalarproduktet. Siden $z\overline{z} = |z|^2$, ser vi at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + \dots + z_n \overline{z_n} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = |\mathbf{a}|^2$$

Vi har altså den vanlige sammenhengen mellom norm og skalarprodukt:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

La oss ta med et eksempel på hvordan man regner ut et komplekst skalarprodukt.

T2.1.14 Eksempel Regn ut $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (1 + i, -2, 1 + 3i)$ og $\mathbf{b} = (2 + 2i, 1 - 2i, 3 + 4i)$. Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (1 + i)(2 - 2i) + (-2)(1 + 2i) + (1 + 3i)(3 - 4i) \\ &= 2 - 2i + 2i + 2 - 2 - 4i + 3 - 4i + 9i + 12 = 17 + i \end{aligned}$$

Skalarproduktet av to komplekse vektorer er altså et komplekst tall.

■

På grunn av komplekskonjugasjonen i annen faktor, har vi ikke lenger at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ for komplekse vektorer. Bruker vi regnereglene for konjugasjon (se *Kalkulus*, setning 3.1.5), ser vi imidlertid at

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}} &= \overline{w_1 \bar{z}_1 + w_2 \bar{z}_2 + \cdots + w_n \bar{z}_n} \\ &= \overline{w_1} \overline{\bar{z}_1} + \overline{w_2} \overline{\bar{z}_2} + \cdots + \overline{w_n} \overline{\bar{z}_n} \\ &= \overline{w_1} z_1 + \overline{w_2} z_2 + \cdots + \overline{w_n} z_n \\ &= z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

Bytter vi om på faktorenes rekkefølge, så komplekskonjugerer vi altså resultatet!

Siden vi er så vant til at faktorenes rekkefølge ikke spiller noen rolle, er det lett å bli lurt av det komplekse skalarproduktet. Dersom vi skal regne ut $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, er det f.eks. fristende å bruke første kvadratsetning til å skrive svaret

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b},$$

men dette blir ikke riktig! Ganger vi nemlig ut parentesene litt forsiktig, ser vi at

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

og siden $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ *ikke* er like, kan vi ikke slå sammen de to midterste leddene på vanlig måte. Siden tallene $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ er komplekskonjugerte, har vi imidlertid at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (der Re står for realdel), og dermed kan vi skrive

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2 \operatorname{Re}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2$$

Dette regnestykket viser at vi må være litt forsiktige når vi overfører standard regneprosedyrer til komplekse skalarprodukt.

Vi skriver opp de grunnleggende regnereglene for komplekse n -tupler (sammenlign med setning T2.1.5 for reelle n -tupler):

T2.1.15 Regneregler for komplekse n -tupler Dersom \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} er n -tupler og s og t er komplekse tall, gjelder følgende regneregler:

- (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \overline{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}$
- (c) $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$
- (d) $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
- (e) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ og $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- (f) $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ og $\mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) = \overline{s}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- (g) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Bevis: Med unntak av (b) (som vi nettopp har bevist) og andre del av (f), er dette nøyaktig de samme reglene som i setning T2.1.5, og bevisene er også de samme.

Vi nøyer oss derfor med å vise andre del av (f). Hvis $\mathbf{a} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ og $\mathbf{b} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, ser vi at $s\mathbf{b} = (sw_1, sw_2, \dots, sw_n)$, og dermed er

$$\mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) = z_1 \overline{sw_1} + z_2 \overline{sw_2} + \dots + z_n \overline{sw_n} = \overline{s}(z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n}) = \overline{s}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

■

Vi kan innføre geometriske begreper for komplekse n -tupler akkurat som for reelle selv om visualiseringen blir enda vanskeligere i dette tilfellet. Vi sier f.eks. at to vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ er *ortogonale* dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Legg merke til at dette medfører at $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ siden $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \overline{0} = 0$. Argumentkjeden som ga oss Pythagoras' setning, Schwarz' ulikhet og trekantulikheten i forrige seksjon, fungerer med små justeringer også i det komplekse tilfellet, og vi nøyer oss med å skrive opp resultatet:

T2.1.16 Setning

(i) (Pythagoras' setning) Dersom $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ er ortogonale, er

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$$

(ii) (Schwarz' ulikhet) For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ gjelder

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

(iii) (Trekantulikheten) For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ gjelder

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Oppgaver

34. Regn ut $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ når $s = i, t = 1 + 2i, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4i \\ 2 - i \end{pmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 2i \end{pmatrix}$.

35. Finn lengden til vektorene $\mathbf{a} = (3 + 2i, -1 + i)$ og $\mathbf{b} = (i, 2 + 3i, -2 - i)$.

36. Regn ut skalarproduktet $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ når $\mathbf{x} = (1 + 3i, -2i, 2 + 3i)$ og $\mathbf{y} = (2, 1 + 2i, -1 + i)$.

37. Vis at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ er

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 - 2 \operatorname{Re}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2$$

og

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - 2 \operatorname{Im}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) - |\mathbf{y}|^2$$

hvor $\operatorname{Re}(z)$ og $\operatorname{Im}(z)$ betegner hhv. realdelen og imaginærdelen til z .

38. Bevis setning T2.1.16 ved å gå gjennom beviset for de tilsvarende resultatene i samme seksjon og se hvilke modifikasjoner som må gjøres.

Matriser

En $m \times n$ -matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

er et rektangulært oppsett av tall med m rader (linjer) og n søyler. To eksempler er 2×3 -matrisen

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

og 3×3 -matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & \pi \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Tallene $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ som inngår i matrisen A , kaller vi *elementene* i A . Legg merke til hvordan vi nummerer elementene: a_{34} er elementet i rad 3 og søyle 4 (strengt tatt burde vi ha skrevet et komma mellom 3-tallet og 4-tallet for å gjøre det klart at det ikke er element nummer 34 det er snakk om, men man blir fort lei av å skrive alle kommaene, og det er derfor vanlig å droppe dem dersom det ikke kan oppstå misforståelser). Legg også merke til at vi kan oppfatte vektorer som matriser. En radvektor

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

er en $1 \times n$ -matrise, mens en søylevektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

er en $n \times 1$ -matrise. Som matriser betraktet er altså radvektoren og søylevektoren av forskjellig type, og når vi blander vektorer og matriser er det derfor viktig å holde styr på om \mathbf{a} skal oppfattes som en rad- eller en søylevektor. Vi skal komme tilbake til dette etter hvert. Legg forøvrig merke til at en 1×1 -matrise (a_{11}) bare er et tall med en parentes rundt. Parentesen spiller ingen rolle, og vi skal derfor si at en 1×1 -matrise bare er et tall a_{11} .

Akkurat som for n -tupler kan vi definere addisjon og subtraksjon komponentvis. Dersom vi har to $m \times n$ -matriser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

så definerer vi

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

og

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

Siden alle regneoperasjoner foregår komponentvis, vil de vanlige regnereglerne for addisjon og subtraksjon også gjelde for matriser. La oss ta med et eksempel der vi kombinerer flere av regneoperasjonene:

Vi kan også multiplisere en matrise med et tall s ved å gange tallet inn i hver komponent:

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \dots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \dots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \dots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

T2.1.17 Eksempel Regn ut $3A - 2B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 12 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

■

Transponering er en viktig operasjon for matriser som ikke finnes for tall. Vi transponerer en matrise ved å bytte om rader og søyler. Den *transponerte* til matrisen A ovenfor er derfor

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Legg merke til at når A er en $m \times n$ -matrise, så er A^T en $n \times m$ -matrise.

T2.1.18 Eksempel Den transponerte til 2×3 -matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

er

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

som er en 3×2 -matrise.

■

Transponering kan lett kombineres med addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med skalar. Du kan sjekke at

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (A - B)^T = A^T - B^T, \quad (cA)^T = cA^T$$

Hvis vi transponerer den transponerte, kommer vi tilbake til utgangspunktet:

$$(A^T)^T = A$$

Legg også merke til at rad- og søylevektorer er transponerte av hverandre. Oppfatter vi søylevektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

som en matrise, blir den transponerte en radvektor

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

De grunnleggende regneoperasjonene for matriser som vi nå har sett på, er ganske enkle, men man kan jo lure på hva det hele er godt for — hvorfor innfører vi egentlig matriser når vi allerede har n -tupler til å holde styr på lister av tall? Ett svar er at en del lister kommer naturlig i rektangelform, og at det er greit å beholde denne formen for ikke å miste oversikt over informasjonen. Opplysningene vi legger inn i et regneark vil f.eks. ofte ha matriseform. Det neste eksemplet viser en situasjon som ofte forekommer, og der elementene i matrisen viser fordelingen mellom forskjellige muligheter.

T2.1.19 Eksempel En fruktpresse mottar epler fra fire forskjellige produsenter. Eplene blir sortert i tre kategorier: god, middels, dårlig. Erfaringene viser at produsentene har forskjellig kvalitet på sine produkter. Produsent 1 leverer 50 % av god kvalitet, 30 % av middels kvalitet og 20 % av dårlig kvalitet. Tallene for de andre produsentene er: Produsent 2: 30 %, 40 %, 30 %; produsent 3: 25 %, 40 %, 35 %, produsent 4: 20 %, 60 %, 20 %. Dersom vi gir hver produsent en søyle, kan vi sette opp denne informasjonen som en 3×4 -matrise (husk at prosent betyr «hundredel»):

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.25 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Anta nå at fruktpressen mottar leveringer fra hver av produsentene: 4 tonn fra produsent 1, 5 tonn fra produsent 2, 3 tonn fra produsent 3 og 6 tonn fra produsent 4. Vi setter opp denne leveransen som en søylevektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker å finne ut hvor mange tonn vi har fått av hver kvalitet. Observer at dersom vi ganger hvert av tallene i første rad i A med tilsvarende tall i \mathbf{b} , og så legger sammen, får vi antall tonn av beste kvalitet:

$$0.5 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.25 \cdot 3 + 0.2 \cdot 6 = 2 + 1.5 + 0.75 + 1.2 = 5.45$$

Tilsvarende får vi antall tonn av nest beste kvalitet ved å gange tallene i annen rad i A med tilsvarende tall i \mathbf{b} , og så legge sammen:

$$0.3 \cdot 4 + 0.4 \cdot 5 + 0.4 \cdot 3 + 0.6 \cdot 6 = 1.2 + 2 + 1.2 + 3.6 = 8$$

Til slutt får vi antall tonn av dårligste kvalitet ved å gange tallene i nederste rad i A med tilsvarende tall i \mathbf{b} og så legge sammen:

$$0.2 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.35 \cdot 3 + 0.2 \cdot 6 = 0.8 + 1.5 + 1.05 + 1.2 = 4.55$$

Legg merke til at i hvert av disse regnestykkene har vi regnet ut et slags skalarprodukt mellom en rad i matrisen A og vektoren \mathbf{b} (vi sier et «slags» skalarprodukt siden det er et litt uortodokst produkt mellom en radvektor og en søylevektor). Legg også merke til at vi kan tenke på resultatet av regnestykkene som en ny vektor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5.45 \\ 8 \\ 4.55 \end{pmatrix}$$

som forteller oss hvor mange tonn vi har av hver kvalitet. ■

Vi skal se på et eksempel til av lignende type.

T2.1.20 Eksempel Et kjøpesenter har tre stativ X , Y og Z hvor du kan hente og avlevere handlevogner. Av de vognene som starter dagen i stativ X , vil 70 % avslutte den på samme sted, 20 % vil ha endt opp i Y , og 10 % i Z . Av de vognene som startet dagen i stativ Y , vil 30 % avslutte dagen i stativ X , mens henholdsvis 50 % og 20 % vil havne i stativene Y og Z . De tilsvarende tallene for vogner som starter i Z , er at 40 % ender dagen i X , 20 % i Y og 40 % i Z . Vi kan ordne disse tallene i en matrise A der første søyle gir fordelingen av de vognene som startet i X , andre søyle gir fordelingen av de vognene som startet i Y og tredje søyle gir fordelingen av vognene som startet i Z :

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Anta nå at vi startet dagen med 100 vogner i X , 70 vogner i Y og 30 vogner i Z , og la oss skrive dette som en søylevektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker å finne ut hvor mange vogner som befinner seg på hvert sted ved slutten av dagen. Antall vogner i X får vi ved å gange tallene i første rad i A med tilsvarende komponent i vektoren \mathbf{b} , og så legge sammen:

$$0.7 \cdot 100 + 0.3 \cdot 70 + 0.4 \cdot 30 = 70 + 21 + 12 = 103$$

Antall vogner i Y får vi tilsvarende ved å gange hvert tall i annen rad i A med tilsvarende tall i \mathbf{b} , og så legge sammen:

$$0.2 \cdot 100 + 0.5 \cdot 70 + 0.2 \cdot 30 = 20 + 35 + 6 = 61$$

Antall vogner i Z ved slutten av dagen, får vi så ved å gange hvert tall i tredje rad i A med tilsvarende tall i \mathbf{b} , og legge sammen:

$$0.1 \cdot 100 + 0.2 \cdot 70 + 0.4 \cdot 30 = 10 + 14 + 12 = 36$$

Vi kan skrive opp resultatet som en ny vektor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 103 \\ 61 \\ 36 \end{pmatrix}$$

som gir oss fordelingen av handlevogner ved slutten av dagen. Legg merke til at vi i dette eksemplet har gjort akkurat samme operasjoner som i det forrige; vi har tatt skalarproduktene mellom radene i A og søylevektoren \mathbf{b} . ■

I begge eksemplene ovenfor gjennomførte vi samme type regneoperasjoner. Vi startet med en matrise A og en søylevektor \mathbf{b} , og laget en ny søylevektor \mathbf{c} der komponentene fremkom som skalarprodukt av radene i A og vektoren \mathbf{b} . Denne regneoperasjonen er så vanlig at det er greit å ha et eget navn på den.

T2.1.21 Definisjon Anta at A er en $m \times n$ -matrise og at \mathbf{b} er en n -dimensjonal søylevektor:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Produktet av A og \mathbf{b} er da den m -dimensjonale søylevektoren $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b}$ gitt ved

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

Den i -te komponentene i $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b}$ fremkommer altså ved at vi tar skalarproduktet av den i -te raden i A med vektoren \mathbf{b} .

Legg merke til at produktet $\mathbf{A}\mathbf{b}$ bare er definert når A og \mathbf{b} passer sammen størrelsesmessig; \mathbf{b} må ha like mange komponenter som A har søyler. Observer også at produktet $\mathbf{A}\mathbf{b}$ er en søylevektor med like mange rader som A .

T2.1.22 Eksempel Finn $\mathbf{A}\mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 \\ (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

■

Vi skal komme tilbake til regneregler for produkter senere, men skriver opp noen av de enkleste og vanligste (i formlene nedenfor er s et tall):

$$\begin{aligned} (A + B)\mathbf{b} &= \mathbf{Ab} + \mathbf{Bb}, & (sA)\mathbf{b} &= s(\mathbf{Ab}) \\ A(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{Ab} + \mathbf{Ac}, & A(s\mathbf{b}) &= s(\mathbf{Ab}) \end{aligned}$$

Det er god trening å sjekke at disse reglene holder. Vær oppmerksom på at det også er en del ting du kan gjøre med vanlige produkter, som du *ikke* kan gjøre med produktet ovenfor, f.eks. kan du ikke bytte om på rekkefølgen av faktorene (\mathbf{bA} gir ikke mening). Du kan heller ikke forkorte A i uttrykk av typen $\mathbf{Ab} = \mathbf{Ac}$ eller \mathbf{b} i uttrykk av typen $\mathbf{Ab} = \mathbf{Bb}$ — å forkorte betyr egentlig å gange med et inverst element på begge sider, og vi vet foreløpig ikke noe om inverse vektorer og matriser (det viser seg at vektorer ikke har inverser, men at noen matriser har det!)

La oss ta en ny kikk på eksempel T2.1.19 og T2.1.20 i lys av de begrepene vi nå har innført:

Eksempel T2.1.19 og T2.1.20 på nytt. I eksempel T2.1.19 (fruktpressen) ble leveransene fra de fire produsentene kodet som et 4-tupplet \mathbf{b} , mens 3-tupplet \mathbf{c} fortalte oss hvor mange tonn vi mottok av hver kvalitet. Vi regnet ut elementene i \mathbf{c} ved å ta skalarproduktet av radene i matrisen A med vektoren \mathbf{b} — med andre ord:

$$\mathbf{c} = \mathbf{Ab}$$

Som vi skal komme tilbake til senere, kan vi tenke på multiplikasjon med A som en «transformasjon» — vektoren \mathbf{b} forteller oss hvor mye frukt vi får fra hver produsent, og multiplikasjon med A «transformerer» denne kunnskapen til kunnskap om hvor mye vi mottar av hver kvalitet (representert ved vektoren \mathbf{c}).

Noe lignende skjer i eksempel T2.1.20 (handlevognene). Her representerer vektor \mathbf{b} fordelingen av handlevognner ved begynnelsen av dagen, mens vektor \mathbf{c} representerer fordelingen ved slutten av dagen. Vi regnet ut elementene i \mathbf{c} ved å ta skalarproduktet av radene i matrisen A med vektoren \mathbf{b} — med andre ord:

$$\mathbf{c} = \mathbf{Ab}$$

Igjen kan vi tenke på multiplikasjon med A som en transformasjon som transformerer kunnskap om hvor handlevognene er ved begynnelsen av dagen til kunnskap om hvor de er ved slutten av dagen. ■

La oss avslutte med en liten observasjon som vi kommer til å få glede av senere. Anta at

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

er to søylevektorer. Transponerer vi \mathbf{a} , får vi radvektoren

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

som vi kan oppfatte som en $1 \times n$ -matrise. Vi kan nå ta produktet av matrisen \mathbf{a}^T og vektoren \mathbf{b} . Dette gir oss en 1×1 -matrise (dvs. et tall):

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Matriseproduktet $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ er altså lik skalarproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Dette kan virke som en kuriositet, men viser seg å være viktig i en del sammenhenger.

Oppgaver

39. Regn ut $2A$, $(-3)B$, $A + B$ og $A - B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

40. Regn ut $4A - 3B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

41. Finn de transponerte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

42. Finn de transponerte til A , B og $4A - B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

43. Regn ut $A\mathbf{x}$ når:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{b) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

44. Regn ut hvor mange tonn vi får av hver kvalitet i eksempel T2.1.19 dersom produsent 1 leverer 10 tonn, produsent 2 leverer 5 tonn, produsent 3 leverer 8 tonn og produsent 4 leverer 6 tonn.

45. Hvordan vil handlevognene i eksempel T2.1.20 fordele seg ved slutten av dagen dersom vi begynner med 50 vogner i stativ X , 70 i stativ Y og 80 i stativ Z ?

46. Bevis regnereglene for transponering som står rett etter eksempel T2.1.18.

47. Bevis regnereglene for multiplikasjon av matrise og vektor som står rett etter eksempel T2.1.22.

48. Et oljemottak får olje fra 3 oljefelt. Oljen inndeles i fem kvaliteter A, B, C, D, E. Fra oljefelt 1 er fordelingen: A: 10 %, B: 20 %, C: 30 %, D: 30 %, E: 10 %. Fra oljefelt 2 er fordelingen: A: 0 %, B: 30 %, C: 30 %, D: 30 %, E: 10 %. Fra oljefelt 3 er fordelingen: A: 20 %, B: 20 %, C: 10 %, D: 10 %, E: 40 %. Anta at mottaket får inn x enheter fra felt 1, y enheter fra felt 2 og z enheter fra felt 3. Finn en matrise som kan brukes til å regne ut hvor mange enheter man får av hver kvalitet. Hva blir resultatet når $x = 10$, $y = 12$ og $z = 8$?
49. En smittsom sykdom sprer seg i et land. Helsemyndighetene deler befolkningen i tre grupper: smitteutsatte, syke, immune. Fra en uke til den neste regner man at 5% av de smitteutsatte blir syke, mens 1 % av dem blir immune uten å ha vært syke. Av de syke blir 80% immune, mens resten fortsatt er syke. En prosent av de immune mister immuniteten og blir smitteutsatte, mens resten fortsatt er immune. La x_n, y_n, z_n være den andelen av befolkningen som er hhv. smitteutsatt, syk og immun etter n uker. La $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
- Finn en matrise A slik at $A\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n+1}$.
 - I uke 0 er 10 % av befolkningen syke, mens resten er smitteutsatte. Finn fordelingen av smitteutsatte, syke og immune i uke 1 og 2.
50. En forskergruppe som studerer et bestemt dyreslag, deler bestanden inn i fire grupper:
- unge, dvs. dyr født samme vår
 - unge voksne, dvs. dyr født året før
 - voksne, dvs. dyr født to år før
 - gamle, dvs. dyr født mer enn to år før

Statistikken viser at bare 5 % av de unge overlever til året etter. Av de unge voksne overlever 50 % til året etter. I tillegg gir en ung voksen i gjennomsnitt opphav til 20 unger som blir født året etter. Blant de voksne overlever 30 % til året etter. I tillegg gir en voksen i gjennomsnitt opphav til 50 unger som blir født året etter. Av de gamle overlever 10 % til året etter. I tillegg gir en gammel i gjennomsnitt opphav til 10 unger som blir født året etter. La x_n, y_n, z_n, u_n være hhv. antall unge, antall unge voksne, antall voksne og antall gamle etter n år, og skriv

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix}$$

- Finn en matrise A slik at $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$.
 - Anta at det et år settes ut 100 voksne dyr i et terreng der det ikke er noen dyr fra før av. Hvor mange dyr av hver kategori vil det være i dette terrenget to år senere?
51. Per, Pål og Espen leker sisten. Hver gang Per eller Pål har sisten, er det 90 % sjanse for at Espen får sisten neste gang, mens hver gang Espen har sisten, har Per og Pål 50 % sjanse hver for å få sisten neste gang. Anta at x_n er sannsynligheten for at Per er den n -te som har sisten, at y_n er sannsynligheten for at Pål er den n -te som har sisten, og at z_n er sannsynligheten for at Espen er den n -te som har sisten. La $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
- Finn en matrise A slik at $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$.
 - Anta at Pål har sisten først. Hva er sannsynligheten for at henholdsvis Per, Pål og Espen er den tredje som har sisten?

Multiplikasjon av matriser

I forrige avsnitt så vi at addisjon og subtraksjon av matriser er lett; vi bare adderer og subtraherer komponentvis. Det er fristende å definere multiplikasjon på samme måte; hvis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

så bør kanskje produktet være

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \dots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}?$$

Det er ikke noe galt med dette produktet (det kalles *Hadamard-produktet* og er nyttig for noen formål), men det er en annen type matriseprodukt som er langt viktigere. Ved første øyekast ser dette produktet litt merkelig ut, og for å motivere det skal vi gå tilbake til produktet $\mathbf{A}\mathbf{b}$ fra slutten av forrige seksjon. (Dersom du synes denne motivasjonen er vanskelig, kan du trøste deg med at det kommer en oppsummering i definisjon T2.1.23.)

La oss se litt nærmere på produktet $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b}$ mellom en matrise A og en vektor \mathbf{b} . Som allerede nevnt, er det ofte smart å tenke på dette som en *transformasjon*; vi starter med en vektor \mathbf{b} , og matrisen A transformerer \mathbf{b} til en ny vektor \mathbf{c} . I eksempel 3 i forrige seksjon (fruktpressen), så vi f.eks, hvordan A transformerer kunnskap om hvor mange tonn epler vi får fra hver produsent (kodet opp i vektoren \mathbf{b}) til kunnskap om hvor mange tonn epler vi har av hver kvalitet (kodet opp i vektoren $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b}$). Noe tilsvarende skjedde i eksempel T2.1.20 (handlevognene); i dette tilfellet transformerer A kunnskap om hvor vognene er ved begynnelsen av dagen (gitt ved vektoren \mathbf{b}), til kunnskap om hvor de er ved slutten av dagen (gitt ved vektoren $\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{b}$). Legg merke til at i begge eksemplene bruker vi den samme matrisen A uansett hvilken input-vektor \mathbf{b} vi har — det er slik gjenbruk som ofte gjør matriser nyttige.

Vi kan illustrere situasjonen med diagrammet nedenfor; en $m \times n$ -matrise A transformerer vektorer \mathbf{x} i \mathbb{R}^n til vektorer $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ i \mathbb{R}^m :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

I mange situasjoner må vi foreta flere transformasjoner etter hverandre. Neste diagram viser en slik situasjon; først transformeres $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ til $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ved hjelp av matrisen B , og deretter transformeres $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ til $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ ved hjelp av matrisen A :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \xrightarrow{B} \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$$

Det er naturlig å spørre om det finnes en matrise C som tar oss direkte fra \mathbf{x} til \mathbf{z} uten å gå veien om \mathbf{y} , dvs. slik at $\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. Neste diagram viser hvordan en slik C vil fungere:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \xrightarrow{B} \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$$

$\xrightarrow{\quad C \quad} \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

Det viser seg at det eksisterer en slik matrise C , og vi skal nå finne den. Før vi begynner kan det være greit å bestemme størrelsen til de tre matrisene våre A , B og C . Vi ser at A transformerer vektorer i \mathbb{R}^n til vektorer i \mathbb{R}^m , og det betyr at A er en $m \times n$ -matrise. Tilsvarende transformerer B vektorer i \mathbb{R}^k til vektorer i \mathbb{R}^n , og det betyr at B er en $n \times k$ -matrise. Den ukjente matrisen C skal transformere vektorer i \mathbb{R}^k til vektorer i \mathbb{R}^m , og må derfor være en $m \times k$ -matrise. Vi har derfor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

som våre kjente matriser, og

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

som vår ukjente matrise. Hvis \mathbf{x} er vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

ser vi at

$$\mathbf{y} = B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1k}x_k \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2k}x_k \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nk}x_k \end{pmatrix}$$

Ser vi på den j -te raden i denne ligningen, får vi $y_j = b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \dots + b_{jk}x_k$. Vi har også

$$\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix}$$

og setter vi $y_j = b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \dots + b_{jk}x_k$ inn i dette uttrykket, ser vi at den i -te komponenten til \mathbf{z} er gitt ved

$$z_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = a_{i1}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1k}x_k) \\ + a_{i2}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2k}x_k) + \dots + a_{in}(b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nk}x_k)$$

Samler vi alle x_1 -ledd for seg, alle x_2 -ledd for seg osv., får vi:

$$z_i = (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1})x_1 \\ + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2})x_2 + \dots + (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})x_k$$

På den annen side: hvis vi tenker oss at \mathbf{z} fremkommer direkte fra \mathbf{x} ved bruk av matrisen C , har vi

$$\mathbf{z} = C\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mk}x_k \end{pmatrix}$$

dvs. at den i -te komponenten til z er gitt ved

$$z_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{ik}x_k$$

Skal de to uttrykkene for z_i være like, må vi ha

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1}$$

$$c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2}$$

osv. ned til

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

Generelt har vi altså

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Legg merke til at dette er skalarproduktet av den i -te raden i A med den j -te søylen i B .

La oss oppsummere. Vi har vist at den matrisen

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

som i én operasjon utfører den samme transformasjonen som B etterfulgt av A , er gitt ved

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Siden det å transformere vektorer er det viktigste matriser gjør, tar vi denne formelen som utgangspunkt for vår definisjon av matriseprodukt.

T2.1.23 Definisjon Anta at A er en $m \times n$ -matrise og at B er en $n \times k$ -matrise. Da er *matriseproduktet* $C = AB$ definert som $m \times k$ -matrisen C med komponenter

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Vi får altså den ij -te komponenten i C ved å ta skalarproduktet av den i -te raden i A med den j -te søylen i B .

Figuren viser grafisk hvordan vi finner det ij -te elementet i produktmatrisen C : Vi tar skalarproduktet av den i -te raden i A med den j -te søylen i B :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

Legg merke til at matriseproduktet AB bare er definert når A og B passer sammen i størrelse: radene i A må være like lange som søylene i B . Dette betyr at den «siste» dimensjonen n i $m \times n$ -matrisen A er lik den «første» dimensjonen n i $n \times k$ -matrisen B . Legg merke til at hvis vi stryker de to n -ene i $m \times n$ og $n \times k$, sitter vi igjen med størrelsen $m \times k$ til produktmatrisen C .

T2.1.24 Eksempel Regn ut AB når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Siden A er en 3×2 og B er 2×3 -matrise, eksisterer produktet og er en 3×3 -matrise. Vi får

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ 4 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 & 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 19 \\ 5 & -7 & -3 \\ 18 & -20 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Legg merke til at selv i de tilfellene hvor AB er definert, kan vi ikke nødvendigvis regne ut BA . Her prøver vi nemlig å multiplisere en $n \times k$ -matrise med en $m \times n$ -matrise, og det er bare mulig når $k = m$. Selv i de tilfellene hvor både AB og BA er definert, er de som regel forskjellige. Her er et eksempel.

T2.1.25 Eksempel Regn ut AB og BA når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 4 & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$$

og

$$BA = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 3 & 24 \end{pmatrix}$$

Vi har altså $AB \neq BA$.

Regnereglen $ab = ba$ (som altså ikke gjelder for matriser!) kalles for *den kommutative lov*. Siden matrisemultiplikasjon ikke oppfyller denne regelen, sier vi at matriseproduktet er *ikke-kommutativt*. Det tar tid å vende seg til ikke-kommutative operasjoner, og det eneste rådet vi kan gi er: Vær forsiktig og begrunn hvert eneste skritt når du regner med slike operasjoner! Heldigvis er det mange regneregler som fortsatt gjelder for matriseprodukter:

T2.1.26 Regneregler for matrisemultiplikasjon I hvert av punktene nedenfor antar vi at A , B og C er matriser slik at regneoperasjonene er definert.

$$(i) (AB)C = A(BC)$$

$$(ii) A(B + C) = AB + AC$$

$$(iii) (B + C)A = BA + CA$$

$$(iv) (sA)B = A(sB) = s(AB) \text{ for alle tall } s$$

$$(v) (AB)^T = B^T A^T$$

Bevis: Bevisene går rett og slett ut på å gange ut venstre og høyre side av likhetene og sjekke at svarene er like. Vi tar (i) og (v) som eksempler — de andre punktene er atskillig enklere enn (i):

(i) Vi skal bevise at de to matrisene $X = (AB)C$ og $Y = A(BC)$ er like. Før man begynner, er det lurt å være helt sikker på hva som er forskjellen på de to uttrykkene. Poenget er at vi alltid gjennomfører operasjonene inni parentesene først. Når vi regner ut $X = (AB)C$, multipliserer vi altså først sammen A og B til en matrise $D = AB$, og så multipliserer vi D fra høyre med C slik at vi får $X = DC$. Når vi regner ut $Y = A(BC)$, ganger vi først sammen B og C til en matrise $E = BC$, og så ganger vi denne fra venstre med A slik at vi får $Y = AE$. Vår oppgave er altså å vise at $DC = AE$. Formulert på denne måten er ikke likheten så selvfølgelig som den kan se ut ved første blick.

Før vi begynner på regningene, er det greit å se litt på størrelsen til de involverte matrisene. For at produktene $(AB)C$ og $A(BC)$ skal gi mening, må det finnes tall m, n, k, l slik at A er en $m \times n$ -matrise, B en $n \times k$ -matrise og C en $k \times l$ -matrise. Dermed blir $D = AB$ en $m \times k$ -matrise og $E = BC$ en $n \times l$ -matrise. Legg merke til at både $X = DC$ og $Y = AE$ er $m \times l$ -matriser, så størrelsesmessig er i hvert fall de to matrisene like.

Vi er nå klare til å gjøre regningene våre. Vi observerer først at det ij -te elementet i $X = DC$ er lik

$$x_{ij} = d_{i1}c_{1j} + d_{i2}c_{2j} + \cdots + d_{ik}c_{kj} = \sum_{p=1}^k d_{ip}c_{pj}$$

Siden $D = AB$ er videre

$$d_{ip} = a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np} = \sum_{q=1}^n a_{iq}b_{qp}$$

Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$x_{ij} = \sum_{p=1}^k d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^n a_{iq} b_{qp} \right) c_{pj} = \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^n a_{iq} b_{qp} c_{pj}$$

dvs. at x_{ij} er summen av alle mulige kombinasjoner $a_{iq} b_{qp} c_{pj}$.

På tilsvarende måte regner vi ut $Y = AE$. Det ij -te elementet i Y er

$$y_{ij} = a_{i1} e_{1j} + a_{i2} e_{2j} + \cdots + a_{in} e_{nj} = \sum_{q=1}^n a_{iq} e_{qj}$$

Siden $E = BC$ er videre

$$e_{qj} = b_{q1} c_{1j} + b_{q2} c_{2j} + \cdots + b_{qk} c_{kj} = \sum_{p=1}^k b_{qp} c_{pj}$$

Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$y_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} e_{qj} = \sum_{q=1}^n a_{iq} \left(\sum_{p=1}^k b_{qp} c_{pj} \right) = \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^k a_{iq} b_{qp} c_{pj}$$

Dette viser at y_{ij} er lik summen av alle mulige kombinasjoner $a_{iq} b_{qp} c_{pj}$, akkurat som x_{ij} er. Altså er $x_{ij} = y_{ij}$, og beviset for (i) er ferdig.

(v) Anta at A er en $m \times n$ -matrise og at B er en $n \times k$ -matrise. Da er A^T en $n \times m$ -matrise og B^T en $k \times n$ -matrise, så både $(AB)^T$ og $B^T A^T$ er $k \times m$ -matriser. Det ij -te elementet i $C = (AB)^T$ er lik det ji -te elementet i AB , dvs:

$$c_{ij} = a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \cdots + a_{jn} b_{ni}$$

På den annen side fremkommer det ij -te elementet i $D = B^T A^T$ ved at vi tar skalarproduktet av den i -te raden i B^T med den j -te søylen i A^T . Men den i -te raden i B^T er den i -te søylen i B , og den j -te søylen i A^T , er den j -te raden i A , så dette blir skalarproduktet mellom den j -te raden i A og den i -søylen i B , dvs.

$$d_{ij} = a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \cdots + a_{jn} b_{ni}$$

Altså er $c_{ij} = d_{ij}$, og beviset er fullført. ■

Regnereglene ovenfor gjør det enklere å regne med matriser, men vi må som sagt være forsiktige med en del ting — spesielt at vi ikke bytter om på rekkefølgen av matrisene (husk at vanligvis er AB ulik BA). Vi kan heller ikke forkorte matriser på vanlig måte — å forkorte betyr egentlig å multiplisere med et inverst element, og foreløpig vet vi ingen ting om inverse matriser.

La oss ta med oss en liten observasjon. Dersom A er en $m \times n$ -matrise og \mathbf{b} er en søylevektor med n -komponenter, kan vi danne produktet $A\mathbf{b}$ på to måter — vi kan enten tenke på det som produktet av matrisen A og vektoren \mathbf{b} slik vi definerte det i forrige seksjon, eller vi kan tenke på det som produktet av $m \times n$ -matrisen A med $n \times 1$ -matrisen

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

slik vi har definert det i denne seksjonen. Det er lett å se at disse to måtene gir akkurat samme svar. Dette betyr at vi kan bruke regnereglene ovenfor også når noen av matrisene er vektorer.

T2.1.27 Eksempel Vi har en $m \times n$ -matrise A og en $n \times k$ -matrise B . Vi lar B transformere en søylevektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ved $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. Så lar vi A transformere \mathbf{y} slik at $\mathbf{z} = A\mathbf{y}$. Det samlede resultatet er:

$$\mathbf{z} = A\mathbf{y} = A(B\mathbf{x})$$

Ved hjelp av regneregel (i) ovenfor kan vi flytte parentesene:

$$\mathbf{z} = A\mathbf{y} = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

Dette viser noe vi allerede vet, nemlig at når vi transformerer en vektor to ganger ved først å bruke B og deretter A , så er det det samme som å transformere én gang ved hjelp av produktet AB . ■

Vi avslutter denne seksjonen med en ulikhet som vi vil få bruk for i neste kapittel. Hvis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

er en $m \times n$ -matrise, definerer vi *normen til A* til å være

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

(vi legger altså sammen kvadratene a_{ij}^2 av alle leddene og tar kvadratroten til summen).

T2.1.28 Setning Hvis A er en $m \times n$ -matrise og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, så er

$$|A\mathbf{x}| \leq \|A\| |\mathbf{x}|$$

Med andre ord: Når vi ganger vektoren \mathbf{x} med matrisen A , så øker lengden maksimalt med en faktor $\|A\|$.

Bevis: La $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Da er

$$|A\mathbf{x}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2}$$

der y_1, y_2, \dots, y_m er komponentene til \mathbf{y} . Dersom $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ er den i -te linjen i A , vet vi at $y_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}$. Ifølge Schwarz' ulikhet er dermed $|y_i| \leq |\mathbf{a}_i| |\mathbf{x}|$. Kvadrerer vi, får vi $y_i^2 \leq |\mathbf{a}_i|^2 |\mathbf{x}|^2$. Setter vi dette inn i uttrykket for $A\mathbf{x}$, ser vi at

$$\begin{aligned} |A\mathbf{x}| &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2} \leq \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 |\mathbf{x}|^2 + \dots + |\mathbf{a}_m|^2 |\mathbf{x}|^2} \\ &= \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \dots + |\mathbf{a}_m|^2} |\mathbf{x}| = \|A\| |\mathbf{x}| \end{aligned}$$

der vi har brukt at

$$\sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{a}_m|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2} = \|A\|$$

■

Oppgaver

52. Regn ut AB og BA når

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

53. Regn ut AB når $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

54. Regn ut AB når $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

55. a) Hvilken dimensjon har produktmatrisen AB hvis A er en 8×6 -matrise og B er en 6×9 -matrise?
b) Hvilken dimensjon har matrisen B hvis A er en 4×3 -matrise og produktmatrisen AB er en 4×5 -matrise?
c) Hvor mange søyler har matrisen B hvis produktet AB er en 5×7 -matrise?

56. Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Regn ut følgende uttrykk hvis det er definert (hvis uttrykket ikke er definert, skal du begrunne hvorfor):

- a) AB b) AC c) $A(B+C)$ d) $(BC)^T$
e) $B^T C^T$ f) $(A+C^T)B$ g) $B(A^T - 2C)$

57. Gitt matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sjekk at $AB = AC$ selv om $B \neq C$. Sjekk også at $AD = 0$ selv om $A \neq 0$ og $D \neq 0$.

58. Gitt matrisene

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finn første rad i produktmatrisen DE . Finn deretter andre søyle i produktmatrisen DE .

59. a) Hvis første og andre søyle i matrisen B er like, hva kan du si om første og andre søyle i produktmatrisen AB (dersom AB er definert)?
 b) Hvis andre søyle i matrisen B bare består av nuller, hva kan du si om andre søyle i produktmatrisen AB ?

60. Finn normen $\|A\|$ til matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

61. Dersom A er en $n \times n$ -matrise (dvs. har like mange rader og søyler) definerer vi potensene A^n på vanlig måte: $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2$, $A^4 = AA^3$ osv. Regn ut A^2 og A^3 når $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

62. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Finn $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$.
 b) Regn ut $C = AB$.
 c) Regn ut både $A\mathbf{y}$ og $C\mathbf{x}$. Sammenlign resultatene.
63. I en barnehage kjører barna sanden frem og tilbake i trillebår mellom tre sandkasser A , B og C (og mister noe på veien!). Av den sanden som er i sandkasse A ved begynnelsen av dagen, vil 70 % være i A ved slutten av dagen, 15 % vil være i B , 10 % i C (og resten vil være mistet). Av den sanden som starter dagen i B , vil 75 % være i B ved slutten av dagen, 5 % vil være i A og 10 % i C . Av den sanden som startet i C , vil 70 % være i C ved slutten av dagen, 10 % vil være i A og 15 % i B .
- a) Finn en matrise M slik at hvis x , y , z er henholdsvis antall liter sand i A , B og C ved begynnelsen av dagen, og $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, så angir komponentene til $\mathbf{v} = M\mathbf{u}$ hvor mange liter sand det er i hver kasse ved slutten av dagen.
 b) Etter at barna har gått hjem, forsøker personalet å fordele sanden på nytt. De flytter 20 % av sanden i B til A og 5 % av sanden i C til B . Finn en matrise N slik at komponentene til $\mathbf{w} = N\mathbf{v}$ angir hvor mye sand det nå er i hver sandkasse.
 c) Regn ut $K = NM$. Anta at fordeling ved begynnelsen av dagen var $x = 200$, $y = 300$, $z = 400$. Finn fordelingen på slutten av dagen etter at personalet har omfordelt sanden.
 d) Hvor mye sand vil det være i hver kasse på slutten av neste dag dersom den forløper på tilsvarende måte?
64. Bevis punktene (ii), (iii) og (iv) i setning T2.1.26.

Identitetsmatriser og inverse matriser

I denne seksjonen skal vi bare arbeide med *kvadratiske* matriser, dvs. matriser med like mange rader som søyler. Matrisene vil altså være $n \times n$ -matriser for et helt tall n . En spesiell slik matrise er *identitetsmatrisen*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

som har 1-ere på diagonalen og 0-er overalt ellers. Ganger du I_n med en annen $n \times n$ -matrise A (gjør det!), ser du at

$$AI_n = A \quad \text{og} \quad I_n A = A$$

Uansett om vi multipliserer med I_n fra høyre eller venstre, får vi altså A tilbake. Blant tall er det bare 1 som har en tilsvarende egenskap; ganger vi et tall med 1, får vi tallet tilbake. Identitetsmatrisen I_n spiller derfor mye av den samme rollen for matrisemultiplikasjon som 1 gjør for vanlig multiplikasjon.

Et tall $a \neq 0$ har alltid et inverst tall a^{-1} . Dette tallet er definert ved at produktet av a og a^{-1} er lik 1, dvs. $aa^{-1} = 1$. Vi kan på tilsvarende måte definere inverse matriser:

T2.1.29 Definisjon Anta at A er en $n \times n$ -matrise. En $n \times n$ -matrise X kalles en *invers matrise* til A dersom

$$AX = XA = I_n$$

(siden matrisemultiplikasjon ikke er kommutativ, krever vi å få I_n som svar uansett hvilken side vi multipliserer fra).

Som allerede nevnt har alle tall bortsett fra 0 en invers. For matriser er det mer komplisert; det finnes mange matriser som ikke har invers! Vi skal komme tilbake til spørsmålet om når en matrise har en invers etter hvert, men foreløpig nøyer vi oss med å vise noe enklere — nemlig at ingen matrise har mer enn én invers.

T2.1.30 Setning En $n \times n$ -matrise har høyst én invers.

Bevis: Anta at både X og Y er inverser til A . Da har vi

$$X = I_n X = (YA)X = Y(AX) = YI_n = Y$$

Altså er de to inversene like. ■

Nå som vi vet at det finnes høyst én invers, kan vi være mer konkrete i språkbruken.

T2.1.31 Definisjon En $n \times n$ -matrise A kalles *inverterbar* dersom den har en invers, og den inverse matrisen betegnes med A^{-1} . En matrise som ikke er inverterbar, kalles *singulær*.

Selv om vi ikke skal utvikle noen teori for hvordan man finner inverse matriser på det nåværende tidspunkt, er det instruktivt å se på noen enkle eksempler.

T2.1.32 Eksempel Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi må finne en 2×2 -matrise $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ slik at $AX = I_2$ og $XA = I_2$. Siden

$$AX = \begin{pmatrix} 3x - z & 3y - u \\ x + 2z & y + 2u \end{pmatrix}$$

kan ligningen $AX = I_2$ skrives

$$\begin{pmatrix} 3x - z & 3y - u \\ x + 2z & y + 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss fire ligninger med fire ukjente

$$3x - z = 1$$

$$3y - u = 0$$

$$x + 2z = 0$$

$$y + 2u = 1$$

Dette ligningssystemet er lett å løse (legg merke til at vi har to ligninger som bare inneholder x og z , og to som bare inneholder y og u), og vi får $x = \frac{2}{7}$, $y = \frac{1}{7}$, $z = -\frac{1}{7}$ og $u = \frac{3}{7}$. Dette betyr at

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

tilfredsstiller ligningen $AX = I_2$. Vi må også sjekke at X tilfredsstiller det andre kravet til en invers matrise, nemlig at $XA = I_2$:

$$XA = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot 1 & \frac{2}{7} \cdot (-1) + \frac{1}{7} \cdot 2 \\ -\frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{3}{7} \cdot 1 & -\frac{1}{7} \cdot (-1) + \frac{3}{7} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dermed har vi vist at A er inverterbar og at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

■

BEMERKNING: Det kan virke som vi har flaks på slutten av eksemplet ovenfor når vi sjekker at $XA = I_2$ — vi har laget X slik at $AX = I_2$, men siden matrisemultiplikasjon ikke er kommutativ, er det ingen grunn til å tro at dette vil medføre at $XA = I_2$. Det viser seg imidlertid at det alltid er slik; dersom $n \times n$ -matrisen X er en *ensidig invers* til $n \times n$ -matrisen A (dvs. at vi enten har $AX = I_n$ eller $XA = I_n$), så er A inverterbar og $X = A^{-1}$. Det er imidlertid forbausende vanskelig å bevise dette, og vi må utsette det til en senere anledning.

La oss nå se på en matrise som *ikke* har en invers:

T2.1.33 Eksempel La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vi forsøker å finne en invers matrise

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

på samme måte som i forrige eksempel, nemlig ved å kreve at $AX = I_2$. Siden

$$AX = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2u \\ 2x + 4z & 2y + 4u \end{pmatrix}$$

gir dette ligningssystemet

$$x + 2z = 1$$

$$y + 2u = 0$$

$$2x + 4z = 0$$

$$2y + 4u = 1$$

Det er lett å se at dette ligningssystemet ikke har løsninger; ganger vi den første ligningen med 2, får vi $2x + 4z = 2$ som er i åpenbar strid med den tredje ligningen. ■

De to eksemplene ovenfor viser at det er en nær sammenheng mellom invertering av matriser og lineære ligningssystemer. Du vil lære mer om denne sammenheng når du tar et kurs i lineær algebra. Foreløpig nøyer vi oss med å se på noen enkle regneregler for inverse matriser:

T2.1.34 Setning Anta at A og B er inverterbare $n \times n$ -matriser. Da er

(i) sA inverterbar for alle tall $s \neq 0$, og $(sA)^{-1} = s^{-1}A^{-1}$

(ii) AB inverterbar, og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) A^T inverterbar, og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iv) A^{-1} er inverterbar og $(A^{-1})^{-1} = A$

Bevis: Vi konsentrerer oss om (ii), og overlater de (enkler!) (i), (iii) og (iv) til leserne. For å bevise (ii) må vi sjekke at

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n \quad \text{og} \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

Dette er en liten herjing i parentesflytting (husk setning T2.1.26(i)):

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Helt tilsvarende får vi:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}(AB)) = B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(I_n B) = B^{-1}B = I_n$$

■

BEMERKNING: Legg merke til at vi ikke har noen regler for de inverse til $A + B$ og $A - B$. Disse matrisene behøver ikke være inverterbare selv om A og B er det, og selv i de tilfellene hvor de er inverterbare, finnes det ikke noen enkel måte å finne den inverse på.

Dersom en matrise A er inverterbar, kan vi forkorte den bort i ligninger av typen $AX = AB$ og få $X = B$. Grunnen er at vi kan multiplisere fra venstre med A^{-1} på begge sider av ligningen:

$$AX = AB \implies A^{-1}(AX) = A^{-1}(AB) \\ \implies (A^{-1}A)X = (A^{-1}A)B \implies I_n X = I_n B \implies X = B$$

På tilsvarende måte kan vi forkorte med A i ligningen $XA = BA$ og få $X = B$ (i dette tilfellet må vi gange ligningen fra høyre med A^{-1}). Vi kan imidlertid *ikke* forkorte med A i ligningen $AX = BA$ — uansett om vi ganger med A^{-1} fra venstre eller høyre, vil det være en A vi ikke greier å forkorte bort.

I forrige seksjon tenkte vi på matriser som transformasjoner; når vi ganger en vektor \mathbf{x} med en matrise A , transformerer vi \mathbf{x} til en ny vektor $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Dersom A er inverterbar, kan vi gange den siste ligningen fra venstre med den inverse matrisen A^{-1} . Vi får da

$$A^{-1}\mathbf{y} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Dette viser at A^{-1} er den omvendte transformasjonen til A — hvis A transformerer \mathbf{x} til \mathbf{y} , vil A^{-1} transformere \mathbf{y} til \mathbf{x} . Denne ideen om A^{-1} som den omvendte transformasjonen til A er viktig når man bruker matriser i praksis.

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xleftarrow{A^{-1}} \end{array} \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

Siden det finnes mange transformasjoner vi ikke kan vende om på, gir dette bildet oss en bedre forståelse av hvorfor det finnes matriser som ikke er inverterbare. Hvis det f.eks. finnes to forskjellige vektorer \mathbf{x} og \mathbf{x}' som transformeres til den samme vektoren \mathbf{y} (dvs. vi har både $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ og $\mathbf{y} = A\mathbf{x}'$), så kan ikke transformasjonen vendes om; vi kan ikke starte med \mathbf{y} og transformere den til både \mathbf{x} og \mathbf{x}' !

Oppgaver

65. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Kontroller at $AI_2 = A$ og $I_2A = A$ ved å gjennomføre utregningene.

66. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Vis at $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ er den inverse matrisen til A ved å regne ut AB og BA .

67. Avgjør om følgende matriser er inverterbare eller singulære:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

68. En inverterbar matrise A har en invers matrise som er gitt ved $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finn matrisen A .
69. Gitt to inverterbare matriser A og B , hvor $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ og $B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Finn $(AB)^{-1}$.
70. a) La $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vis at $I_2 \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
- b) La $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vis at $I_3 \mathbf{b} = \mathbf{b}$.
- c) Vis at $I_n \mathbf{c} = \mathbf{c}$ for alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
71. a) Anta at $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ der $a, b \neq 0$. Vis at A er inverterbar og at $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$.
- b) Anta at $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ der $a, b, c \neq 0$. Vis at B er inverterbar og at

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}.$$

- c) Formuler et tilsvarende resultat for $n \times n$ -matriser.
72. Vis at dersom A og B er inverterbare, så er den inverse til $(AB)^T$ lik $(A^{-1})^T (B^{-1})^T$.
73. Bevis punktene (i), (iii) og (iv) i setning T2.1.34.
74. a) Vis at 2×2 -matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og at den inverse matrisen i så fall er gitt ved $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- b) Bruk formelen fra punkt a) til å finne den inverse til matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
- c) Bruk matrisen du fant i punkt b) til å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Hint: Systemet kan skrives $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

T2.2 Funksjoner fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m

I denne seksjonen skal vi studere funksjoner \mathbf{F} fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m . En slik funksjon er bare en regel som til hvert n -tupple $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tilordner et m -tupple $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Ofte er disse reglene gitt ved en formel, f.eks. kan en funksjon fra \mathbb{R}^4 til \mathbb{R}^3 være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z, u) = (2x^2z, xy^2z, ye^{x^2y+\sin y})$$

Gitt et 4-tupple $\mathbf{x} = (x, y, z, u)$ forteller denne formelen oss hvordan vi kan regne ut 3-tuplet $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Som du ser, veksler vi mellom skrivemåtene $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ og $\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

den første er ofte mest praktisk når vi snakker om en generell, uspesifisert funksjon, mens den siste som regel er greiest når vi snakker om en bestemt funksjon gitt ved en formel. Husk at $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ slik at teorien vår også dekker funksjoner $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der \mathbf{x} er en vektor, men $F(\mathbf{x})$ er et tall.

Vi husker at vanlige funksjoner $f(x)$ ikke alltid er definert for alle reelle tall x , og på samme måte vil heller ikke disse nye funksjonene $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ nødvendigvis være definert for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Den mengden $A \subset \mathbb{R}^n$ av vektorer \mathbf{x} som $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ er definert for, kaller vi *definisjonsmengden* eller *definisjonsområdet* til \mathbf{F} . Vi skal av og til bruke symbolet $D_{\mathbf{F}}$ for definisjonsområdet til \mathbf{F} . Når vi skriver

$$\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mener vi at \mathbf{F} er en funksjon definert på mengden A med verdier i \mathbb{R}^m . Hvis en funksjon er gitt ved en formel, og definisjonsområdet ikke er spesifisert, regner vi med at funksjonen er definert overalt hvor formelen gir mening.

En funksjon definert på en delmengde av \mathbb{R}^n kaller vi en funksjon av n -variable; f.eks. er

$$\mathbf{G}(x, y) = (x^y, \ln(1 - xy), \sin(x^2y))$$

en funksjon av to variable med verdier i \mathbb{R}^3 , mens

$$g(x, y, z) = x^2 + ye^{z+y^2}$$

er en funksjon av tre variable med verdier i \mathbb{R} (når funksjonene tar verdier i \mathbb{R} skriver vi dem gjerne uten fete typer og ofte med små bokstaver).

En funksjon som tar verdier i \mathbb{R} kalles gjerne et *skalarfelt* når vi vil understreke at verdiene er tall og ikke vektorer. Legg merke til at en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kan skrives

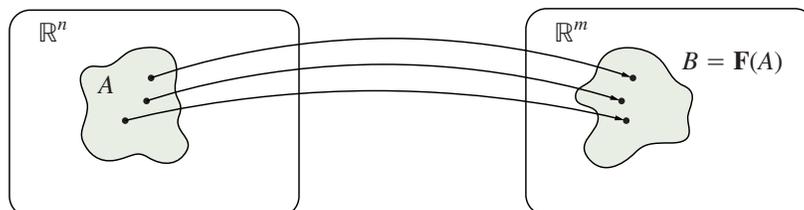
$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

der F_1, \dots, F_m er skalarfelt. Vi kaller F_1, \dots, F_m for *komponentene* til \mathbf{F} . Funksjonen \mathbf{G} ovenfor har altså komponentene.

$$G_1(x, y) = x^y, \quad G_2(x, y) = \ln(1 - xy), \quad G_3(x, y) = \sin(x^2y)$$

Vi skal ofte gjøre bruk av at funksjoner med verdier i \mathbb{R}^m er bygget opp av skalarfelt på denne måten, for eksempel ved at vi først innfører begreper og beviser resultater for skalarfelt og så utvider til funksjoner med verdier i \mathbb{R}^m .

Generelt er det ikke mulig å gi realistiske grafiske fremstillinger av funksjoner fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m . Noen ganger kan vi imidlertid ha stor glede av mer stiliserte fremstillinger som på figuren nedenfor. Den illustrerer hvordan en funksjon \mathbf{F} fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m sender alle punkter i en mengde $A \subset \mathbb{R}^n$ på en mengde $B \subset \mathbb{R}^m$. Mengden B kalles *bildet av A under F* og betegnes ofte med $B = \mathbf{F}(A)$.



Figur T2.2.1 Funksjon fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m

Funksjoner av flere variable dukker naturlig opp i mange sammenhenger. Her er et lite utvalg:

- BMI (body mass index) brukes ofte som en indikator på overvekt og undervekt. For å finne din BMI, tar du vekten din v (målt i kilo) og deler på kvadratet av høyden din h (målt i meter). Vi kan tenke på BMI som en funksjon f av to variable med verdier i \mathbb{R} :

$$f(v, h) = \frac{v}{h^2}$$

- Når en gjenstand varmes opp, vil temperaturen avhenge av når og hvor vi måler. Det er naturlig å angi temperaturen i punktet (x, y, z) ved tiden t som $T(x, y, z, t)$. Dette er en funksjon av fire variable med verdier i \mathbb{R} .
- Gravitasjonskraften fra jorden på en gjenstand i verdensrommet avhenger av posisjonen til gjenstanden. Tenker vi på kraften som en vektor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (vi er interessert i både størrelse og retning) som er avhengig av posisjonen $\mathbf{x} = (x, y, z)$, får vi en funksjon av tre variable med verdier i \mathbb{R}^3 . Dersom vi plasserer jorden i origo, kan \mathbf{F} i dette tilfellet skrives

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\gamma \frac{Mm}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

der γ er en naturkonstant (gravitasjonskonstanten), M er massen til jorden og m massen til gjenstanden.

- Meteorologer arbeider med vind i atmosfæren. Vinden i et punkt med koordinater (x, y, z) vil være en vektor $\mathbf{v}(x, y, z)$ (vi er interessert i både vindstyrken og retningen). Vi kan tenke på dette som en funksjon av tre variable med verdier i \mathbb{R}^3 .
- I eksempel T2.1.19 så vi på fire produsenter som leverte epler av tre ulike kvaliteter til en fruktpresse. Dersom produsentene leverte hhv. x , y , z og u tonn epler, kunne vi regne ut hvor mange tonn vi ville få av hver kvalitet. Dette gir oss en funksjon av fire variable med verdier i \mathbb{R}^3 . Vi kan skrive funksjonen som $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, eller med koordinater

$$\mathbf{F}(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} 0.5x + 0.3y + 0.25z + 0.2u \\ 0.3x + 0.4y + 0.4z + 0.6u \\ 0.2x + 0.3y + 0.35z + 0.2u \end{pmatrix}$$

Litt topologi i \mathbb{R}^n

Når vi arbeider med funksjoner av én variabel, vil definisjonsområdet som regel være et intervall eller en enkel sammensetning av intervaller. For funksjoner av flere variable finnes det mange flere muligheter for hvordan definisjonsområdet kan være, og vi må derfor være litt mer formelle i vår omgang med mengder. I denne seksjonen skal vi innføre *åpne* og *lukkede* mengder. Disse mengdene spiller på mange måter den samme rollen i flervariabelteori som åpne og lukkede intervaller spiller i teorien for funksjoner av en variabel.

Akkurat som i planet og rommet lar vi *avstanden* mellom to punkter \mathbf{a} og \mathbf{x} i \mathbb{R}^n være lik lengden til vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ som forbinder dem, det vil si

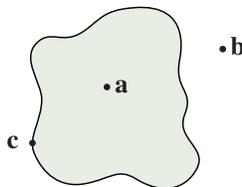
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

(tenk deg at d står for *distance*). Mengden

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

består av de punktene i \mathbb{R}^n som har avstand mindre enn r til punktet \mathbf{a} . Vi kaller $B(\mathbf{a}, r)$ *kulen om \mathbf{a} med radius r* . Legg merke til at i \mathbb{R}^3 er dette virkelig en (åpen) kule i tradisjonell forstand, mens det i \mathbb{R}^2 er en (åpen) sirkelskive og i \mathbb{R} et åpent intervall. Vi velger å bruke «kule» som et fellesord i alle dimensjoner, selv om det til å begynne med kan virke litt uvant når vi arbeider i planet eller på tallinjen. De fleste illustrasjonene våre vil være i planet, og der vil kuler fremstå som sirkler.

Figur T2.2.2 viser en mengde i planet (området innenfor kurven) og tre punkter \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} .



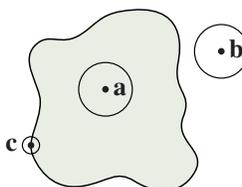
Figur T2.2.2

De tre punktene ligger på forskjellig måte i forhold til mengden — \mathbf{a} ligger klart på innsiden av mengden, \mathbf{b} ligger klart på utsiden, mens \mathbf{c} ligger på grensen mellom mengden og omgivelsene. Vi kaller \mathbf{a} et *indre punkt*, \mathbf{b} et *ytre punkt* og \mathbf{c} et *randpunkt* for mengden. I høyere dimensjoner kan vi ikke støtte oss på figurer, og vi trenger derfor en mer formell definisjon av indre punkter, ytre punkter og randpunkter:

T2.2.1 Definisjon La A være en delmengde av \mathbb{R}^n .

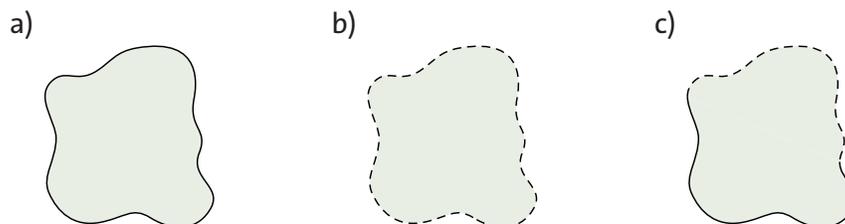
- (i) Et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et *indre punkt* for A dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, r)$ om \mathbf{a} som bare inneholder punkter som er med i A .
- (ii) Et punkt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ kalles et *ytre punkt* for A dersom det finnes en kule $B(\mathbf{b}, r)$ om \mathbf{b} som ikke inneholder noen punkter som er med i A .
- (iii) Et punkt $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ kalles et *randpunkt* for A dersom enhver kule $B(\mathbf{c}, r)$ om \mathbf{c} inneholder både punkter som er med i A og punkter som ikke er med i A .

Legg merke til at de tre delene av definisjonen uttømmer alle muligheter, så et punkt i \mathbb{R}^n må enten være et indre punkt, et ytre punkt eller et randpunkt for A . I figur T2.2.3 har vi illustrert definisjonen ved å legge «kuler» (dvs. sirkler) rundt punktene \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} .



Figur T2.2.3

Et indre punkt hører alltid med til mengden A , mens et ytre punkt aldri hører med til mengden. For randpunkter er det ingen generell regel; de vil noen ganger høre med til mengden og andre ganger ikke. Figur T2.2.4 viser dette for tre mengder i planet. I punkt a) er randen tegnet med en hel strek — det markerer at alle punktene på randen hører med til mengden A . En slik mengde kalles *lukket*. I punkt b) er randen stiplet — det markerer at ingen av punktene på randen hører med til mengden B . En slik mengde kalles *åpen*. I punkt c) er noe av randen heltrukket og resten stiplet — det markerer at noen av punktene på randen hører med til mengden C , mens andre ikke gjør det. En slik mengde er hverken åpen eller lukket (på figuren har vi kalt den «halvåpen», men det er ingen offisiell betegnelse).



Figur T2.2.4 Lukket, åpen og «halvåpen» mengde

La oss skrive opp definisjonen av åpne og lukkede mengder litt mer formelt:

T2.2.2 Definisjon En mengde $A \subset \mathbb{R}^n$ er *lukket* dersom den inneholder alle sine randpunkter, og *åpen* dersom den ikke inneholder noen randpunkter.

Åpne og lukkede mengder spiller omtrent samme rolle i teorien for funksjoner av flere variable som åpne og lukkede intervaller gjør i teorien for funksjoner av en variabel. Det er imidlertid en viktig forskjell — åpne og lukkede mengder kan ha mange forskjellige former, og det gjør at flervariabelteorien har en del geometriske komplikasjoner som envariabelteorien ikke har.

Følger i \mathbb{R}^n

Vi skal avslutte denne seksjonen med å se litt på konvergens av følger. En *følge* i \mathbb{R}^n er bare en uendelig sekvens

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$$

av elementer $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Akkurat som for tallfølger, bruker vi $\{\mathbf{x}_k\}$ som en kortfattet skrivemåte for disse følgene. Vi tillater at følgen starter med andre indekser enn 1, f.eks.

$$\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$$

eller

$$\mathbf{x}_{-3}, \mathbf{x}_{-2}, \mathbf{x}_{-1}, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$$

Dersom det er viktig å vite hvor følgen starter, kan vi markere det i den kortfattede skrivemåten ved å skrive $\{\mathbf{x}_k\}_{k=3}^{\infty}$ og $\{\mathbf{x}_k\}_{k=-3}^{\infty}$ for de to følgene ovenfor.

En følge $\{\mathbf{x}_k\}$ i \mathbb{R}^n nærmer seg punktet \mathbf{a} som grenseverdi dersom vi kan få avstanden mellom \mathbf{x}_k og \mathbf{a} så liten vi måtte ønske ved å velge k tilstrekkelig stor. Vi kan

formulere dette på akkurat samme måte som i det en-dimensjonale tilfellet (sammenlign med definisjon 4.3.1 i *Kalkulus*):

T2.2.3 Definisjon Følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ i \mathbb{R}^n konvergerer mot punktet $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon$ for alle $k \geq K$. Vi skriver

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$$

Vi har akkurat de samme regnereglene som for tallfølger:

T2.2.4 Setning Anta at $\{\mathbf{x}_k\}$ og $\{\mathbf{y}_k\}$ er to følger i \mathbb{R}^n som konvergerer mot henholdsvis \mathbf{x} og \mathbf{y} . Da har vi:

- (i) Følgen $\{c \mathbf{x}_k\}$ konvergerer for ethvert tall c , og $\lim_{k \rightarrow \infty} (c \mathbf{x}_k) = c \mathbf{x}$
- (ii) Følgen $\{\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k\}$ konvergerer, og $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$
- (iii) Følgen $\{\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\}$ konvergerer, og $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$
- (iv) Følgen $\{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k\}$ konvergerer, og $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (legg merke til at dette er en *tallfølge* og ikke en følge av vektorer).

Bevis: Bevisene er nesten identiske med de tilsvarende bevisene for tallfølger (se 4.3.3 i *Kalkulus*), den eneste forskjellen er at vi nå må bruke Schwarz' ulikhet og trekantulikheten for vektorer istedenfor de tilsvarende ulikhetene for tall. For å illustrere bruken av disse ulikhetene, tar vi med bevisene for (ii) og (iv).

(ii) Vi må vise at gitt en $\varepsilon > 0$, kan vi alltid finne en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k)| < \varepsilon$ for alle $k \geq K$. Det første vi gjør er å omgruppere leddene slik at vi kan behandle $\{\mathbf{x}_k\}$ og $\{\mathbf{y}_k\}$ hver for seg:

$$|(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k)| = |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_k)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| + |\mathbf{y} - \mathbf{y}_k|$$

der vi i det siste skrittet har brukt trekantulikheten (setning T2.1.10). Siden $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, må det finnes en $K_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle $k \geq K_1$, og siden $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$, må det finnes en $K_2 \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle $k \geq K_2$. Velger vi K lik det største av tallene K_1, K_2 , ser vi at når $k \geq K$, er

$$|(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| + |\mathbf{y} - \mathbf{y}_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dermed er (ii) bevist.

(iv) Vi må vise at gitt en $\varepsilon > 0$, kan vi alltid finne en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k| < \varepsilon$ for alle $k \geq K$. Vi bruker først trikset med å legge til og trekke fra leddet $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_k$ og benytter deretter trekantulikheten og Schwarz' ulikhet (setning T2.1.8):

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k| &= |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_k + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k| \\ &\leq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_k| + |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k| \\ &\leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y} - \mathbf{y}_k| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| |\mathbf{y}_k| \end{aligned}$$

Vi skal nå vise at vi kan få hvert av de to leddene $|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \mathbf{y}_k|$ og $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||\mathbf{y}_k|$ mindre enn $\frac{\varepsilon}{2}$ ved å velge k stor nok. Det første er opplagt mindre enn $\frac{\varepsilon}{2}$ hvis $|\mathbf{x}| = 0$, så vi kan konsentrere oss om tilfellet $\mathbf{x} \neq 0$. Siden $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$, må det finnes en $K_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k| < \frac{\varepsilon}{2|\mathbf{x}|}$ for alle $k \geq K_1$. Dermed er $|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \mathbf{y}_k| < |\mathbf{x}| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\mathbf{x}|} = \frac{\varepsilon}{2}$ når $k \geq K_1$.

Det andre leddet $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||\mathbf{y}_k|$ er litt verre. Vi observerer først at siden $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$, finnes det et tall K_2 slik at $|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}| < 1$ når $k \geq K_2$. Dermed er

$$|\mathbf{y}_k| = |\mathbf{y} + (\mathbf{y}_k - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}_k - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{y}| + 1$$

Siden $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, må det finnes en $K_3 \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2(|\mathbf{y}|+1)}$ for alle $k \geq K_3$. Hvis k er større enn eller lik både K_2 og K_3 , er dermed

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||\mathbf{y}_k| < \frac{\varepsilon}{2(|\mathbf{y}|+1)} \cdot (|\mathbf{y}|+1) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Velger vi nå K til å være det største av tallene K_1, K_2, K_3 , ser vi at for $k \geq K$ er

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y} - \mathbf{y}_k| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||\mathbf{y}_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dermed er (iv) bevist. ■

Vi tok med bevisene ovenfor for å demonstrere hvordan trekantulikheten og Schwarz' ulikhet ofte brukes. Det viser seg at vi kan bevise disse resultatene vel så enkelt ved å føre dem tilbake til tilsvarende resultater for tallfølger. Det neste resultatet vil gi oss det redskapet vi trenger. Litt notasjon før vi begynner: Dersom $\{\mathbf{x}_k\}$ er en følge i \mathbb{R}^n , skriver vi koordinatene til \mathbf{x}_k slik:

$$\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

Vi skriver indeksen k oppe for ikke å blande den sammen med koordinatene til \mathbf{x}_k , og vi putter den inn i en parentes for å gjøre det klart at den ikke er en eksponent.

T2.2.5 Setning Anta at $\{\mathbf{x}_k\}$ er en følge i \mathbb{R}^n med komponenter

$$\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

og at $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ har komponenter $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Da er

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$$

hvis og bare hvis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{for alle } i = 1, 2, \dots, n$$

Med andre ord: $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergerer mot \mathbf{x} hvis og bare hvis hver komponent i \mathbf{x}_k konvergerer mot tilsvarende komponent i \mathbf{x} .

Dersom du synes det er vanskelig å forstå hva setning sier, er det lurt å ta en kikk på eksemplet nedenfor før du går videre.

Bevis: Anta først at $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Vi skal vise at $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$. Det betyr at gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det alltid finnes en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ for alle $k \geq K$. Siden $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, finnes det en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| < \varepsilon$ når $k \geq K$. Siden

$$\begin{aligned} |x_i^{(k)} - x_i| &= \sqrt{(x_i^{(k)} - x_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1)^2 + \dots + (x_i^{(k)} - x_i)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - x_n)^2} \\ &= |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| \end{aligned}$$

medfører dette at $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ for alle $k \geq K$, og det er akkurat det vi skulle vise.

Anta så at $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Vi skal vise at $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Det betyr at gitt en $\varepsilon > 0$, må vi produsere en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| < \varepsilon$ når $k \geq K$. Siden $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$, finnes det for hver i en $K_i \in \mathbb{N}$ slik at $|x_i^{(k)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ når $k \geq K_i$. La K være den største av K_1, K_2, \dots, K_n . For $k \geq K$ er da

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| &= \sqrt{(x_1^{(k)} - x_1)^2 + \dots + (x_i^{(k)} - x_i)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - x_n)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &= \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

T2.2.6 Eksempel Finn grenseverdien

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{k^2}{k^2+1} \\ k \sin\left(\frac{1}{k}\right) \\ \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k \end{pmatrix}$$

Ifølge setningen ovenfor behøver vi bare å regne ut grensen til hver komponent. Den første er enkel:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^2+1} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{2k} = 1$$

Den andre går også greit:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{k}\right) \left(-\frac{1}{k^2}\right)}{\left(-\frac{1}{k^2}\right)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{k}\right) = 1$$

Den tredje skriver vi først om:

$$\left(1 + \frac{2}{k}\right)^k = e^{k \log\left(1 + \frac{2}{k}\right)}$$

og bruker deretter L'Hôpitals regel på eksponenten:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \log \left(1 + \frac{2}{k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{2}{k} \right)}{\frac{1}{k}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(1+\frac{2}{k})} \cdot \left(-\frac{2}{k^2} \right)}{-\frac{1}{k^2}} = 2$$

Altså er

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{k} \right)^k = e^2$$

Kombinerer vi alt dette, får vi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{k^2}{k^2+1} \\ k \sin \left(\frac{1}{k} \right) \\ \left(1 + \frac{2}{k} \right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ e^2 \end{pmatrix}$$

■

Det neste resultatet gir et nytt innblikk i hvorfor lukkede mengder kalles «lukkede»:

T2.2.7 Setting Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ er lukket, og at $\{\mathbf{x}_k\}$ er en følge fra A som konvergerer mot et punkt \mathbf{x} . Da er $\mathbf{x} \in A$.

Bevis: Anta for motsigelse at $\mathbf{x} \notin A$. Siden A er lukket, må \mathbf{x} da være et ytre punkt (alle randpunktene hører jo med til A når A er lukket). Det betyr at det finnes en kule $B(\mathbf{x}, r)$ om \mathbf{x} som ikke inneholder noe punkt fra A . Spesielt kan ingen av leddene i følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ ligge i $B(\mathbf{x}, r)$. Det betyr at $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}| \geq r$ for alle k , og følgelig kan ikke $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergere mot \mathbf{x} . Dette gir oss den selvmotsigelsen vi er på jakt etter. ■

Vi avslutter denne seksjonen med et eksempel som antyder hvordan grenseverdier til følger dukker opp i mer virkelighetsnære problemstillinger.

T2.2.8 Eksempel I eksempel T2.1.20 så vi på fordelingen av handlevogner i tre stativer. Dersom fordelingen om morgenen er gitt ved en vektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

vil fordelingen om kvelden være gitt ved vektoren $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$ der A er matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Dersom vi ikke rører handlevognene i løpet av natten, vil vi starte neste morgen med fordelingen \mathbf{x}_1 , og fordelingen neste kveld blir $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$. Lar vi denne stå urørt til morgenen etter, vil vi neste kveld ha fordelingen $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2$ osv. På denne måten får vi en følge av fordelinger $\{\mathbf{x}_k\}$. Dersom du faktisk regner ut disse vektorene, vil du

raskt få en mistanke om at de konvergerer mot en likevektstilstand \mathbf{b} , dvs. en fordeling som er den samme om kvelden som om morgenen. Legg også merke til at $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\mathbf{x}_0$ osv., slik at $x_k = A^k\mathbf{x}_0$. Følger som oppstår ved *iterasjon* (gjentakelse) på denne måten er viktige i mange anvendelser. Vi skal møte dem igjen senere. ■

Oppgaver

1. Finn definisjonsområdet til funksjonen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 4y^2} & \text{b) } f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2} & \text{c) } f(x, y) = \ln(x + y) \\ \text{d) } f(x, y) = \tan(x - y) & \text{e) } f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 25} & \end{array}$$

2. Avgjør om mengden er åpen eller lukket eller ingen av delene. Lag en figur og argumenter uformelt.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ og } |y| \leq 1\} & \text{b) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ og } |y| < 1\} \\ \text{c) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ og } |y| < 1\} & \text{d) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\} \\ \text{e) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y < 1\} & \text{f) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 1\} \\ \text{g) } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ og } y \text{ er rasjonale}\} & \text{h) } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \\ \text{i) } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\} & \end{array}$$

3. Finn grensen til følgene $\{\mathbf{x}_k\}$ når:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{x}_k = \left(\frac{2k^2 + 1}{k^2 + 3k}, \frac{3k}{1 - 2k} \right) & \text{b) } \mathbf{x}_k = \left(k \sin \frac{1}{k}, k(1 - e^{2/k}) \right) \\ \text{c) } \mathbf{x}_k = \left(\sqrt{k^2 + 2k} - k, \cos \frac{1}{k}, \left(\cos \frac{1}{k} \right)^{k^2} \right) & \end{array}$$

4. Bruk setning T2.2.5 og grensesetningen for «vanlige» følger (dvs. følger med verdier i \mathbb{R}) til å bevise setning T2.2.4.

5. I denne oppgaven skal vi se litt på egenskapene til de åpne mengdene.

- a) Anta at $A, B \subset \mathbb{R}^n$ er åpne mengder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er åpne mengder. (Husk at $A \cup B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ er med i minst én av mengdene } A \text{ og } B\}$ og $A \cap B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ er med i begge mengdene } A \text{ og } B\}$)
- b) Hvis $A \subset \mathbb{R}^n$, så kalles mengden

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$$

komplementet til A . Vis at A og A^c har samme rand.

- c) Vis at en mengde $A \subset \mathbb{R}^n$ er åpen hvis og bare hvis komplementet A^c er lukket.

6. I denne oppgaven skal vi se litt på egenskapene til de lukkede mengdene. Det er lurt å gjøre oppgaven ovenfor før du begynner på denne.

- a) Anta at $A, B \subset \mathbb{R}^n$ er lukkede mengder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er lukkede mengder.
- b) Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ er lukket og at $B \subset \mathbb{R}^n$ er åpen. Vis at

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

er lukket.

- c) Vis at $A \subset \mathbb{R}^n$ er lukket hvis og bare hvis $A = \bar{A}$, der *tillukningen* \bar{A} består av alle punkter som er med i enten A eller randen til A (dvs. $\bar{A} = A \cup \partial A$ der ∂A er randen til A).

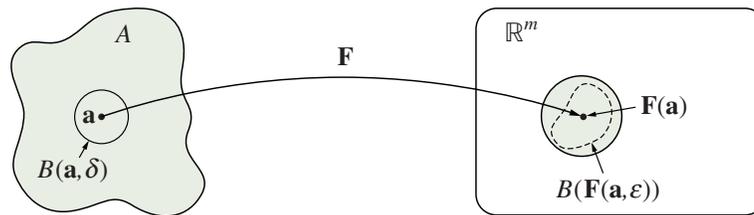
Kontinuerlige funksjoner

I seksjon 5.1 i *Kalkulus* studerte vi ε - δ -definisjonen av kontinuitet. Denne definisjonen er sannsynligvis ikke like populær blant alle, men den har mange fordeler, blant annet at den lett kan generaliseres til nye situasjoner. Her er generaliseringen til funksjoner av flere variable:

T2.2.9 Definisjon Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{a} \in A$. En funksjon $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er *kontinuerlig* i \mathbf{a} dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon \text{ for alle } \mathbf{x} \in A \text{ slik at } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$

Figuren nedenfor illustrerer definisjonen: Gitt en kule $B(\mathbf{F}(\mathbf{a}), \varepsilon)$ om punktet $\mathbf{F}(\mathbf{a})$, kan vi finne en kule $B(\mathbf{a}, \delta)$ om punktet \mathbf{a} slik at bildet av $B(\mathbf{a}, \delta)$ (markert med den stiplede kurven på figuren) ligger helt inni $B(\mathbf{F}(\mathbf{a}), \varepsilon)$.



Figur T2.2.5 Kontinuitet i punktet \mathbf{a}

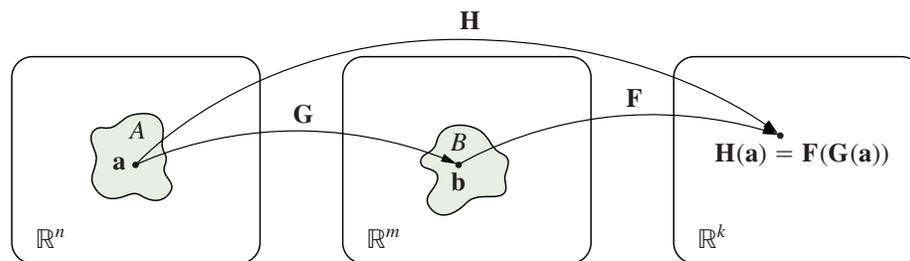
Siden kontinuitet er definert på akkurat samme måte som for funksjoner av én variabel, har vi de samme reglene med (nesten) de samme bevisene.

T2.2.10 Setning Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$, og at funksjonene $\mathbf{F}, \mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuerlige i $\mathbf{a} \in A$. Da er $\mathbf{F} + \mathbf{G}$, $\mathbf{F} - \mathbf{G}$ og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ kontinuerlige i \mathbf{a} . Det er også $\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{G}}$ forutsatt at \mathbf{F} og \mathbf{G} tar verdier i \mathbb{R} (slik at divisjon gir mening) og $\mathbf{G}(\mathbf{a}) \neq 0$.

Beviset overlates til leserne, se setning 5.1.5 i *Kalkulus* for hjelp.

T2.2.11 Setning Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, og to funksjoner $\mathbf{G} : A \rightarrow B$, $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ (se figuren nedenfor). Dersom \mathbf{G} er kontinuerlig i punktet \mathbf{a} , og \mathbf{F} er kontinuerlig i punktet $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a})$, så er den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(x) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(x))$ kontinuerlig i \mathbf{a} .

Beviset overlates til leserne, se setning 5.1.7 i *Kalkulus* for hjelp. Figuren nedenfor viser hvordan \mathbf{G} , \mathbf{F} og \mathbf{H} virker.



Figur T2.2.6

Når vi skal bruke reglene ovenfor til å vise at en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig, lønner det seg ofte å skrive den på komponentform:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))$$

Det neste resultatet forteller oss nemlig at \mathbf{F} er kontinuerlig hvis og bare hvis hver komponent F_i er kontinuerlig.

T2.2.12 Setning Anta at $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable med komponenter

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))$$

Da er \mathbf{F} kontinuerlig i et punkt $\mathbf{a} \in A$ hvis og bare hvis hver komponent F_i er kontinuerlig i \mathbf{a} .

Bevis: Denne setningen er tvillingbroren til setning T2.2.5 (som sier at en følge konvergerer hvis og bare hvis komponentene konvergerer), og beviset er også ganske likt. La oss først anta at alle komponentene F_1, F_2, \dots, F_m er kontinuerlige i \mathbf{a} . Vi må vise at for enhver $\varepsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at hvis $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$, så er $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon$. Siden hver komponent F_i er kontinuerlig i \mathbf{a} , finnes det en $\delta_i > 0$ slik at $|F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{a})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ når $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta_i$. Vi velger δ til å være det minste av tallene $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$. Hvis $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$, har vi da

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| &= \sqrt{(F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{a}))^2 + \dots + (F_m(\mathbf{x}) - F_m(\mathbf{a}))^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \sqrt{m \left(\frac{\varepsilon^2}{m}\right)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dette viser at \mathbf{F} er kontinuerlig i \mathbf{a} .

Anta nå omvendt at \mathbf{F} er kontinuerlig i \mathbf{a} , og at vi skal vise at komponenten F_i er kontinuerlig i \mathbf{a} . Gitt $\varepsilon > 0$, må vi finne en $\delta > 0$ slik at $|F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{a})| < \varepsilon$ når $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$. Siden \mathbf{F} er kontinuerlig i \mathbf{a} , finnes det en $\delta > 0$ slik at $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon$ når $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$. Men dermed er

$$|F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{a})| \leq \sqrt{(F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{a}))^2 + \dots + (F_m(\mathbf{x}) - F_m(\mathbf{a}))^2} = |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

når $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$. Dette viser at F_i er kontinuerlig i \mathbf{a} . ■

De enkleste funksjonene av flere variable (bortsett fra konstantfunksjonene) er de som bare gir oss en av variablene som output, f.eks.

$$f(x, y, z, u) = y \quad \text{eller} \quad g(x, y, z) = z$$

Generelt kaller vi

$$k_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

den i -te *koordinatfunksjonen*. Det er lett å se at disse koordinatfunksjonene er kontinuerlige, og det neste eksemplet forteller oss hvordan vi kan bruke dem og resultatene ovenfor til å vise at mer kompliserte funksjoner er kontinuerlige.

T2.2.13 Eksempel Vis at funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2 \sin(yz), \frac{e^{x^2+z}}{y^2+1} \right)$$

er kontinuerlig i punktet $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$. Ifølge setning T2.2.12 er det nok å vise at begge funksjonene

$$F_1(x, y, z) = x^2 \sin(yz) \quad \text{og} \quad F_2(x, y, z) = \frac{e^{x^2+z}}{y^2+1}$$

er kontinuerlig i \mathbf{a} . Vi begynner med $F_1(x, y, z)$. Siden koordinatfunksjonene $k_2(x, y, z) = y$ og $k_3(x, y, z) = z$ er kontinuerlige, er produktet av dem $f(x, y, z) = yz$ også kontinuerlig ifølge setning T2.2.10. Siden sinus er en kontinuerlig funksjon, må den sammensatte funksjonen $\sin(yz)$ også være kontinuerlig ifølge setning T2.2.11. På tilsvarende måte ser vi at funksjonen $g(x, y, z) = x^2$ er kontinuerlig (fordi den er lik $k_1(x, y, z) \cdot k_1(x, y, z)$ som er et produkt av to kontinuerlige funksjoner), og dermed er produktet $F_1(x, y, z) = x^2 \sin(yz)$ kontinuerlig.

Vi behandler F_2 på samme måte: Funksjonen $h(x, y, z) = x^2 + z$ er kontinuerlig siden den er bygget opp fra kontinuerlige koordinatfunksjoner ved hjelp av multiplikasjon og addisjon. Siden eksponentialfunksjonen er kontinuerlig, er da $p(x, y, z) = e^{x^2+z}$ kontinuerlig. Ved et tilsvarende resonnement ser vi at nevneren $y^2 + 1$ er kontinuerlig, og siden den er forskjellig fra 0, må brøken

$$F_2(x, y, z) = \frac{e^{x^2+z}}{y^2+1}$$

være kontinuerlig. ■

Ved hjelp av teknikken i dette eksemplet er det lett å vise at funksjoner bygget opp ved hjelp av potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner, logaritmer, trigonometriske funksjoner og arcusfunksjoner er kontinuerlige (men husk å sjekke at de er definert i punktet du er interessert i!)

Vi tar med enda et resultat som er kjent fra teorien for funksjoner av en variabel (se *Kalkulus*, setning 5.1.10).

T2.2.14 Setning Anta at $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av flere variable, og at \mathbf{a} er et punkt i definisjonsområdet A til \mathbf{F} . Da er \mathbf{F} kontinuerlig i \mathbf{a} hvis og bare hvis $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{a})$ for *alle* følger $\{\mathbf{x}_k\}$ fra A slik at $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$.

Bevis: Anta først at \mathbf{F} er kontinuertlig i \mathbf{a} . Gitt en følge $\{\mathbf{x}_k\}$ med verdier i A , må vi vise at det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon$ for alle $k \geq K$. Siden \mathbf{F} er kontinuertlig i \mathbf{a} , finnes det en $\delta > 0$ slik at $|\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon$ for alle $\mathbf{y} \in A$ slik at $|\mathbf{y} - \mathbf{a}| < \delta$. Siden $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$, finnes det en $K \in \mathbb{N}$ slik at $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \delta$ når $k \geq K$. Men dette betyr at når $k \geq K$, så er $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \delta$ og følgelig $|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

Anta så at \mathbf{F} ikke er kontinuertlig i \mathbf{a} . Vi må vise at det finnes i hvert fall én følge $\{\mathbf{x}_k\}$ fra A slik at $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$, men $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \not\rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{a})$. Siden \mathbf{F} ikke er kontinuertlig i \mathbf{a} , må det finnes en $\varepsilon > 0$ slik at uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$, så eksisterer det en $\mathbf{x} \in A$ slik at $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$, men $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| \geq \varepsilon$. Velger vi $\delta = \frac{1}{k}$, finner vi på denne måten et punkt $\mathbf{x}_k \in A$ slik at $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \frac{1}{k}$, men $|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| \geq \varepsilon$. Følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergerer mot \mathbf{a} , men $\{\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\}$ kan ikke konvergere mot $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ siden $|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| \geq \varepsilon$ for alle k . ■

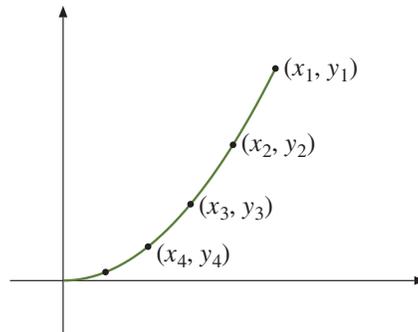
Hittil har teorien for kontinuertlige funksjoner av flere variable vært forbløffende lik teorien for kontinuertlige funksjoner av én variabel. På grunn av den rikere geometrien finnes det imidlertid fenomener for flervariabelte funksjoner som ikke har noen motsvarighet for funksjoner av en variabel. Her er et eksempel.

T2.2.15 Eksempel Funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vi skal undersøke om f er kontinuertlig i $(0, 0)$. La oss ta utgangspunkt i setning T2.2.14 og se hva som skjer når forskjellige typer følger $\{(x_k, y_k)\}$ nærmer seg $(0, 0)$. Hvis følgen nærmer seg $(0, 0)$ langs x -aksen, er leddene på formen $(x_k, 0)$ der $x_k \rightarrow 0$. Setter vi inn i funksjonsuttrykket, får vi

$$f(x_k, y_k) = f(x_k, 0) = \frac{x_k^2 \cdot 0}{x_k^4 + 0^2} = 0$$



Figur T2.2.7 En følge som konvergerer mot $(0, 0)$ langs parabelen $y = x^2$

Akkurat det samme skjer om vi lar $\{(x_k, y_k)\}$ nærme seg $(0, 0)$ langs y -aksen. Lar vi $\{(x_k, y_k)\}$ nærme seg $(0, 0)$ langs en skrålinje $y = cx$ der $c \neq 0$, får vi en følge $\{(x_k, cx_k)\}$ der x_k går mot 0. Setter vi inn i funksjonsuttrykket, får vi

$$f(x_k, y_k) = f(x_k, cx_k) = \frac{x_k^2 (cx_k)}{x_k^4 + c^2 x_k^2} = \frac{cx_k}{x_k^2 + c} \rightarrow \frac{0}{c} = 0$$

Alt dette tyder på at f er kontinuertlig i $(0, 0)$, men det finnes jo andre måter å nærme seg et punkt på enn å følge en rett linje. La oss prøve å nærme oss $(0, 0)$ langs parabellen $y = x^2$ (se figur T2.2.7). Vi ser altså på en følge $\{(x_k, x_k^2)\}$ der x_k går mot 0.

Setter vi inn i funksjonsuttrykket, får vi

$$f(x_k, y_k) = f(x_k, x_k^2) = \frac{x_k^2 \cdot x_k^2}{x_k^4 + (x_k^2)^2} = \frac{1}{2}$$

Ifølge setning T2.2.14 viser dette at f ikke er kontinuertlig i $(0, 0)$ — vi har funnet en følge $\{(x_k, y_k)\}$ som konvergerer mot $(0, 0)$, men slik at $f(x_k, y_k)$ ikke konvergerer mot $f(0, 0)$. Funksjonen virker altså å være kontinuertlig så lenge vi beveger oss langs rette linjer, men er det likevel ikke! ■

Eksemplet ovenfor viser at det kan være vanskelig å få god oversikt over hvordan en funksjon av flere variable oppfører seg, og at det kanskje finnes flere geometriske muligheter enn det vi kan forestille oss. Det er i slike sammenhenger vi virkelig får nytte av abstrakte definisjoner av ε - δ -typen; de gir oss muligheten til å føre vanntette bevis selv i tilfeller der vi ikke er sikre på om vi har fått full oversikt over alle geometriske snurrepiperier!

Hittil har vi bare snakket om kontinuitet i et punkt. Vi avslutter denne seksjonen med definisjonen av en kontinuertlig funksjon — den er helt tilsvarende definisjonen for funksjoner av én variabel.

T2.2.16 Definisjon En funksjon \mathbf{F} kalles *kontinuertlig* dersom den er kontinuertlig i alle punkter i sitt definisjonsområde.

Oppgaver

7. Vis at funksjonen f er kontinuertlig

- a) $f(x, y) = x + y$ b) $f(x, y) = x^2y + y$ c) $f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$
d) $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + y)$ e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

8. Vis at funksjonene er kontinuertlige:

- a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2z + y, x^2 \sin xyz, x^3)$
b) $\mathbf{G}(x, y, z, u) = (e^{xu+z^2}, z \cos xy^2u)$
c) $\mathbf{H}(x, y, z, u) = (x^y e^{xz^2}, z + u^2, x^2 + 3yzu)$
d) $\mathbf{K}(x, y, z, u, v) = (\sin(xy + z^2v), 2uv)$

9. Vis at koordinatfunksjonene $k_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ er kontinuertlige ved å bruke definisjonen av kontinuitet.

10. a) Anta det finnes en konstant $M \in \mathbb{R}$ slik at $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \leq M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ for alle \mathbf{x}, \mathbf{y} i definisjonsområdet $D_{\mathbf{F}}$. Vis at \mathbf{F} er kontinuertlig.

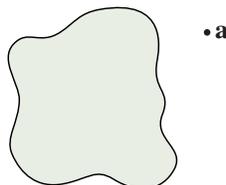
b) Anta at $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ for en matrise \mathbf{A} . Vis at \mathbf{F} er kontinuertlig. (*Hint:* Husk setning T2.1.28.)

11. I denne oppgaven har du bruk for trekantulikheten som sier at hvis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, så er $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.
- Vis at $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
 - La $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Vis at funksjonen $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ er kontinuerlig.
 - Vis at funksjon $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|}$ er kontinuerlig der den er definert.
12. Bevis setning T2.2.10.
13. Bevis setning T2.2.11.

Grenseverdier

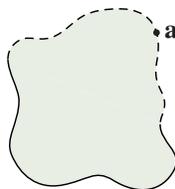
I teorien for funksjoner av én variabel opererer vi både med ensidige og tosidige grenser. Ensidige grenser er blant annet nyttig når vi skal avgjøre om en funksjon er kontinuerlig i enden av sitt definisjonsområde — vi bruker grenseverdien $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ for å undersøke om f er kontinuerlig i det venstre endepunktet a av intervallet $[a, b]$, og grenseverdien $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ for å undersøke om f er kontinuerlig i det høyre endepunktet b . Med flere variable er det så mange måter å nærme seg et randpunkt på at vi ikke kan ha et grensebegrep for hver måte — vi må finne frem til et felles begrep som dekker alle tilfeller.

La oss først se litt på hvilke punkter det er naturlig å regne ut grenseverdier i. Vi ser på en funksjon $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ definert på en delmengde A av \mathbb{R}^n . Figur T2.2.8 viser én mulighet; her består A av en sammenhengende mengde pluss et isolert punkt \mathbf{a} .



Figur T2.2.8

Siden vi ikke kan nærme oss \mathbf{a} innenfor definisjonsmengden til \mathbf{F} , er det ikke rimelig å definere grenseverdien til \mathbf{F} i punktet \mathbf{a} . Figur T2.2.9 viser en annen situasjon.



Figur T2.2.9

Her er \mathbf{a} ikke med i definisjonsmengden A , men det går fint an å nærme seg \mathbf{a} fra A . I dette tilfellet er det rimelig å definere grenseverdien til \mathbf{F} i punktet \mathbf{a} . Konklusjonen på disse observasjonene må bli at det er rimelig å definere grenseverdien til \mathbf{F} i punktet \mathbf{a} dersom det går an å nærme seg \mathbf{a} med punkter ($\neq \mathbf{a}$) fra definisjonsmengden til \mathbf{F} , uansett om punktet \mathbf{a} selv ligger i definisjonsmengden eller ikke. Slike punkter kaller vi *opphopningspunkter* for A . Her er den presise definisjonen:

T2.2.17 Definisjon La A være en delmengde av \mathbb{R}^n . Et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et *oppnopningspunkt* for A dersom enhver kule $B(\mathbf{a}, r)$ om \mathbf{a} inneholder uendelig mange punkter fra A .

Vi er nå klare til å definere grenseverdien i et oppnopningspunkt:

T2.2.18 Definisjon La $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable og anta at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ er et oppnopningspunkt for A . Vi sier at $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ er *grenseverdien for \mathbf{F} i punktet \mathbf{a}* dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon \text{ for alle } \mathbf{x} \in A \text{ slik at } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$

Vi skriver $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Dersom \mathbf{a} ikke er et oppnopningspunkt for A , er grenseverdien ikke definert.

Denne definisjonen ligner på den du finner for funksjoner av én variabel i definisjon 5.4.1 i *Kalkulus*, men skiller seg på et viktig punkt: Vi insisterer ikke lenger på at \mathbf{F} skal være definert i alle punkter i nærheten av \mathbf{a} , men kompenserer for dette ved bare å krevne at $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon$ skal holde for punkter \mathbf{x} som er med i definisjonsområdet A til \mathbf{F} .

Akkurat som for følger kan vi studere grensespørsmål for funksjoner komponentvis:

T2.2.19 Setning La $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og anta at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ er et oppnopningspunkt for A . Anta at komponentene til \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))$$

og la \mathbf{b} være en vektor med komponenter $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Da er

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

hvis og bare hvis

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F_i(\mathbf{x}) = b_i \quad \text{for alle } i$$

Beviset overlates til leserne. Ideen er den samme som i beviset for setning T2.2.5 og setning T2.2.12.

Vi har også de vanlige regnereglene for grenseverdier til summer, differenser, produkter og brøker:

T2.2.20 Regneregler for grenseverdier Anta at $\mathbf{F}, \mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er to funksjoner av n variable og at $\mathbf{a} \in A$ er et opphopningspunkt for A . Dersom $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{F}(x) = \mathbf{A}$ og $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{G}(x) = \mathbf{B}$, så er:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} (\mathbf{F}(x) + \mathbf{G}(x)) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} (\mathbf{F}(x) - \mathbf{G}(x)) = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} (\mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{G}(x)) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\mathbf{F}(x)}{\mathbf{G}(x)} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \text{ forutsatt at } \mathbf{F} \text{ og } \mathbf{G} \text{ tar verdier i } \mathbb{R} \text{ og } \mathbf{B} \neq 0$$

Også disse bevisene overlates til leserne.

Det neste resultatet tar seg av sammenhengen mellom grenseverdier og kontinuitet. Legg merke til at det bare gjelder for kontinuitet i opphopningspunkter (men kontinuitet i isolerte punkter er uansett en ganske kunstig sak).

T2.2.21 Setning La $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og anta at $\mathbf{a} \in A$ er et opphopningspunkt for A . Da er \mathbf{F} kontinuerlig i \mathbf{a} hvis og bare hvis $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$.

Bevis: Sammenlign definisjonen av kontinuitet med definisjonen av grenseverdi. ■

Resultatet ovenfor er nyttig når vi skal regne ut enkle grenseverdier:

T2.2.22 Eksempel Finn grenseverdien til

$$F(x, y) = (x^2 y, e^{-xy} \sin(\pi x))$$

når $(x, y) \rightarrow (1, -2)$.

Vi ser at funksjonen er kontinuerlig i $(1, -2)$, så

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} F(x, y) = F(1, -2) = (1^2 \cdot (-2), e^{-1 \cdot (-2)} \sin(\pi \cdot 1)) = (-2, 0)$$

I noen eksempler må vi forenkle uttrykket før vi går til grensen:

T2.2.23 Eksempel Finn grenseverdien til

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

når $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Siden $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ har vi

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)(x - y)}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) = 0\end{aligned}$$

Vi avslutter med et resultat som binder sammen grenseverdier og konvergens av følger.

T2.2.24 Setning Anta $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable, og at \mathbf{a} er et opphopningspunkt for A . Da er $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ hvis og bare hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b}$ for alle følger $\{\mathbf{x}_n\}$ med punkter fra A slik at $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$.

Bevis: Se beviset for setning T2.2.14.

Oppgaver

14. Finn grenseverdiene

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (x^3 + 2xy)$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} x^2 \sin(xy)$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{e^{x+y}}{x^2 + 3y}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \cos(x + y)$

15. Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ og at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Anta at enhver kule $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ om \mathbf{a} inneholder minst ett element fra A forskjellig fra \mathbf{a} . Vis at \mathbf{a} er et opphopningspunkt for A .

16. Bevis setning T2.2.19.

17. Bevis setning T2.2.20.

18. Bevis setning T2.2.21.

19. Bevis setning T2.2.24.

Derivasjon av skalarfelt

Vi skal nå begynne å se på derivasjon av funksjoner av flere variable. For at det ikke skal være altfor mange komponenter å holde styr på, skal vi først derivere skalarfelt, dvs. funksjoner $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der verdien $f(\mathbf{x})$ er tall.

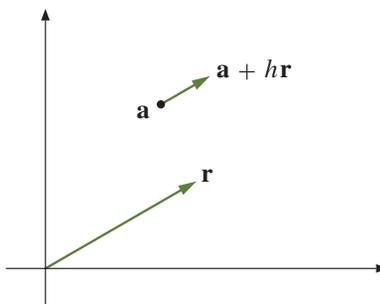
For en funksjon $y = f(x)$ av én variabel forteller den deriverte $f'(x)$ oss hvor fort funksjonen vokser i punktet x — går vi et lite skritt med lengde h langs x -aksen, vil funksjonsverdien øke med (omtrent) $f'(x)h$. For funksjoner av flere variable er situasjonen mer komplisert; vi har flere akser å bevege oss langs, og vi kan ikke regne med at funksjonen stiger like mye uansett hvilken retning vi går i. Før vi regner ut stigningstallet til funksjonen, må vi derfor spesifisere hvilken retning vi er interessert i. Dette er idéen bak begrepet retningsderivert:

T2.2.25 Definisjon Anta at funksjonen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ er definert på en delmengde A av \mathbb{R}^n og at \mathbf{a} er et indre punkt i A . Tenk på $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ som en vektor. Den retningsderiverte til f i punktet \mathbf{a} og retningen \mathbf{r} er gitt ved

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

forutsatt at denne grensen eksisterer.

Figur T2.2.10 viser ideen bak definisjonen.



Figur T2.2.10

Punktene $\mathbf{a} + h\mathbf{r}$ er de punktene vi kommer til hvis vi starter i \mathbf{a} og går i retning \mathbf{r} . Differansen $f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})$ forteller oss hvor mye funksjonen øker når vi beveger oss i denne retning, og brøken

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

er økningen per lengdeenhet når vi bruker $|\mathbf{r}|$ som måleenhet.

T2.2.26 Eksempel La $f(x, y) = x^2 + xy$. Vi skal beregne den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ når $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{r} = (2, 1)$. Først observerer vi at

$$\mathbf{a} + h\mathbf{r} = (1, 0) + h(2, 1) = (1 + 2h, h),$$

som gir $f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) = (1 + 2h)^2 + (1 + 2h)h = 1 + 5h + 6h^2$. Tilsvarende er $f(\mathbf{a}) = f(1, 0) = 1^2 + 1 \cdot 0 = 1$. Vi får

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + 5h + 6h^2) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h + 6h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 + 6h) = 5. \end{aligned}$$

Hva betyr dette resultatet? Legg merke til at lengden til vektoren \mathbf{r} er $|\mathbf{r}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Dersom vi går et lite stykke $h\sqrt{5}$ i retningen til vektoren $\mathbf{r} = (2, 1)$, vil funksjonsverdien stige med (omtrent) $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) \cdot h = 5 \cdot h$. ■

Det er lettest å forstå hva den retningsderiverte er dersom vektoren \mathbf{r} har lengde 1 — da er $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ rett og slett stigningstallet til funksjonen i retning \mathbf{r} når vi måler med vanlige enheter. Utifra dette kan det være fristende å forutsette at $|\mathbf{r}| = 1$ når vi regner med retningsderiverte, men dette viser seg å være upraktisk, blant annet fordi enhetsvektorer ofte inneholder stygge kvadratrøtter.

Så langt kan det se ut som om vi må bygge opp en ny derivasjonsteori helt fra bunnen av for å kunne beregne retningsderiverte til funksjoner av flere variable. Det er heldigvis ikke nødvendig; ved hjelp av såkalte partiellderiverte kan vi føre mye av teorien tilbake til vanlig derivasjon av funksjoner av én variabel. Før vi definerer partiellderiverte, er det lurt å bli enig om litt notasjon.

Den i -te enhetsvektoren \mathbf{e}_i i \mathbb{R}^n er vektoren

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

\uparrow
 i -te plass

parallel med den i -te koordinataksen.

T2.2.27 Definisjon La $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ være en funksjon av n variable, og la \mathbf{a} være et indre punkt i A . Den i -te partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ er den retningsderiverte av f i retning av den i -te enhetsvektoren \mathbf{e}_i ; det vil si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}; \mathbf{e}_i)$$

Andre notasjoner for $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ er $D_i f(\mathbf{a})$ og $f_{x_i}(\mathbf{a})$. De partiellderiverte er altså stigningstallene til funksjonen parallelt med koordinataksene. Skriver vi ut definisjonen i detalj, ser vi at

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= f'(\mathbf{a}; \mathbf{e}_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h} \end{aligned}$$

Det siste uttrykket har en slående likhet med definisjonen av vanlig derivert. Underslår vi de variablene hvor det ikke skjer noen endring, ser vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_i + h) - f(a_i)}{h}$$

Dette betyr at vi kan finne den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ved å derivere uttrykket $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ med hensyn på x_i mens vi later som om alle de andre variablene er konstanter.

T2.2.28 Eksempel Finn de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + \sin(xy).$$

For å finne $\frac{\partial f}{\partial x}$ deriverer vi uttrykket med hensyn på x mens vi later som om y er en konstant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y^3 + \cos(xy) \cdot y$$

For å finne $\frac{\partial f}{\partial y}$ deriverer vi med hensyn på y mens vi holder x konstant:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + 3xy^2 + \cos(xy)x = 3xy^2 + x \cos(xy)$$



En funksjon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av n variable har n partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Vi kan sette sammen disse til en vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

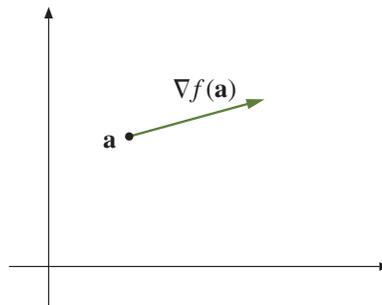
Denne vektoren er så viktig at den har fått sitt eget navn og sitt eget symbol.

T2.2.29 Definisjon Anta at de partiellderiverte til f eksisterer i punktet $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da kalles

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

gradienten til f i punktet \mathbf{a} .

Det er ofte lurt å tenke på gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ som en vektor som starter i punktet \mathbf{a} slik som vist på figur T2.2.11 nedenfor. Som vi snart skal se (setning T2.2.35), får gradienten da en geometrisk betydning — den peker i den retningen hvor funksjonen vokser raskest, og lengden $|\nabla f(\mathbf{a})|$ er lik stigningstallet i denne retningen.



Figur T2.2.11

T2.2.30 Eksempel Finn gradienten til

$$f(x, y, z) = x^2 y e^{xz}$$

i punktet $\mathbf{a} = (1, -2, 0)$.

Vi må først finne de partiellderiverte. Deriverer vi mhp. x som om y og z er konstanter, får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{xz} + x^2ye^{xz}z = xye^{xz}(2 + xz)$$

Deriverer vi mhp. y som om x og z er konstanter, får vi tilsvarende

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{xz}$$

Til slutt deriverer vi mhp. z som om x og y er konstanter:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2ye^{xz}x = x^3ye^{xz}$$

Gradienten i et generelt punkt er dermed

$$\nabla f(x, y, z) = (xye^{xz}(2 + xz), x^2e^{xz}, x^3ye^{xz})$$

I vårt punkt $\mathbf{a} = (1, -2, 0)$ får vi

$$\nabla f(1, -2, 0) = (1 \cdot (-2) \cdot e^{1 \cdot 0} \cdot (2 + 1 \cdot 0), 1^2 \cdot e^{1 \cdot 0}, 1^3 \cdot (-2) \cdot e^{1 \cdot 0}) = (-4, 1, -2)$$

■

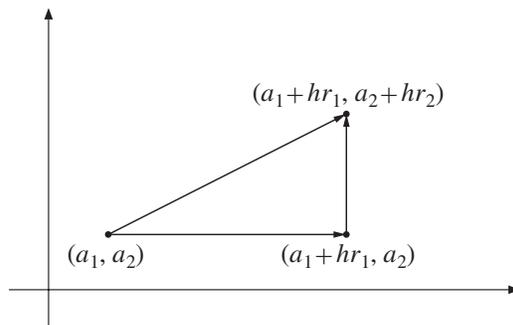
Vi har nå sett hvordan vi kan bruke våre vanlige derivasjonsregler til å regne ut partiellderiverte — vi bare deriverer som om de andre variablene var konstanter. Neste post på programmet er å vise hvordan vi kan regne ut retningsderiverte ved hjelp av partiellderiverte.

La oss begynne med å se på hva som skjer i to dimensjoner. Anta at vi ønsker å derivere f i punktet $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ i retningen $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$. Dersom h er en liten størrelse, vet vi at

$$f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2) = f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) \cdot h \quad (2.1)$$

når vi ser bort fra en størrelse som er liten sammenlignet med h .

Vi kan også beregne differansen $f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2)$ på en annen måte. Istedenfor å gå direkte langs vektoren \mathbf{r} velger vi å gå parallelt med koordinat-aksene som vist på figur T2.2.12.



Figur T2.2.12

Vi ser at

$$\begin{aligned} f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2) \\ = \overbrace{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1 + hr_1, a_2)}^{\text{økning parallelt med } y\text{-aksen}} + \overbrace{f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1 + hr_1, a)}^{\text{økning parallelt med } x\text{-aksen}} \end{aligned}$$

Ser vi bort fra feil som er små sammenlignet med h , får vi videre

$$\begin{aligned} f(a_1 + hr_1, a) - f(a_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \cdot hr_1 \\ f(a_1 + hr_1, a + hr_2) - f(a_1 + hr_1, a) &= \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \cdot hr_2 \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})hr_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})hr_2 \quad (2.2)$$

(fortsett med en feil som er liten sammenlignet med h). Sammenligner vi de to uttrykkene (2.1) og (2.2) vi nå har for $f(a_1 + hr_1, a_2 + hr_2) - f(a_1, a_2)$, ser vi at

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})r_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})r_2$$

Gjennomfører vi et tilsvarende argument i n variable, får vi formelen

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})r_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})r_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})r_n$$

der $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Husker vi at gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right),$$

kan vi skrive formelen ovenfor som et skalarprodukt

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \quad (2.3)$$

Denne formelen gir oss en effektiv måte å regne ut retningsderiverte på; vi finner alle de partiellderiverte, setter dem sammen til en gradient, og tar skalarproduktet mellom gradienten og vektoren \mathbf{r} . Beregningen som ledet oss frem til (2.3), er imidlertid ingen streng utledning i matematisk forstand (vi har skrevet eksakt likhet = en rekke steder der vi bare hadde omtrentlig likhet), og det viser seg at det finnes funksjoner f som ikke oppfyller (2.3) til tross for at både den retningsderiverte og de partiellderiverte eksisterer (et eksempel på dette er funksjonen i eksempel T2.2.15). Disse funksjonene oppfører seg imidlertid så merkelig at vi ønsker å utelukke dem fra teorien vår. Vi skal derfor innføre et begrep *deriverbar funksjon* som fanger opp funksjoner med den oppførselen vi ønsker oss. Utgangspunktet for definisjonen er at vi ønsker at $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$ skal være en god tilnærming til funksjonsdifferansen $f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{a})$ når \mathbf{r} er liten. Mer presist ønsker vi at «feilleddet»

$$\sigma(\mathbf{r}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$$

skal bli mindre og mindre sammenlignet med størrelsen til \mathbf{r} , dvs. at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} = 0$$

Vi får altså denne definisjonen:

T2.2.31 Definisjon Anta at $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er definert på en delmengde A av \mathbb{R}^n og at \mathbf{a} er et indre punkt i A . Anta videre at alle de partiellderiverte til f eksisterer i punktet \mathbf{a} . Vi sier at f er *deriverbar* i \mathbf{a} dersom funksjonen

$$\sigma(\mathbf{r}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$$

går mot 0 hurtigere enn $|\mathbf{r}|$, dvs.

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} = 0$$

KOMMENTAR: Man kan lure på hvorfor vi ikke rett å slett sier at f er deriverbar i \mathbf{a} dersom $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$ holder for alle \mathbf{r} . Det viser seg imidlertid at definisjonen ovenfor gir en glattere teori hvor delene passer bedre sammen. Det neste resultatet sier dessuten at vi får likheten $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$ uansett.

T2.2.32 Setning Anta at $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar i \mathbf{a} . Da er $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$ for alle \mathbf{r} .

Bevis: Vi har

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (h\mathbf{r}) + \sigma(h\mathbf{r})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} + |\mathbf{r}| \frac{\sigma(h\mathbf{r})}{h|\mathbf{r}|} \right) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \end{aligned}$$

siden $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h\mathbf{r})}{h|\mathbf{r}|} = 0$. ■

Vi tar med et eksempel på hvordan formel (2.3) kan brukes til å beregne retningsderivate.

T2.2.33 Eksempel La oss anta at funksjonen

$$f(x, y, z) = x^2y + e^{-yz}$$

er deriverbar. Vi skal finne den retningsderivate $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ og $\mathbf{r} = (1, -1, 1)$. La oss først finne gradienten til f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - ze^{-yz}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -ye^{-yz}$$

Dette gir $\nabla f = (2xy, x^2 - ze^{-yz}, -ye^{-yz})$ og $\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(1, 1, 1) = (2, 1 - e^{-1}, -e^{-1})$. Følgelig er

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = (2, 1 - e^{-1}, -e^{-1}) \cdot (1, -1, 1) = 1$$



For å kunne bruke formel (2.3) trenger vi å vite at våre funksjoner er deriverbare. Det neste resultatet gir oss den informasjonen vi vanligvis trenger. Beviset er ganske langt og komplisert, og egner seg nok best for de ivrigste og flittigste. Et lite ord om terminologi: Vi sier at en funksjon er definert i en *omegn* om \mathbf{a} dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ om \mathbf{a} der funksjonen er definert (den kan godt være definert på et større område — poenget er at vi i hvert fall vil sikre oss at den er definert for alle punkter tilstrekkelig nær \mathbf{a}).

T2.2.34 Teorem La $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable. Anta at alle de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ er definert i en omegn om $\mathbf{a} \in A$, og at de er kontinuerlige i \mathbf{a} . Da er f deriverbar i \mathbf{a} .

Bevis: For at ikke notasjonen skal bli for overveldende, skal vi nøye oss med å bevise setningen for en funksjon $f(x_1, x_2)$ av to variable. Beviset er en litt oppstrammet variant av det argumentet som ledet oss til formel (2.3).

Vi velger \mathbf{r} så liten at $\mathbf{a} + \mathbf{r}$ ligger innenfor det området hvor de partiellderiverte eksisterer. Vi lar $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ og observerer at

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{a}) &= f(a_1 + r_1, a_2 + r_2) - f(a_1, a_2) \\ &= f(a_1 + r_1, a_2 + r_2) - f(a_1 + r_1, a_2) \\ &\quad + f(a_1 + r_1, a_2) - f(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Dette er samme type omskrivning som vi foretok da vi regnet oss frem til (2.3). Hvis vi tenker på $x \rightarrow f(x, a_2)$ som en funksjon av én variabel, forteller middelverdisetningen oss at det finnes et punkt c mellom a_1 og $a_1 + r_1$ slik at

$$f(a_1 + r_1, a_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c, a_2) r_1$$

Helt tilsvarende kan vi finne et punkt d mellom a_2 og $a_2 + r_2$ slik at

$$f(a_1 + r_1, a_2 + r_2) - f(a_1 + r_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + r_1, d) r_2$$

Kombinerer vi de resultatene vi nå har, ser vi at

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c, a_2) r_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + r_1, d) r_2$$

Trekker vi fra $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) r_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) r_2$ på begge sider, får vi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c, a_2) r_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + r_1, d) r_2 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) r_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) r_2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) r_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + r_1, d) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) r_2 \end{aligned}$$

Sammenligner vi dette med definisjon T2.2.31, ser vi at

$$\sigma(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) r_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + r_1, d) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) r_2$$

Vår oppgave er å vise at $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Siden $|r_1|, |r_2| \leq |\mathbf{r}|$, får vi

$$|\sigma(\mathbf{r})| \leq \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + r_1, d) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right| \right) |\mathbf{r}|$$

Deler vi på på $|\mathbf{r}|$, ser vi at

$$\frac{|\sigma(\mathbf{r})|}{|\mathbf{r}|} \leq \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + r_1, d) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right| \right)$$

Dette uttrykket går mot 0 fordi de partiellderiverte er kontinuertlige i $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, og (c, a_2) og $(a + r_1, d)$ nærmer seg (a_1, a_2) når $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$. Dermed er teoremet bevist. ■

Sammen med setning T2.2.32 forteller setningen ovenfor oss at så lenge de partiellderiverte er kontinuertlige, kan vi trygt bruke formelen

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}.$$

Vi har allerede nevnt den geometriske tolkningen av gradienten — at gradienten i punktet \mathbf{a} peker i den retningen hvor funksjonen vokser hurtigst, og at stigningstallet i denne retningen er lik lengden til gradienten. Vi har nå de redskapene som trengs til å bevise dette.

T2.2.35 Setning Anta at f er deriverbar i \mathbf{a} . Da peker gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ i den retningen hvor f vokser hurtigst i punktet \mathbf{a} , og stigningstallet til f i denne retningen er $|\nabla f(\mathbf{a})|$.

Bevis: Hvis \mathbf{u} er en enhetsvektor (dvs. $|\mathbf{u}| = 1$), så forteller den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ oss hvor fort funksjonen vokser i den retningen \mathbf{u} peker. Funksjonen f vokser derfor hurtigst i den retningen \mathbf{u} hvor $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ er størst. Siden \mathbf{u} er en enhetsvektor, forteller Schwarz' ulikhet oss at

$$|\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}| \leq |\nabla f(\mathbf{a})| |\mathbf{u}| = |\nabla f(\mathbf{a})|$$

med likhet bare hvis \mathbf{u} og $\nabla f(\mathbf{a})$ er parallelle. Dette betyr at $|\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}|$ er størst når \mathbf{u} og $\nabla f(\mathbf{a})$ er parallelle. Nå er det to enhetsvektorer som er parallelle med $\nabla f(\mathbf{a})$ — en som peker samme vei som $\nabla f(\mathbf{a})$, og en som peker motsatt vei. Det er lett å se at $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = |\nabla f(\mathbf{a})|$ når \mathbf{u} og $\nabla f(\mathbf{a})$ peker samme vei, og at $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = -|\nabla f(\mathbf{a})|$ når \mathbf{u} og $\nabla f(\mathbf{a})$ peker motsatt vei. Altså har f sitt største stigningstall $|\nabla f(\mathbf{a})|$ i den retningen som $\nabla f(\mathbf{a})$ peker. ■

T2.2.36 Eksempel I hvilken retning vokser funksjonen $f(x, y) = x^3 y \sin(\pi xy)$ hurtigst når vi står i punktet $(1, \frac{1}{2})$?

Vi må først finne gradienten. De partiellderiverte er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y \sin(\pi xy) + x^3 y \cos(\pi xy)(\pi y) = 3x^2 y \sin(\pi xy) + \pi x^3 y^2 \cos(\pi xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \sin(\pi xy) + x^3 y \cos(\pi xy)(\pi x) = x^3 \sin(\pi xy) + \pi x^4 y \cos(\pi xy)$$

Setter vi inn $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$, får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(1, \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \pi \cdot 1^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \cos\left(\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(1, \frac{1}{2}\right) = 1^3 \cdot \sin\left(\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \pi \cdot 1^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1$$

Dermed er

$$\nabla f \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

Funksjonen vokser altså raskest i retningen $(\frac{3}{2}, 1)$, og stigningstallet i denne retningen er

$$\left| \nabla f \left(1, \frac{1}{2}\right) \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{13}$$

■

Vi tar med et litt mer teoretisk resultat som vi får bruk for siden. For funksjoner av én variabel vet vi at dersom den deriverte eksisterer i et punkt, så er funksjonen kontinuert i punktet. For funksjoner av flere variable er sammenhengen litt mer subtil — det kan faktisk hende at alle de retningsderiverte eksisterer i et punkt, men at funksjonen likevel ikke er kontinuert i punktet (se oppgave 2.2.26). Er funksjonen deriverbar i betydningen vi innførte i definisjon T2.2.31, er vi imidlertid på den sikre siden.

T2.2.37 Setning Anta at $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon av n variable. Dersom f er deriverbar i et punkt $\mathbf{a} \in A$, så er f kontinuert i \mathbf{a} .

Bevis: Ifølge setning T2.2.21 er det nok å vise at $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. Setter vi $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, er dette det samme som å vise at $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = f(\mathbf{a})$. Siden f er deriverbar i \mathbf{a} , vet vi at

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} + \sigma(\mathbf{a})$$

der $\frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \rightarrow 0$ når $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$. Dette betyr spesielt at $\sigma(\mathbf{r}) \rightarrow 0$, og dermed er

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} (f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} + \sigma(\mathbf{a})) = f(\mathbf{a}) + 0 + 0 = f(\mathbf{a})$$

■

Helt til slutt skal vi se på eksempel som viser en typisk anvendelse av gradienter og partiellderiverte.

T2.2.38 Eksempel Anta at en tynn gass oppbevares i en beholder der vi kan justere volumet V og temperaturen T . Det viser seg da at trykket P er proporsjonalt med temperaturen T og omvendt proporsjonalt med volumet V , dvs. $P = k \frac{T}{V}$ der k er en konstant som blant annet avhenger av hvor mye gass det er i beholderen (dette forutsetter egentlig at temperaturen måles i grader Kelvin og ikke Celsius, men det behøver vi ikke bry oss om her). Vi kan tenke på trykket P som en funksjon av T og V :

$$P(T, V) = k \frac{T}{V}$$

Partiellderiverer vi dette uttrykket, får vi

$$\frac{\partial P}{\partial T} = k \frac{1}{V} \quad \text{og} \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -k \frac{T}{V^2}$$

Gradienten er dermed

$$\nabla P(T, V) = \left(k \frac{1}{V}, -k \frac{T}{V^2} \right)$$

Det er ofte naturlig å spørre hvor mye trykket endrer seg dersom vi gir temperaturen et lite tillegg ΔT og volumet et lite tillegg ΔV . Det eksakte uttrykket for dette tillegget er selvfølgelig

$$\Delta P = P(T + \Delta T, V + \Delta V) - P(T, V),$$

men denne differansen er tung å arbeide med. Vi vet imidlertid at den har en god tilnærming i skalarproduktet av gradienten ∇P med tilvekstvektoren $(\Delta T, \Delta V)$:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(T + \Delta T, V + \Delta V) - P(T, V) \approx \nabla P(T, V) \cdot (\Delta T, \Delta V) \\ &= \frac{\partial P}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial P}{\partial V} \Delta V = k \frac{1}{V} \Delta T - k \frac{T}{V^2} \Delta V \end{aligned}$$

Ved hjelp av denne formelen er det lett å anslå hvor mye trykket endrer seg når vi regulerer volumet og temperaturen.

La oss nå anta at vi regulerer temperaturen og volumet kontinuerlig, og at endringene ΔP , ΔT og ΔV har foregått i løpet av et lite tidsintervall Δt . Endringen per tidsenhet er da

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx k \frac{1}{V} \frac{\Delta T}{\Delta t} - k \frac{T}{V^2} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

med bedre tilnærming dess mindre Δt er. Lar vi $\Delta t \rightarrow 0$, får vi

$$P'(t) = k \frac{1}{V} T'(t) - k \frac{T}{V^2} V'(t)$$

Ved hjelp av denne formelen kan vi regne ut hvor fort trykket endrer seg dersom vi kjenner endringshastighetene til temperaturen og volumet. Formelen er en forsmak på *kjerneregelen for funksjoner av flere variable*. ■

Oppgaver

20. Finn de partiellderiverte til f .

a) $f(x, y) = x^3y + 3xy^4$

b) $f(x, y) = \frac{x^2 + x^3}{y}$

c) $f(x, y) = \cos(x + y^2)$

d) $f(x, y) = x^2 \ln(xy^2)$

e) $f(x, y, z) = (x + y)e^{-z}$

f) $f(x, y, z) = \frac{z^2 \tan x}{1 + y^2}$

g) $f(x, y, z) = z \arctan(x + y)$

h) $f(x, y, z, u) = (z^2 + u)e^{-x+3y}$

21. Finn gradienten til funksjonen:

a) $f(x, y) = x^2y$

b) $f(x, y, z) = x \cos(xy^2z)$

c) $f(u, v, w) = we^{u \cos v}$

d) $f(z_1, z_2, z_3) = z_3 \arctan(z_1z_2) + e^{z_3}$

22. Finn den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$:

a) $f(x, y) = 3xy + y^2$; $\mathbf{a} = (1, 2)$; $\mathbf{r} = (3, -1)$

b) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$; $\mathbf{a} = (1, 0)$; $\mathbf{r} = (-1, 1)$

c) $f(x, y, z) = x^2y + z^2$; $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$; $\mathbf{r} = (1, 1, -1)$

d) $f(x, y, z) = z \sin(xy)$; $\mathbf{a} = (\frac{\pi}{2}, 1, 0)$; $\mathbf{r} = (2, 0, -1)$

23. I hvilken retning vokser funksjonen hurtigst i det angitte punktet?

a) $f(x, y) = -x^2y + 7y^3$, $\mathbf{a} = (4, -3)$

b) $f(x, y, z) = (x^2 - y^2)e^z$; $\mathbf{a} = (1, -1, 3)$

c) $f(x, y, z, u) = xuz^2 - y^2zu$; $\mathbf{a} = (1, 0, -2, 3)$

24. Volumet til en sylinder med radius r og høyde h er $V = \pi r^2h$. Når høyden og radien varierer, kan vi tenke på dette som en funksjon i to variable $V(r, h) = \pi r^2h$. Forklar at når radien endrer seg fra r til $r + \Delta r$ og høyden endrer seg fra h til $h + \Delta h$, så er endringen i V tilnærmet gitt ved

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

Anta at du har en sylinder hvor du vet at radien ligger mellom 2 m og 2.05 m og hvor høyden ligger mellom 5 m og 5.05 m. Bruk formelen ovenfor til å anslå usikkerheten i volumet.

25. BMI (body mass index) er en indikator for undervekt og overvekt. For å finne din BMI tar du vekten din (målt i kilo) og deler på kvadratet av høyden din (målt i meter). Du kan tenke på BMI som en funksjon av to variable

$$f(v, h) = \frac{v}{h^2}$$

a) Vis at dersom Δv og Δh er små endringer i vekt og høyde, så er endringen i BMI gitt ved

$$\Delta f(v, h) \approx \frac{\Delta v}{h^2} - 2 \frac{v}{h^3} \Delta h$$

b) En tommelfingerregel sier at for hver ekstra centimeter du har i høyde, kan du «tåle» en ekstra kilo uten at BMI-en din endrer seg særlig. Bruk formelen i a) til å undersøke hvor godt dette passer for personer med forskjellig vekt og høyde.

26. Vi skal se mer på funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fra eksempel T2.2.15. Husk at denne funksjonen er gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Vis at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Hva er $\nabla f(0, 0)$?
- b) Bruk definisjonen av retningsderivert til å vise at $f(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = \frac{r_2^2}{r_2}$ der $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, $r_2 \neq 0$.
- c) Vis at for denne funksjonen gjelder ikke likheten $f(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}$.
- d) Vis at alle de retningsderivate til f eksisterer i $\mathbf{0}$, men at funksjonen hverken er kontinuerlig eller deriverbar i punktet.

Partiellderivate av høyere orden

Fra teorien for funksjoner av en variabel vet vi at det ofte er nyttig eller nødvendig å derivere mer enn én gang. Også i flervariabel teori er det ofte nyttig å arbeide med annenderivate, tredjederivate osv. Den store forskjellen er at vi har så mange flere måter å derivere på.

T2.2.39 Eksempel La $f(x, y) = x^2y^3 + y^2$. Vi har to partiellderivate av første orden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y$$

Når vi skal regne ut annenderivate, har vi mange valg. Vi kan for eksempel derivere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn på x en gang til:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3) = 2y^3.$$

Vi kan også derivere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn på y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3) = 6xy^2.$$

I tillegg kan vi derivere $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn på både x og y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 + 2y) = 6xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 + 2y) = 6x^2y + 2 \end{aligned}$$

Vi har altså fire annenordens partiellderivate for denne funksjonen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. ■

Den generelle notasjonen skulle fremgå av eksemplet ovenfor —

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$$

er den funksjonen vi får ved å derivere funksjonen f n ganger, først med hensyn på variabelen x_{i_1} , så med hensyn på variabelen x_{i_2} osv.

I eksemplet ovenfor så vi at de to «blandede» partiellderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ var like. Dette er ikke en universell regel; det finnes funksjoner f slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er forskjellige, men for de fleste vi støter på i praksis, vil de blandede partiellderiverte være like. Den neste setningen viser at dette gjelder dersom de annenordens partiellderiverte eksisterer i en omegn rundt punktet \mathbf{a} og er kontinuerlige i \mathbf{a} . Beviset er krevende og minner om beviset for teorem T2.2.34. I oppgave 2.2.30 finner du et eksempel på en funksjon der de blandede partiellderiverte *ikke* er like.

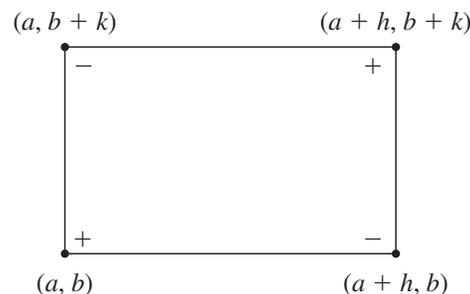
T2.2.40 Setning La $f(x_1, \dots, x_n)$ være en funksjon av n variable. Anta at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

eksisterer i en omegn om punktet \mathbf{a} og er kontinuerlige i \mathbf{a} . Da er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Bevis: For å forenkle notasjonen antar vi at $f(x, y)$ er en funksjon av to variable, og at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eksisterer i en omegn om punktet (a, b) og er kontinuerlige i (a, b) . Anta at tallene h, k er så små at hele rektangelet i figur T2.2.13 ligger i det området der de blandede partiellderiverte eksisterer.



Figur T2.2.13

La

$$\Delta(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a, b)$$

der vi har kombinert funksjonsverdiene i hjørnene på rektanglet vårt ved å bruke fortegnene vist på figuren. Vi skal vise at grenseverdien

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{h \cdot k}$$

er lik både $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$.

Først skritt er å bruke middelverdisetningen på funksjonen

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Vi får

$$g(a+h) - g(a) = g'(c) \cdot h$$

for en c mellom a og $a+h$. Setter vi inn den opprinnelige funksjonen, ser vi at

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b) \right] h$$

Dette kan også skrives

$$\Delta(h, k) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b) \right] h$$

Neste steg er å bruke middelverdisetningen på funksjonen

$$G(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y).$$

Vi får

$$G(b+k) - G(b) = G'(d) \cdot k$$

for en d mellom b og $b+k$. Dette kan også skrives

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d) \cdot k$$

Kombinerer vi formlene våre, ser vi at

$$\Delta(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d) \cdot hk$$

Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er kontinuert i (a, b) , vil $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ når $(h, k) \rightarrow 0$. Følgelig er

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

For å vise at også $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, bytter vi om på rollene til variablene x og y i argumentet ovenfor. Vi starter med å bruke middelverdisetningen på funksjonen

$$\gamma(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

og fortsetter på akkurat samme måte som ovenfor. Detaljene overlates til leserne. ■

At blandede partiellderiverte av annen orden er like, medfører også at blandede partiellderiverte av høyere orden er like dersom de inneholder like mange derivasjoner med hensyn på hver variabel. Dersom f har kontinuert fjerdederiverte, kan vi for eksempel vise at

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial x}$$

på følgende måte:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial x}$$

Overbevis deg selv om at du kan begrunne disse overgangene.

Oppgaver

27. Regn ut de annenordens partiellderiverte:

a) $f(x, y) = 3x^2y + 2y^2x$

b) $f(x, y) = x \sin y$

c) $f(x, y) = x^2e^{x-y}$

d) $f(x, y, z) = x^2z - y^2z^2$

28. Regn ut de partiellderiverte:

a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x}$ når $f(x, y, z) = x^2ye^{xz}$

b) $\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z}$ når $f(x, y, z) = x^2y^3 \cos xyz$

29. Gjennomfør den siste delen av beviset for setning T2.2.40 (dvs. at $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$).

30. I denne oppgaven skal vi se på en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Funksjonen er gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{når } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Vis at $f(x, 0) = 0$ for alle x og at $f(0, y) = 0$ for alle y . Bruk dette til å vise at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

b) Vis at for $(x, y) \neq (0, 0)$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

c) Vis at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ ved å bruke

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h}$$

Vis på tilsvarende måte at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner

Hittil har vi sett på derivasjon av funksjoner som tar verdier i \mathbb{R} . Vi skal nå utvide teorien vår til også å omfatte funksjoner som tar verdier i \mathbb{R}^m der m er større enn 1, altså til *vektorvaluerte* funksjoner. Husk at en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kan skrives på komponentform

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

der F_1, F_2, \dots, F_m er funksjoner med verdier i \mathbb{R} (i denne seksjonen er det lurt å tenke på de fleste vektorer som søylevektorer siden vi skal multiplisere dem med matriser).

Dersom alle disse funksjonen lar seg derivere, kan vi samle alle de partiellderiverte i en stor matrise, den såkalte *Jacobi-matrisen* til \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Legg merke til hvordan denne matrisen er bygget opp: I første linje har vi alle partiellderiverte av førstekomponent F_1 , i annen linje alle partiellderiverte av annenkomponent F_2 osv. Sagt på en annen måte: Første linje i Jacobi-matrisen er gradienten til F_1 , andre linje er gradienten til F_2 osv. Dersom \mathbf{F} er et skalarfelt (og altså tar verdier i \mathbb{R}), har Jacobi-matrisen bare én linje og er identisk med gradienten $\nabla \mathbf{F}$.

Jacobi-matrisen spiller på mange måter den samme rollen for funksjoner av flere variable som den deriverte gjør for funksjoner av én variabel, og vi har derfor valgt en notasjon $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ som ligner på den notasjonen vi er vant til.

Hvis man først har lært seg å partiellderivere, er det ingen kunst (men en del arbeid!) å finne en Jacobi-matrise.

T2.2.41 Eksempel Finn Jacobi-matrisen til funksjonen

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy^3 \\ e^{x+y^2} \\ 3x^2y \end{pmatrix}$$

I dette tilfellet er

$$F_1(x, y) = xy^3, \quad F_2(x, y) = e^{x+y^2} \quad \text{og} \quad F_3(x, y) = 3x^2y$$

Vi partiellderiverer og får

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= y^3 & \text{og} & & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 3xy^2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= e^{x+y^2} & \text{og} & & \frac{\partial F_2}{\partial y} &= 2ye^{x+y^2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 6xy & \text{og} & & \frac{\partial F_3}{\partial y} &= 3x^2 \end{aligned}$$

Jacobi-matrisen blir dermed

$$\mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 & 3xy^2 \\ e^{x+y^2} & 2ye^{x+y^2} \\ 6xy & 3x^2 \end{pmatrix}$$



Vi skal nå forsøke å finne ut hvordan vi bør definere deriverbarhet for vektorvaluerte funksjoner \mathbf{F} . La oss gå tilbake til den generelle Jacobi-matrisen

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Ganger vi denne med en søylevektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

får vi

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \\ \nabla F_2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \\ \vdots \\ \nabla F_m(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix}$$

der vi har brukt at første rad i $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ er gradienten til F_1 , andre rad er gradienten til F_2 osv. Dersom F_1, F_2, \dots, F_m er deriverbare funksjoner, er

$$\nabla F_1(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \approx F_1(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_1(\mathbf{a})$$

$$\nabla F_2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \approx F_2(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_2(\mathbf{a})$$

.....

$$\nabla F_m(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \approx F_m(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_m(\mathbf{a})$$

med bedre tilnærming dess mindre \mathbf{r} er. Altså er

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r} \approx \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_1(\mathbf{a}) \\ F_2(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})$$

Dette gir oss en indikasjon på hvordan vi skal definere deriverbarhet for vektorvaluerte funksjoner — vi ønsker at avviket i tilnærmingen

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) \approx \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r}$$

skal være lite sammenlignet med størrelsen til \mathbf{r} :

T2.2.42 Definisjon Anta at $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable og at \mathbf{a} er et indre punkt i A . Vi sier at \mathbf{F} er deriverbar i \mathbf{a} dersom funksjonen

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r}$$

går mot null fortere enn $|\mathbf{r}|$, dvs. at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

(legg merke til at $\boldsymbol{\sigma}$ nå er en vektorvaluert funksjon med verdier i \mathbb{R}^m).

Mange vil kanskje frykte at vi nå må begynne helt forfra med å utvikle en teori for deriverbarhet akkurat som vi gjorde for skalarfelt i seksjon 2.4, men takket være den neste setningen er det unødvendig.

T2.2.43 Setning En funksjon $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er deriverbar i et indre punkt $\mathbf{a} \in A$ hvis og bare hvis hver komponent F_i er deriverbar i \mathbf{a} .

Bevis: Vi har

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_1(\mathbf{a}) - \nabla F_1(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \\ F_2(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_2(\mathbf{a}) - \nabla F_2(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - F_m(\mathbf{a}) - \nabla F_m(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1(\mathbf{r}) \\ \sigma_2(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \sigma_m(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dermed er

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \\ \frac{\sigma_2(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \\ \vdots \\ \frac{\sigma_m(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \end{pmatrix}$$

og vi vet fra setning T2.2.19 at $\frac{1}{|\mathbf{r}|} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\frac{\sigma_i(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \rightarrow 0$ for alle i . Dette betyr at \mathbf{F} er deriverbar hvis og bare hvis hver F_i er deriverbar. ■

Kombinerer vi dette resultatet med setning T2.2.34, får vi:

T2.2.44 Korollar Anta at $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable og at \mathbf{a} er et indre punkt i A . Dersom alle komponentene $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ i Jacobi-matrisen er definert i en omegn rundt \mathbf{a} og er kontinuerlige i \mathbf{a} , så er \mathbf{F} deriverbar i \mathbf{a} .

Bevis: Ifølge setning T2.2.34 er hver av komponentene F_i til \mathbf{F} deriverbar i \mathbf{a} , og ifølge setningen ovenfor er da \mathbf{F} deriverbar i \mathbf{a} . ■

T2.2.45 Eksempel Vis at funksjonen

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy^3 \\ e^{x+y^2} \\ 3x^2y \end{pmatrix}$$

fra eksempel T2.2.41 er deriverbar.

Vi har allerede regnet ut Jacobi-matrisen til \mathbf{F} , og komponentene er åpenbart kontinuerlige overalt. Altså er \mathbf{F} deriverbar ifølge korollaret. ■

Den neste setningen kan se litt underlig ut, men vi kommer til å ha stor glede av den. Setningen sier at ingen annen matrise B kan «stjele jobben» til Jacobi-matrisen $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ — dersom B tilfredsstillende en betingelse av samme type som $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ oppfyller i definisjon T2.2.42, så må B være lik $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$. Det finnes også andre tolkninger av setningen som vi skal komme tilbake til senere.

T2.2.46 Setning La $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable og la \mathbf{a} være et indre punkt i A . Anta at det finnes en $m \times n$ -matrise B slik at funksjonen

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - B\mathbf{r}$$

tilfredsstillende

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Da er \mathbf{F} deriverbar i \mathbf{a} og

$$\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = B$$

Bevis: Vi velger $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_i$ der

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

er den i -te enhetsvektoren og der $r \in \mathbb{R}$. Da er

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + r\mathbf{e}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = B(r\mathbf{e}_i) + \hat{\sigma}(r\mathbf{e}_i)$$

Deler vi på r og bruker at $|r\mathbf{e}_i| = r$, får vi

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{a} + r\mathbf{e}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{a})}{r} = B\mathbf{e}_i + \frac{\hat{\sigma}(r\mathbf{e}_i)}{|r\mathbf{e}_i|}$$

Når $r \rightarrow 0$, vil det siste leddet på høyre side gå mot $\mathbf{0}$ ifølge antagelsen, så høyresiden går mot

$$B\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix}$$

Da må venstresiden konvergere mot det samme, og vi får

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{a} + r\mathbf{e}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{a})}{r} = \begin{pmatrix} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F_1(\mathbf{a} + r\mathbf{e}_i) - F_1(\mathbf{a})}{r} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F_2(\mathbf{a} + r\mathbf{e}_i) - F_2(\mathbf{a})}{r} \\ \vdots \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F_m(\mathbf{a} + r\mathbf{e}_i) - F_m(\mathbf{a})}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix}$$

Ved definisjonen av partiellderiverte betyr dette at $\frac{\partial F_1}{\partial x_i} = b_{1i}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = b_{2i}$ og så videre. Altså eksisterer alle de partiellderiverte og $\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = B$. Deriverbarhet følger nå av at $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. ■

Oppgaver

31. Finn Jacobi-determinanten til funksjonen.

- a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, x + y^2)$ b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{x^2y+z}, xyz^2)$
 c) $\mathbf{F}(x, y) = (x \arctan(xy), x \ln y, xy \cos y^2)$ d) $\mathbf{F}(x, y, z, u) = (xy \sin(xu^2), z^2u)$

Kjerneregelen

For funksjoner av én variabel sier kjerneregelen at den deriverte til den sammensatte funksjonen $h(x) = f(g(x))$ er gitt ved $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Kjerneregelen for funksjoner av flere variable har akkurat samme form; dersom \mathbf{H} er den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$, så er

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{x}))\mathbf{G}'(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

Selv om formen er den samme, er innholdet mer komplisert — uttrykkene $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ og $\mathbf{G}'(\mathbf{x})$ er nå matriser, og formelen sier at Jacobi-matrisen til \mathbf{H} i punktet \mathbf{x} er lik matriseproduktet av Jacobi-matrisen til \mathbf{F} i punktet $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ og Jacobi-matrisen til \mathbf{G} i punktet \mathbf{x} .

Formel (2.4) uttrykker kjerneregelen i en kortfattet form som er lett å huske, men som ikke er så praktisk å bruke i utregninger. Vi skal derfor nærme oss kjerneregelen fra en litt annen synsvinkel og heller komme tilbake til matriseformuleringen i (2.4) etter hvert. Vi tenker oss at vi har en funksjon (et skalarfelt) $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ av m

variable. For hver variabel u_i substituerer vi en funksjon $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ slik at vi får en sammensatt funksjon

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

av n variable. Spørsmålet er: dersom vi kjenner alle de partiellderiverte til de opprinnelige funksjonene f, g_1, g_2, \dots, g_m , kan vi da finne de partiellderiverte til den sammensatte funksjonen h ? Svaret er ja, men før vi skriver opp formelen som viser oss hvordan vi kan regne ut de partiellderiverte til h , er det lurt å komprimere notasjonen litt slik at vi slipper å arbeide med altfor lange uttrykk. Dersom vi bruker vektornotasjon og skriver

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

og

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

kan definisjonen av h skrives

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

Dersom \mathbf{g} er deriverbar i punktet \mathbf{x} og f er deriverbar i punktet $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, viser det seg at de partiellderiverte til h er gitt ved

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

Denne formelen kaller vi *kjerneregelen på komponentform*, mens (2.4) kalles *kjerne-regelen på matriseform* — vi skal senere se at selv om formen er forskjellig, så uttrykker de to formlene det samme.

Legg merke til at vi i (2.5) evaluerer de partiellderiverte til f i punktet $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$; det betyr at etter at vi har regnet ut de partiellderiverte til f , må vi erstatte u_1 med $g_1(x_1, \dots, x_n)$, u_2 med $g_2(x_1, \dots, x_n)$ osv. Legg også merke til at det er et system i hvilke derivasjoner vi gjør i formel (2.5); vi deriverer med hensyn på alle «mellomvariablene» u_1, u_2, \dots, u_m , men bare med hensyn på én av «grunnvariablene» x_1, x_2, \dots, x_n , nemlig den x_i -en som inngår i den opprinnelige derivasjonen av h .

Ting blir klarere hvis vi ser på et eksempel:

T2.2.47 Eksempel Vi skal se på tilfellet der

$$f(u_1, u_2) = 2u_1u_2^2$$

og

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \sin x_3$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2x_3$$

Vi finner den sammensatte funksjonen $h = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ ved å substituere

$$u_1 = g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \sin x_3 \quad \text{og} \quad u_2 = g_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2x_3$$

inn i uttrykket for f :

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(u_1, u_2) = 2u_1u_2^2 = 2(x_1x_2 \sin x_3)(3x_1^2x_2x_3)^2 = 18x_1^5x_2^3x_3^2 \sin x_3$$

Vi kan selvfølgelig finne de partiellderiverte til h ved å derivere dette uttrykket på vanlig måte, men la oss se hvordan vi kan bruke kjerneregelen isteden. Ifølge (2.5) er

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x})$$

Regner vi ut de partiellderiverte til f , g_1 og g_2 og setter inn i dette uttrykket, får vi

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = (2u_2^2)(x_2 \sin x_3) + (4u_1u_2)(6x_1x_2x_3)$$

Helt til slutt setter vi inn uttrykkene $u_1 = g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \sin x_3$ og $u_2 = g_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2x_3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= (2(3x_1^2x_2x_3)^2)(x_2 \sin x_3) + (4(x_1x_2 \sin x_3)(3x_1^2x_2x_3))(6x_1x_2x_3) \\ &= 18x_1^4x_2^3x_3^2 \sin x_3 + 72x_1^4x_2^3x_3^2 \sin x_3 = 90x_1^4x_2^3x_3^2 \sin x_3 \end{aligned}$$

Det er god trening i å finne $\frac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x})$ og $\frac{\partial h}{\partial x_3}(\mathbf{x})$ på tilsvarende måte. ■

BEMERKNING: Hvis du ser nøyer på eksemplet ovenfor, vil du oppdage at vi har regnet ut $\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x})$ på en svært tungvinn måte — det går mye raskere å bare derivere uttrykket $h(x_1, x_2, x_3) = 18x_1^5x_2^3x_3^2 \sin x_3$ på vanlig måte! Dette er ganske typisk; kjerneregelen i flere variable er faktisk ikke en særlig effektiv metode for å regne ut partiellderiverte til funksjoner gitt ved formler — regelens styrke ligger isteden i at den er et utmerket redskap til å utlede *generelle* sammenhenger mellom varierende størrelser. Før vi ser nærmere på dette, kan det være lurt å ta med enda et konkret eksempel slik at vi blir litt bedre kjent med kjerneregelen.

T2.2.48 Eksempel I eksemplet ovenfor het de variable u_1, u_2 og x_1, x_2, x_3 akkurat som i vår generelle formel (2.5). Når man bruker kjerneregelen i andre fag, har de variable vanligvis helt andre navn, og det er viktig at vi da greier å kjenne igjen de forskjellige delene av kjerneregelen. La oss nå tenke oss at vi har en funksjon

$$f(s, t) = e^s t^2$$

og at s og t er funksjoner av underliggende variable u og v

$$s = S(u, v) = 3uv^3 \quad \text{og} \quad t = T(u, v) = \cos(uv)$$

Vi vil bruke kjerneregelen til å finne de partiellderiverte til den sammensatte funksjonen

$$h(u, v) = f(S(u, v), T(u, v))$$

I dette tilfellet sier formel (2.5)

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \frac{\partial T}{\partial u}(u, v)$$

og

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \frac{\partial T}{\partial v}(u, v)$$

(husk at vi skal derivere med hensyn på begge «mellomvariablene» s og t , men bare med hensyn på den «opprinnelige grunnvariablen» u eller v). Regner vi ut de partiell-deriverte og setter inn $s = S(u, v) = 3uv^3$ og $t = T(u, v) = \cos(uv)$, får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) &= e^s t^2 3v^3 + 2e^s t (-\sin(uv)v) \\ &= e^{3uv^3} (\cos(uv))^2 3v^3 - 2e^{3uv^3} \cos(uv) \sin(uv)v \\ &= v e^{3uv^3} \cos(uv) (3v^2 \cos(uv) - 2 \sin(uv)) \end{aligned}$$

Den andre partiellderiverte $\frac{\partial h}{\partial v}(u, v)$ finner vi på tilsvarende måte. ■

Vi skal ta med et par eksempler på hvordan kjerneregelen brukes i andre fag. Før vi gjør det, kan det være greit med noen ord om notasjon. Når vi bruker kjerneregelen i praktiske situasjoner, blir uttrykkene ofte lange og uoversiktlige. For å lette lesbarheten er det vanlig å utelate punktene som funksjonene evalueres i — man skriver altså

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial g_m}{\partial x_i}$$

istedenfor

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

og setter først inn verdiene til \mathbf{x} og \mathbf{u} når man har behov for dem.

T2.2.49 Eksempel I økonomi er utbyttet til et firma avhengig av forskjellige faktorer. For en bonde kan vi tenke oss at utbyttet er avhengig av tre faktorer: arbeidsinnsatsen a , den løpende kapitalinvesteringen k , og arealet av dyrkbar mark m . Utbyttet U er dermed en funksjon

$$U = F(a, k, m)$$

Vi tenker oss at de tre faktorene varierer med tiden: $a = A(t)$, $k = K(t)$ og $m = M(t)$. Kjerneregelen forteller oss nå hvordan utbyttet U varierer med tiden:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial m} \frac{\partial M}{\partial t}$$

der vi må huske at vi skal evaluere de partiellderiverte $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial k}$, $\frac{\partial F}{\partial m}$ i punktet $(A(t), K(t), M(t))$. Legg merke til at i denne formelen er U , A , K og M bare avhengige av én variabel t , og vi kan derfor skrive vanlige deriverte istedenfor partiellderiverte:

$$U'(t) = \frac{\partial F}{\partial a} A'(t) + \frac{\partial F}{\partial k} K'(t) + \frac{\partial F}{\partial m} M'(t)$$

I økonomiske modeller antar man ofte at utbyttefunksjonen F er en *Cobb-Douglas funksjon*, dvs. at den har formen

$$F(a, k, m) = C a^\alpha k^\beta m^\gamma$$

der C , α , β og γ er positive konstanter. Deriverer vi dette uttrykket, får vi

$$\frac{\partial F}{\partial a} = C\alpha a^{\alpha-1}k^\beta m^\gamma, \quad \frac{\partial F}{\partial k} = C\beta a^\alpha k^{\beta-1}m^\gamma, \quad \frac{\partial F}{\partial m} = C\gamma a^\alpha k^\beta m^{\gamma-1}$$

som innsatt i uttrykket ovenfor gir (etter litt opprydning):

$$U'(t) = CA(t)^\alpha K(t)^\beta M(t)^\gamma \left(\alpha \frac{A'(t)}{A(t)} + \beta \frac{K'(t)}{K(t)} + \gamma \frac{M'(t)}{M(t)} \right)$$

I en økonomisk situasjon med begrensede ressurser vil man ofte overveie å styrke noen innsatsområder på bekostning av andre. Bonden vår kan f.eks. overveie å utvide det dyrkede arealet m ved å kjøpe tilleggsjord, men er da tvunget til å redusere kapitalinvesteringen k . Om slike omprioriteringer er lønnsomme eller ikke, viser seg i fortegnet til den deriverte $U'(t)$ av utbyttefunksjonen. Ifølge formelen ovenfor er dette fortegnet bestemt av fortegnet til uttrykket

$$\alpha \frac{A'(t)}{A(t)} + \beta \frac{K'(t)}{K(t)} + \gamma \frac{M'(t)}{M(t)}$$

($CA(t)^\alpha K(t)^\beta M(t)^\gamma$ er alltid positiv). Fortegnet til den deriverte av utbyttefunksjonen er altså bestemt av en kombinasjon av de *relative veksthastighetene* $\frac{A'(t)}{A(t)}$, $\frac{K'(t)}{K(t)}$ og $\frac{M'(t)}{M(t)}$ og Cobb-Douglaseksponentene α , β og γ . For en økonom med trening i å tolke Cobb-Douglaseksponenter gir et slikt uttrykk økonomisk mening. ■

T2.2.50 Eksempel Når en gass oppbevares i en beholder, er trykket P en funksjon av temperaturen T og volumet V ; vi har altså

$$P = f(T, V)$$

Hvilken funksjon f det er naturlig å bruke, avhenger både av hvilken gass vi ser på, og av hvor stor nøyaktighet vi ønsker. Foreløpig lar vi f være uspesifisert slik at regningene våre gjelder for alle modeller. Dersom volumet og trykket varierer med tiden t , vil også trykket variere med tiden

$$P(t) = f(T(t), V(t))$$

Vi kan finne den deriverte av denne funksjonen ved å bruke kjerneregelen (husk at $P(t)$, $T(t)$ og $V(t)$ bare avhenger av én variabel t slik at vi kan bruke vanlige deriverte $P'(t)$, $T'(t)$ og $V'(t)$ istedenfor partiellderiverte $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ og $\frac{\partial V}{\partial t}$):

$$P'(t) = \frac{\partial f}{\partial T} T'(t) + \frac{\partial f}{\partial V} V'(t)$$

Dersom gassen er tynn og kreftene mellom gasspartiklene er svake (fysikerne kaller dette en *ideell gass*), kan man anta at trykket P er proporsjonalt med temperaturen T og omvendt proporsjonalt med volumet V , dvs. $P = k \frac{T}{V}$ der k er en konstant som blant annet avhenger av hvor mye gass det er i beholderen. Vi har altså

$$P = f(T, V) = k \frac{T}{V}$$

I dette tilfellet er

$$\frac{\partial f}{\partial T} = k \frac{1}{V} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial V} = -k \frac{T}{V^2}$$

Setter vi dette inn i formelen for $P'(t)$, får vi

$$P'(t) = k \frac{1}{V} T'(t) - k \frac{T}{V^2} V'(t)$$

Vi har tidligere regnet oss frem til denne formelen på en litt annen måte (se eksempel T2.2.38).

Regning med partiellderiverte og kjerneregelen står sentralt i termodynamikken, og utregningene ovenfor er bare et enkelt eksempel. ■

Vi begynte denne seksjonen med å skrive opp kjerneregelen på matrisiform:

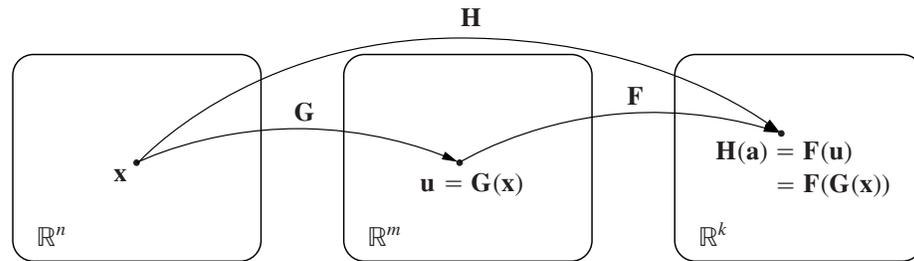
$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{x}))\mathbf{G}'(\mathbf{x}),$$

men siden har vi bare arbeidet med regelen på komponentform:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{u}) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

La oss nå se litt på sammenhengen mellom de to formene.

Når vi arbeider med kjerneregelen på matrisiform, tenker vi oss at vi starter med to funksjoner $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ og at vi danner den sammensatte funksjonen $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ved $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ som vist på figuren.



Figur T2.2.14

Skriver vi ut komponentene til $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$, og $\mathbf{G}'(\mathbf{x})$, får kjerneregelen $\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{x}))\mathbf{G}'(\mathbf{x})$ denne formen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial H_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial H_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial H_k}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial H_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) & \frac{\partial F_1}{\partial u_2}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) & \frac{\partial F_2}{\partial u_2}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial u_1}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) & \frac{\partial F_k}{\partial u_2}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial u_m}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial G_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Den ij -te komponenten i den første matrisen er $\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$. Denne komponenten må være skalarproduktet av den i -te linjen i den andre matrisen og den j -te søylen i den tredje matrisen, altså:

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial u_1}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \frac{\partial G_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_i}{\partial u_2}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \frac{\partial G_2}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial u_m}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \frac{\partial G_m}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

Dette er ikke noe annet enn kjerneregelen på komponentform anvendt på funksjonen $H_i(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$. Vi har dermed vist at kjerneregelen på komponentform rett og slett er det vi får når vi ganger ut matriseproduktet i formelen $\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{x}))\mathbf{G}'(\mathbf{x})$ og sjekker hva som skjer med hver enkelt komponent. Når vi nå skal bevise kjerneregelen, holder det derfor å bevise kjerneregelen på matrisform.

T2.2.51 Kjerneregelen på matrisform Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ og to funksjoner $\mathbf{G} : A \rightarrow B$, $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathbb{R}^k$. Dersom \mathbf{G} er deriverbar i punktet $\mathbf{a} \in A$ og \mathbf{F} er deriverbar i punktet $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a})$, så er den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ deriverbar i \mathbf{a} , og Jacobi-matrisen til \mathbf{H} er gitt ved

$$\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})$$

Bevis: Dette beviset er ikke så vanskelig når man har forstått ideen, men det er langt og litt kronglete. Ideen er å bruke setning T2.2.46 med $\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ i rollen som matrisen B . Alt vi da behøver å vise, er at funksjonen

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{H}(\mathbf{a}) - (\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a}))\mathbf{r} \quad (2.6)$$

tilfredsstiller kravet

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

For å vise dette, må vi bruke at \mathbf{G} og \mathbf{F} er deriverbare. Siden \mathbf{G} er deriverbar i \mathbf{a} , vet vi at funksjonen

$$\sigma_1(\mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{G}(\mathbf{a}) - \mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r} \quad (2.8)$$

tilfredsstiller kravet

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \sigma_1(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Siden \mathbf{F} er deriverbar i $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a})$, vet vi tilsvarende at funksjonen

$$\sigma_2(\mathbf{s}) = \mathbf{F}(\mathbf{b} + \mathbf{s}) - \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}'(\mathbf{b})\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a}) + \mathbf{s}) - \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) - \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{s} \quad (2.10)$$

tilfredsstiller kravet

$$\lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{s}|} \sigma_2(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Vi setter $\mathbf{s} = \mathbf{G}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{G}(\mathbf{a})$. Da er $\mathbf{G}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{a}) + \mathbf{s}$, og fra (2.8) ser vi dessuten at $\mathbf{s} = \mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r} + \sigma_1(\mathbf{r})$. Dermed er

$$\mathbf{H}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a} + \mathbf{r})) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a}) + \mathbf{s}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) + \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{s} + \sigma_2(\mathbf{s})$$

der vi i siste trinn har brukt (2.10). Siden $\mathbf{s} = \mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})$, gir dette videre

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) &= \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) + \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))(\mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})) + \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s}) \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r} + \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})\end{aligned}$$

Sammenligner vi dette med (2.6), ser vi at

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})$$

Ifølge (2.7) er vår oppgave dermed å vise at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Vi tar ett ledd av gangen. Fra setning T2.1.28 vet vi at

$$|\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})| \leq \|\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\| |\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})|$$

der $\|\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\|$ bare er et fast tall (normen til matrisen $\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))$). Dermed har vi

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})) \right| \leq \|\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\| \frac{|\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})|}{|\mathbf{r}|} \rightarrow 0$$

siden $\frac{\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \mathbf{0}$ når $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$. Dette viser at den første delen av uttrykket i (2.12) går mot $\mathbf{0}$. Den andre delen

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$$

er litt verre. Vi legger først merke til at siden $\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, har vi ingen problemer med tilfellet $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Vi kan derfor anta at $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, og multiplisere uttrykket $\frac{1}{|\mathbf{r}|} \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})$ med $|\mathbf{s}|$ i teller og nevner:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{r}|} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})}{|\mathbf{s}|}$$

Når $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$, vil $\mathbf{s} = \mathbf{G}(\mathbf{a})\mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0}$, og dette medfører at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})}{|\mathbf{s}|} = \lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})}{|\mathbf{s}|} = \mathbf{0}$$

ifølge (2.11). Det gjenstår derfor å vise at faktoren $\frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{r}|}$ er begrenset og ikke kan gå mot uendelig. Bruker vi at $\mathbf{s} = \mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})$, får vi

$$\frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{r}|} = \frac{|\mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})|}{|\mathbf{r}|} \leq \frac{|\mathbf{G}'(\mathbf{a})\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} + \frac{|\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})|}{|\mathbf{r}|} \leq \|\mathbf{G}'(\mathbf{a})\| + \frac{|\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})|}{|\mathbf{r}|}$$

som er begrenset siden $\frac{\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \mathbf{0}$. Dermed har vi vist at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{s})) = \mathbf{0}$$

og beviset er fullført. ■

BEMERKNING: Legg merke til at kjerneregelen garanterer at \mathbf{H} er deriverbar i \mathbf{a} så lenge \mathbf{G} er deriverbar i \mathbf{a} og \mathbf{F} er deriverbar i $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a})$. Siden deriverbarhet kan være vanskelig å sjekke, er denne garantien ofte til stor hjelp i teoretisk arbeid.

Vi skriver også opp den presise formuleringen av kjerneregelen på komponentform:

T2.2.52 Kjerneregelen på komponentform Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ og to funksjoner $\mathbf{G} : A \rightarrow B$, $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathbb{R}^k$. Dersom \mathbf{G} er deriverbar i punktet $\mathbf{a} \in A$ og \mathbf{F} er deriverbar i punktet $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a})$, så er den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ deriverbar i \mathbf{a} , og de partiellderiverte til \mathbf{H} er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) &= \sum_{p=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial u_p}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \frac{\partial G_p}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \\ &= \frac{\partial F_i}{\partial u_1}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \frac{\partial G_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F_i}{\partial u_2}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \frac{\partial G_2}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial u_m}(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \frac{\partial G_m}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Bevis: Som vi allerede har sett, følger denne formuleringen direkte fra matrikseformen når man utfører matrisemultiplikasjonen og sammenligner koeffisientene på begge sider av likhetstegnet. ■

Oppgaver

32. La $f(u, v) = u^2 + v$, $g(x, y) = 2xy$, $h(x, y) = x + y^2$. Bruk kjerneregelen til å finne de partiellderiverte av $k(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.
33. La $f(u, v) = u \cdot e^{-v}$, $g(x, y, z) = 2xy + z$, $h(x, y, z) = 2y(z + x)$. Bruk kjerneregelen til å finne de partiellderiverte av $k(x, y, z) = f(g(x, y, z), h(x, y, z))$.
34. Bruk kjerneregelen til å regne ut $\frac{\partial h}{\partial x_2}$ og $\frac{\partial h}{\partial x_3}$ i eksempel T2.2.47.
35. Bruk kjerneregelen til å regne ut $\frac{\partial h}{\partial v}$ i eksempel T2.2.48.
36. Vi har to funksjoner $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Anta at $\mathbf{G}(1, -2) = (1, 2, 3)$ og at

$$\mathbf{G}'(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}'(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Finn Jacobi-matrisen til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ i punktet $(1, -2)$.

37. Vi har to funksjoner $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Anta at $\mathbf{G}(-1, -2, 1) = (2, 4)$ og at

$$\mathbf{G}'(-1, -2, 1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}'(2, 4) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finn Jacobi-matrisen til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ i punktet $(-1, -2, 1)$.

38. To vareslag konkurrerer om det samme markedet. Etterspørselen E_1 etter det første vareslaget varierer med prisene p_1 og p_2 på begge vareslagene. Vi har altså en funksjon $E_1 = E_1(p_1, p_2)$.

Anta at vi vet hvordan prisene $p_1 = p_1(t)$ og $p_2 = p_2(t)$ varierer med tiden. Vis at etterspørselens variasjon med tiden kan uttrykkes ved

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{\partial E_1}{\partial p_1} p_1'(t) + \frac{\partial E_2}{\partial p_2} p_2'(t)$$

39. Temperaturen T i et område avhenger av posisjonen; vi kan tenke oss at den er gitt som en funksjon $T = f(x, y)$ av to variable der x og y er vanlige koordinater. Vi innfører nå polarkoordinater r og θ på vanlig måte slik at $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Vi får da temperaturen som en funksjon $T = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ av r og θ .

a) Vis at

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta$$

- b) En radiomerket fugl beveger seg i området. Radiosignalene viser hvordan avstanden r og vinkelen θ varierer med tiden; vi har $r = g(t)$ og $\theta = h(t)$. Vis at temperaturendringene fuglen opplever er gitt ved

$$T'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right) g'(t) + \left(-\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta \right) h'(t)$$

der vi må sette inn $r = g(t)$, $\theta = h(t)$, $x = g(t) \cos h(t)$, $y = g(t) \sin h(t)$.

40. La $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon av $n + 1$ variable og anta at det finnes en deriverbar funksjon $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, g(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$$

for alle x_1, x_2, \dots, x_n . (Tenk deg at $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er det uttrykket du får dersom du løser ligningen $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ med hensyn på y).

a) Vis at

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, g(x_1, x_2, \dots, x_n))}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n, g(x_1, x_2, \dots, x_n))}$$

- b) La $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ der R er en positiv konstant, og anta at $z = g(x, y)$ er en deriverbar funksjon slik at $f(x, g(x)) = 0$. Vis at

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)}$$

Gi en geometrisk tolkning av resultatet.

- c) La $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ der R er en positiv konstant og anta at $z = g(x, y)$ er en deriverbar funksjon slik at $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Vis at

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{g(x, y)}$$

og

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{g(x, y)}$$

Gi en geometrisk tolkning av resultatet.

Lineæravbildninger

I de to siste avsnittene i dette kapitlet skal vi se på to spesielle og nært beslektede typer av funksjoner fra \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^m — lineæravbildninger og affinavbildninger. Vi begynner med definisjonen av lineæravbildninger.

T2.2.53 Definisjon En funksjon $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kalles en *lineæravbildning* dersom vi for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ har:

$$(i) \quad \mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$$

$$(ii) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$$

De aller fleste funksjoner fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m er *ikke* lineæravbildninger, men disse funksjonene er allikevel så viktige at det er en hel gren av matematikken som hovedsakelig handler om dem — denne grenen kalles *lineær algebra*.

La oss begynne med en enkel og nyttig generalisering av definisjonen.

T2.2.54 Setning Anta at $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning. Da er

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_k\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$$

for alle tall $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ og alle vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Bevis: Vi spalter av ett og ett ledd. Siden vi kan oppfatte $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$ som en sum av to ledd $c_1\mathbf{x}_1$ og $c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$, har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) &= \mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}(c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) \\ &= c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}(c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

der vi har brukt de to punktene i definisjonen av lineæravbildning. Vi kan nå spalte av leddet $c_2\mathbf{x}_2$ på akkurat samme måte, og fortsetter vi slik, står vi til slutt igjen med

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_k\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$$

■

Det neste resultatet viser oss at lineæravbildninger finnes:

T2.2.55 Setning Anta at A er en $m \times n$ -matrise. Da er funksjonen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definert ved

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

en lineæravbildning.

Bevis: Etter regnereglene for matrisemultiplikasjon er

$$\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$$

og

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y}).$$

■

T2.2.56 Eksempel Hvis A er 2×3 -matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

får vi en lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved

$$\mathbf{T}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x - 4y + 2z \end{pmatrix}$$

■

Den neste setningen er nok mer overraskende — den sier at det ikke finnes andre lineæravbildninger enn de som er gitt av matriser!

T2.2.57 Setning Anta at $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning. Da finnes det en $m \times n$ -matrise A slik at

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Matrisen A er gitt ved at den j -te søylen er lik $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ der \mathbf{e}_j er den j -te enhetsvektoren

$$\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te komponent}$$

Bevis: Vi begynner med å sette navn på komponentene til $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ (som du vil se, er navnvalget inspirert av resultatet vi skal frem til!):

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Siden enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan uttrykkes ved hjelp av enhetsvektorene på denne måten

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n,$$

har vi ifølge setningen ovenfor

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) + x_2 \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n \mathbf{T}(\mathbf{e}_n) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

der

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dermed er setningen bevist. ■

Vi skal nå se hvordan vi kan bruke resultatet ovenfor på refleksjoner og rotasjoner i planet. Dette er viktige eksempler som du kommer til å få glede av i fremtiden.

T2.2.58 Eksempel Vi skal nå se på avbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som avbilder enhver vektor på sitt speilbilde om x -aksen. Det er lett å overbevise seg om at T er en lineæravbildning, og vi skal bruke setningen ovenfor til å finne den tilhørende matrisen. Siden speilingen er om x -aksen, har vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ifølge setningen ovenfor får vi matrisen til T ved å bruke disse vektorene som søylevektorer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

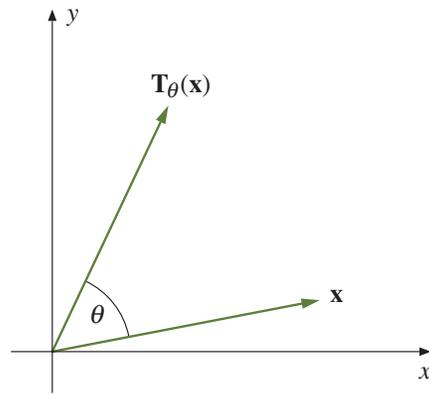
Hvis $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, er dermed

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

■

I eksemplet ovenfor er avbildningen så enkel at det ikke ville by på noe problem å skrive opp formelen for $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ direkte uten å gå veien om $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$ og $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)$. I litt mer kompliserte eksempler blir imidlertid regningene atskillig mer oversiktlige om vi går veien om $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$ og $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)$.

T2.2.59 Eksempel Avbildningen $\mathbf{T}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er gitt ved at den dreier enhver vektor \mathbf{x} en vinkel θ i positiv omløpsretning (se figur T2.2.15).



Figur T2.2.15

Det er ikke vanskelig å overbevise seg om at \mathbf{T}_θ er en lineæravbildning (f.eks. sier regelen $\mathbf{T}_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}_\theta(\mathbf{x}) + \mathbf{T}_\theta(\mathbf{y})$ i dette tilfellet at dersom vi først legger sammen to vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} , og så dreier resultatet en vinkel θ , så får vi det samme som om vi først dreier begge vektorene en vinkel θ , og så legger sammen de nye vektorene). For å finne matrisen til \mathbf{T}_θ må vi beregne $\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_1)$ og $\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_2)$. Dreier vi enhetsvektoren \mathbf{e}_1 en vinkel θ , ender den i punktet $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ (dette er bare definisjonen av cosinus og sinus til generelle vinkler). Dette betyr altså at

$$\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Siden \mathbf{e}_2 ligger en vinkel $\pi/2$ foran \mathbf{e}_1 når vi dreier i positiv retning, får vi

$$\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

(for å få til den siste overgangen kan du enten resonnerer geometrisk eller bruke formlene for sinus og cosinus til en sum). Matrisen til lineæravbildningen \mathbf{T}_θ er altså

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dersom vi dreier en vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en vinkel θ i positiv retning, får vi dermed en ny vektor

$$\mathbf{x}' = A_\theta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

Vi har nå løst den opprinnelige oppgaven vår som var å finne matrisen til lineæravbildningen \mathbf{T}_θ . La oss gå litt videre for å se hva som skjer når vi kombinerer to rotasjoner. Dersom vi dreier en annen vinkel ϕ , får vi selvfølgelig matrisen

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

La oss nå anta at vi først dreier en vinkel θ og deretter en vinkel ϕ . I alt har vi da dreiet en vinkel $\phi + \theta$ tilsvarende matrisen

$$A_{\phi+\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) & -\sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) \end{pmatrix}$$

På den annen side vet vi at når vi gjør to transformasjoner etter hverandre, svarer dette til å multiplisere de tilhørende matrisene med hverandre. Med andre ord må

$$A_{\phi+\theta} = A_\phi A_\theta$$

Skriver vi ut komponentene, ser vi at

$$A_{\phi+\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) & -\sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} A_\phi A_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sammenligner du komponentene i de to uttrykkene, vil du gjenkjenne formlene for sinus og cosinus til en sum. Vi har altså brukt matriser til å gi et nytt bevis for disse formlene. ■

Eigenverdier

Det er ofte et omstendelig arbeid å regne ut $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ for en lineæravbildning \mathbf{T} og en vektor \mathbf{x} . For noen vektorer går det imidlertid raskt — alt vi behøver å gjøre, er å gange vektoren med et tall λ . Slike vektorer kalles *egenvektorer*. Egenvektorer kan bare finnes når \mathbf{T} avbilder et rom inn i seg selv, altså når den går fra et rom \mathbb{R}^n til det *samme* rommet \mathbb{R}^n . Her er den formelle definisjonen:

T2.2.60 Definisjon Anta at $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en lineæravbildning. Vi kaller $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en *egenvektor* for \mathbf{T} dersom det finnes et tall λ slik at

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

Tallet λ kaller vi *egenverdien* til \mathbf{x} .

BEMERKNING: I definisjonen ovenfor har vi knyttet egenvektorer til lineæravbildninger, men vi kunne like godt ha knyttet dem til matriser. Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ er en egenvektor for matrisen A dersom det finnes et tall λ slik at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

T2.2.61 Eksempel La oss undersøke om $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for lineæravbildningen $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ der $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Vi har

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\mathbf{a}$$

så \mathbf{a} er en egenvektor med egenverdi 5.

Gjør vi tilsvarende beregninger for $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, får vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3)\mathbf{b}$$

Altså er \mathbf{b} en egenvektor med egenverdi -3 .

Anta nå at en tredje vektor \mathbf{c} kan skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} , dvs. at det finnes tall x og y slik at $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ (det viser seg faktisk at alle vektorer i \mathbb{R}^2 kan skrives på denne måten). Da er

$$\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}(x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) = x\mathbf{T}(\mathbf{a}) + y\mathbf{T}(\mathbf{b}) = 5x\mathbf{a} - 3y\mathbf{b}$$

Det viser seg altså at ikke bare egenvektorene selv, men også deres lineærkombinasjoner kan behandles på en enkel måte. ■

Observasjonen i slutten av eksemplet ovenfor er viktig. Det viser seg at for «de fleste» lineæravbildninger $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ finnes det egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ slik at *enhver* vektor \mathbf{v} kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$$

Hvis egenverdiene er henholdsvis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, får vi da

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{v}) &= \mathbf{T}(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) \\ &= x_1\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) + \dots + x_n\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) \\ &= x_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + x_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\lambda_n\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Bruker vi \mathbf{T} på begge side av dette uttrykket, får vi på tilsvarende måte

$$\mathbf{T}^2(\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mathbf{v})) = x_1\lambda_1^2\mathbf{v}_1 + x_2\lambda_2^2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\lambda_n^2\mathbf{v}_n$$

Fortsetter vi på denne måten, får vi generelt

$$\mathbf{T}^k(\mathbf{v}) = x_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + x_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

Denne formelen forteller oss at dersom vi kjenner egenvektorene og egenverdiene til en lineæravbildning \mathbf{T} , så har vi god oversikt både over \mathbf{T} selv og over alle dens potenser. I mange anvendelser forteller $\mathbf{T}^k(\mathbf{x})$ hvordan et system utvikler seg når vi starter i en tilstand \mathbf{x} og lar tiden gå ($\mathbf{T}^1(\mathbf{x})$ er tilstanden etter ett tidsintervall, $\mathbf{T}^2(\mathbf{x})$ tilstanden etter to tidsintervaller osv.) Formelen ovenfor forteller oss da at veksten til systemet

hovedsakelig er bestemt av den største egenverdien (eller, for å være helt presis, den egenverdien som har størst tallverdi).

Vi skal foreløpig ikke komme nærmere inn på hvordan man kan finne egenverdier i praksis. Det er likevel viktig å vite litt om begrepet og dets anvendelser siden det vil gjøre det lettere å forstå hensikten med mye av teorien som kommer senere.

BEMERKNING: Ser du nøyer på definisjon T2.2.60, vil du se at den er litt upresis når det gjelder hva slags tall egenverdien λ skal være og hva slags vektor egenvektoren \mathbf{x} skal være. Det viser seg at det finnes reelle matriser som har komplekse egenverdier og egenvektorer. Om man vil «regne med» disse avhenger av problemstillingen man ser på — i noen tilfeller er det nyttig å ha dem med, i andre tilfeller må man ekskludere dem. Situasjonen minner om den vi har for ligninger av n -te grad; noen ganger er det nyttig å ha med de komplekse løsningene og andre ganger ikke.

T2.2.62 Eksempel Dersom θ ikke er multiplum av π , viser det seg at rotasjonsmatrisene

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ikke har reelle egenvektorer og egenverdier. De har imidlertid de komplekse egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

med tilhørende egenverdier $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ og $\lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$. La oss sjekke dette for λ_1 og \mathbf{v}_1 :

$$\begin{aligned} A_\theta \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + i \sin \theta \\ \sin \theta - i \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

Du kan på tilsvarende måte sjekke at $A_\theta \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$. ■

Oppgaver

41. Finn matrisen til lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{T}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + y - 3z \end{pmatrix}$.

42. En lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tilfredsstiller

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Finn matrisen til \mathbf{T} .

43. La $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Finn $\mathbf{T}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

44. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om y -aksen. Finn matrisen til \mathbf{T} .

45. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fordobler alle annenkomponenter, men endrer ikke førstekomponenter. Finn matrisen til \mathbf{T} .
46. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gjør alle vektorer dobbelt så lange og dreier dem en vinkel θ i positiv retning. Finn matrisen til \mathbf{T} .
47. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avbilder alle vektorer på sin projeksjon ned i xy -planet. Finn matrisen til \mathbf{T} .
48. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ speiler alle vektorer om x -aksen og dreier dem deretter en vinkel θ i positiv retning. Finn matrisen til \mathbf{T} (det kan være lurt å tenke på \mathbf{T} som sammensetningen av to enklere avbildninger).
49. La A_θ være rotasjonsmatrisen i eksempel T2.2.59. Forklar at $A_{-\theta}$ er den inverse matrisen til A_θ uten å regne. Kontroller ved å regne ut $A_\theta A_{-\theta}$.
50. \mathcal{L} er linjen gjennom origo som fremkommer når vi dreier x -aksen en vinkel θ i positiv retning. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ speiler alle punkter om linjen \mathcal{L} . La A_ϕ være matrisen til avbildningen som dreier alle vektorer en vinkel ϕ i positiv retning, og la B være matrisen til avbildningen som speiler alle punkter om x -aksen. Forklar at matrisen C til T er gitt ved

$$C = A_\theta B A_{-\theta}$$

og bruk denne formelen til å finne C .

51. La $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- a) Finn tall x, y, z, u slik at $\mathbf{e}_1 = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ og $\mathbf{e}_2 = z\mathbf{a} + u\mathbf{b}$.
- b) Lineæravbildningen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $T(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Finn $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$.
- c) Finn matrisen til \mathbf{T} .
52. a) Finn tall x, y slik at $\mathbf{e}_1 = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ der \mathbf{a}, \mathbf{b} er som i eksempel T2.2.61. Finn $\mathbf{T}^4(\mathbf{e}_1)$ der \mathbf{T} er lineæravbildningen i eksemplet.
- b) Finn tall u, v slik at $\mathbf{e}_2 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. Finn $\mathbf{T}^4(\mathbf{e}_2)$. Hva er matrisen til \mathbf{T}^4 ?
53. Fullfør eksempel T2.2.62 ved å sjekke at \mathbf{v}_2 er en egenvektor med egenverdi λ_2 .
54. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda_1 = 3$.
- b) Vis at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda_1 = -1$.
- c) La $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Finn tall x, y slik at $\mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$. Regn ut $A^{10}\mathbf{a}$.
55. Anta at $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tilfredsstiller

$$\mathbf{F}(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{y})$$

for alle $c, d \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Vis at \mathbf{F} er en lineæravbildning.

56. Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$) ikke er parallelle, og la $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ være to vektorer i \mathbb{R}^2 . Vis at de finnes nøyaktig én lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$ og $\mathbf{T}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$.

Affinavbildninger

Som vi så i eksemplene i forrige avsnitt, er lineæravbildninger ofte nyttige når vi skal beskrive geometriske transformasjoner som refleksjoner og rotasjoner. De har imidlertid en stor svakhet; siden en lineæravbildning alltid tilfredsstiller $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, kan ikke lineæravbildninger brukes til å forskyve figurer i planet. Vi skal nå utvide klassen av avbildninger slik at vi også kan behandle forskyvninger (eller *translasjoner* som matematikere liker å kalle dem).

T2.2.63 Definisjon En funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kalles en *affinavbildning* dersom det finnes en $m \times n$ -matrise A og en vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Vi kaller A *matrisen* til \mathbf{F} og \mathbf{c} *konstantleddet* til \mathbf{F} .

Vi ser at lineæravbildninger rett og slett er affinavbildninger med konstantledd \mathbf{c} lik $\mathbf{0}$. Vi ser også at translasjonen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ som forskyver alle vektorer en distanse \mathbf{c} , er en affinavbildning siden den kan skrives

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = I_n \mathbf{x} + \mathbf{c}$$

(husk at I_n er $n \times n$ -identitetsmatrisen og at $I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$).

En viktig egenskap ved affinavbildninger er at de avbilder rette linjer på rette linjer. La oss være helt sikre på at vi skjønner hva dette betyr. Anta at \mathcal{L} er den rette linjen i \mathbb{R}^n som går gjennom punktet \mathbf{a} og har retningsvektor \mathbf{b} (det betyr at \mathcal{L} er samlingen av alle punkter på formen $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ slik vi så i seksjon 1.3). Dersom \mathbf{F} er en kontinuerlig funksjon fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m , kan vi bruke \mathbf{F} på alle punktene som ligger på linjen \mathcal{L} . Vi får da en samling av punkter i \mathbb{R}^m som vi kaller *bildet av \mathcal{L} under \mathbf{F}* . Vanligvis vil dette bildet være en kurve i \mathbb{R}^m . Når \mathbf{F} er en affinavbildning, er denne kurven en rett linje.

T2.2.64 Setning Anta at $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$ er en affinavbildning fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m , og la $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ være parameterfremstillingen til en linje \mathcal{L} i \mathbb{R}^n . Dersom $A\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, vil bildet av \mathcal{L} under \mathbf{F} være linjen i \mathbb{R}^m som går gjennom punktet $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ og har retningsvektor $A\mathbf{b}$.

Bevis: Vi ser at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = A(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + \mathbf{c} = A\mathbf{a} + \mathbf{c} + t(A\mathbf{b}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + t(A\mathbf{b})$$

som er parameterfremstillingen til en rett linje om går gjennom punktet $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ og har retningsvektor $A\mathbf{b}$. ■

BEMERKNING: Dersom $A\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ser vi at bildet av \mathcal{L} degenererer til ett eneste punkt. Legg også merke til at dersom vi bruker \mathbf{F} på to parallelle linjer (dvs. to linjer med samme retningsvektor \mathbf{b}), så blir også de resulterende linjene parallelle (fordi de får samme retningsvektor $A\mathbf{b}$).

La oss nå se på Jacobi-matrisen til en affinavbildning \mathbf{F} . Anta at \mathbf{F} er gitt ved $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$ der

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Skriver vi ut definisjonen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$ på komponentform, får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + c_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deriverer vi den i -te komponenten F_i med hensyn på den j -te variabelen x_j , får vi

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + c_i) = a_{ij}$$

Dette betyr at Jacobi-matrisen til en affinavbildning \mathbf{F} rett og slett er matrisen A til \mathbf{F} .

T2.2.65 Setning Anta at affinavbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er gitt ved $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$. Da er Jacobi-matrisen til \mathbf{F} lik matrisen A til \mathbf{F} .

Linearisering

Til slutt i denne seksjonen skal vi se hvordan vi kan bruke affinavbildninger til å generalisere tangentbegrepet fra funksjoner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ til funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Husk at hvis $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon av én variabel, er tangenten $T_a f$ i punktet a gitt ved

$$T_a f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Starter vi isteden med en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, kan vi på tilsvarende måte definere en funksjon $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ ved å etterligne uttrykket ovenfor:

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Ganger vi ut parentesen, får vi

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{x}$$

som viser at $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er en affinavbildning med matrise $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$ og konstantledd $\mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{a}$.

T2.2.66 Definisjon Anta at $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable som er deriverbar i punktet \mathbf{a} . Affinavbildningen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gitt ved

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

kalles *lineariseringen* til \mathbf{F} i punktet \mathbf{a} .

Legg merke til at $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$. Siden vi allerede har observert at matrisen til affinavbildningen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$, vet vi fra setning T2.2.65 at Jacobi-matrisen til $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$. Dette betyr at lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ har samme verdi og samme deriverte i punktet \mathbf{a} som den opprinnelige funksjonen \mathbf{F} . Dette er akkurat samme egenskap som tangenten har for funksjoner av én variabel. En annen viktig (og nært beslektet) egenskap ved tangenten er at den er linjen som smyer seg tettest inntil funksjonsgrafene til f i nærheten av punktet a . Vi skal snart vise en tilsvarende egenskap for lineariseringen — at den er affinavbildningen som ligger tettest opptil \mathbf{F} i nærheten av \mathbf{a} . Men før vi gjør dette, kan det være lurt å kikke på et eksempel.

T2.2.67 Eksempel Vi skal finne lineariseringen til funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ 2xyz \end{pmatrix}$$

i punktet $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. La oss først regne ut Jacobi-matrisen til \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{pmatrix}$$

I punktet \mathbf{a} har vi dermed

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(1, -2, -1) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \cdot (-2) & 1^2 & 0 \\ 2 \cdot (-2) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi har også

$$\mathbf{F}(1, -2, -1) = \begin{pmatrix} 1^2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi kan nå regne ut lineariseringen. Med $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ får vi:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x + y \\ 4x - 2y - 4z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4 \\ 4x - 2y - 4z - 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Altså er

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4x + y + 4 \\ 4x - 2y - 4z - 8 \end{pmatrix}$$

■

La oss vende tilbake til resultatet vi annonserte ovenfor, det som sier at lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er den affinavbildningen som ligger tettest opptil \mathbf{F} i nærheten av \mathbf{a} . Et punkt \mathbf{x} i nærheten av \mathbf{a} kan vi skrive $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{r}$ der \mathbf{r} er liten. Vi ønsker å vise at differensen $\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r})$ er liten sammenlignet med $|\mathbf{r}|$ for små \mathbf{r} , og at tilnærmingen blir bedre og bedre når \mathbf{r} går mot $\mathbf{0}$. En naturlig måte å formulere dette på er å kreve at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r})) = \mathbf{0}$$

Bruker vi at

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})((\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r}$$

ser vi at

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$$

der $\boldsymbol{\sigma}$ er som i definisjon T2.2.42. Nå er det ikke så vanskelig å formulere og bevise resultatet.

T2.2.68 Teorem Anta at $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable som er deriverbar i punktet \mathbf{a} , og la $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ være lineariseringen til \mathbf{F} i \mathbf{a} . Da er

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r})) = \mathbf{0}$$

Det finnes ingen annen affinavbildning $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ slik at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{G}(\mathbf{a} + \mathbf{r})) = \mathbf{0}$$

Bevis: Det følger av definisjonen av deriverbarhet (definisjon T2.2.42) og regningene ovenfor at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r})) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Dermed er første del av teoremet bevist. For å bevise den andre delen, antar vi at $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ er en affinavbildning slik at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{G}(\mathbf{a} + \mathbf{r})) = \mathbf{0}$$

Vi må vise at $\mathbf{G} = T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$. Siden \mathbf{G} er en affinavbildning, vet vi at $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$ for en matrise A og en vektor \mathbf{c} . Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{G}(\mathbf{a} + \mathbf{r})) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - A\mathbf{a} - A\mathbf{r} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

Skal dette være mulig, må $\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - A\mathbf{a} - A\mathbf{r} - \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{0}$ når $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$, og det er bare tilfellet hvis $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = A\mathbf{a} + \mathbf{c}$. Setter vi $A\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{F}(\mathbf{a})$ inn i det siste uttrykket ovenfor, ser vi at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - A\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

og ifølge setning T2.2.46 er det bare mulig dersom $A = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$. Siden vi allerede vet at $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = A\mathbf{a} + \mathbf{c}$, følger det at $\mathbf{c} = \mathbf{F}(\mathbf{a}) - A\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{a}$. Dermed er

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

■

Det som er viktigst å ta med seg fra teoremet ovenfor, er at lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er en svært god tilnærming til \mathbf{F} i området rundt \mathbf{a} .

BEMERKNING: Du har kanskje lurt på hvorfor $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ kalles en *linearisering* og ikke en *affinisering* — $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ er tross alt en affinavbildning og ikke (bortsett fra i helt spesielle tilfeller) en lineæravbildning. Dessverre er bruken av ordparet lineær/affin svært usystematisk og forvirrende; ordene brukes om hverandre på en måte som ikke er lett å få oversikt over. Et annet eksempel på denne vaklingen får du om du betrakter en funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ på formen $f(x) = ax + b$. Når man studerer funksjoner av én variabel, er alle enige om å kalle dette en lineær funksjon, men ifølge terminologien vi nå har innført, er den bare en lineæravbildning hvis $c = 0$; i alle andre tilfeller må vi nøye oss med å kalle den en affinavbildning! Heldigvis er det sjelden at den vaklende terminologibruken skaper misforståelser, men det er greit å vite om den slik at man kan være litt på vakt.

Oppgaver

57. Finn matrisen og konstantleddet til affinavbildningen

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z - 7 \\ -x + z - 2 \end{pmatrix}$$

58. \mathcal{L} er linjen i \mathbb{R}^3 med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er affinavbildningen

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Finn en parametrisering av bildet av \mathcal{L} under \mathbf{F} .

59. Finn lineariseringen til funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy + x \end{pmatrix}$$

i punktet $\mathbf{a} = (-2, 1)$.

60. Finn lineariseringen til funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \sin(xy) \\ xe^y \\ 2x^3 + y \end{pmatrix}$$

i punktet $\mathbf{a} = (2, 0)$.

61. En affinavbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tilfredsstillter $\mathbf{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{F}(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finn matrisen og konstantleddet til \mathbf{F} .

62. Affinavbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dreier enhver vektor en vinkel $\frac{\pi}{4}$ i positiv retning, og flytter den deretter en distanse $(3, -1)$. Finn matrisen og konstantleddet til \mathbf{F} .

63. a) Affinavbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om den vertikale linjen $x = 3$. Finn matrisen og konstantleddet til \mathbf{F} .

b) Affinavbildningen $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om den horisontale linjen $y = -2$. Finn matrisen og konstantleddet til \mathbf{F} .

64. Affinavbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om linjen $y = x + 1$. Finn matrisen og konstantleddet til \mathbf{F} .

65. Anta at punktene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ ikke ligger på samme rette linje, og la $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ være tre punkter i \mathbb{R}^2 . Vis at det finnes nøyaktig én affinavbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ slik at $\mathbf{F}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{F}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$ og $\mathbf{F}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_3$.

Fasit

ADVARSEL: Arbeidet med denne fasiten har gått fortere enn det burde, og feilprosenten er nok litt høyere enn vanlig. Finner du feil eller lurer på om noe er riktig, så send en e-post til lindstro@math.uio.no.

Fasit til seksjon T2.1

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2, 3, 9, -5, -2)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (4, -7, -1, -5, 4)$, $s\mathbf{a} = (3, -6, 12, -15, 3)$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4$
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (7, 2, 5, -8, -5, 3)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (7, -2, 3, 4, -5, 5)$, $s\mathbf{a} = (-28, 0, -16, 8, 20, -16)$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$
5. $\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}$ der $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ og $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.
6. Skalarprodukt: -5 , vinkel: $\theta \approx 109.65^\circ$ 7. $10\sqrt{2}$ 8. ca. 67.8° 9. ca. 31.8° .
10. ca. 70° , $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$ 11. $\frac{12}{7}\sqrt{14}$ 12. $(4, 3) = (2, 4) + (2, -1)$
13. $(2, 2, 1) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$ 14. 30° og 45° , $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
15. Utallige muligheter, f.eks. $(1, 0, 3)$ og $(0, 1, 2)$. Sjekk dine svar ved å ta skalarproduktet med $(3, 2, -1)$.
17. b) $-\frac{43}{2}$, c) 90° 18. Umulig ifølge trekantulikheten. 19. Umulig ifølge Schwarz' ulikhet.
23. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (-1 + 2t, -1 + 3t, 2 + t)$ (det er mange muligheter)
24. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (-3 + t, -2 - 2t, 5 - t, 8 + 3t)$ (det er mange muligheter). Nei
25. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (2 + t, -1 + 9t, 3 - 5t)$ (det er mange muligheter).
26. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (7 - 5t, -3 + 4t, 2 - 3t, 4 - 5t, -2 + 7t)$ (det er mange muligheter).
27. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (5 + 2t, -2 + t)$ (det er mange muligheter)
28. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (3t, 2 - 2t)$ (det er mange muligheter) 29. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
30. a) Skjæringspunkt $(15, 24)$. b) Skipene kolliderer ikke.
31. a) Ja, kursene til flyene krysser hverandre i punktet $(4000, 4000, 4000)$. b) Nei, flyene kolliderer ikke. De kommer til møtestedet etter henholdsvis 40 sekunder og $\frac{100}{3}$ sekunder.

32. c) ca. 49° og ca. 12.7 m. 34. $\begin{pmatrix} 4 + 5i \\ -3 + 4i \end{pmatrix}$. 35. $|\mathbf{a}| = \sqrt{15}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{19}$ 36. $-1 - i$

39. $2A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $-3B = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -12 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -5 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

40. $4A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 14 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. 41. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 8 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

42. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $(4A - B)^T = \begin{pmatrix} 0 & -19 & 6 \\ 1 & 25 & 2 \end{pmatrix}$

43. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix}$ 44. I: 9.7 tonn, II: 11.8 tonn, III: 7.5 tonn

45. X: 88 vogner, Y: 61 vogner, Z: 51 vogner

48. $\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$ A: 2.6 enheter, B: 7.2 enheter, C: 7.4 enheter, D: 7.4 enheter, E: 5.4 enheter

49. a) $\begin{pmatrix} 0.94 & 0 & 0.01 \\ 0.05 & 0.2 & 0 \\ 0.01 & 0.8 & 0.99 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.846 \\ 0.065 \\ 0.089 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.79613 \\ 0.0553 \\ 0.14857 \end{pmatrix}$ (vi tar med flere siffer enn det som er rimelig for å gjøre svaret lett å kontrollere).

50. a) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 50 & 10 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$ b) Unge 300, unge voksne 250, voksne 0, eldre 3.

51. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.9 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$ b) Per: 45 %, Pål: 46 %, Espen 9 %.

52. a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

53. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 54. $AB = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & 0 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

55. a) AB blir en 8×9 -matrise. b) B er en 3×5 -matrise c) B har 7 søyler

56. a) $AB = \begin{pmatrix} 83 & 62 \\ 72 & 48 \\ 50 & 80 \end{pmatrix}$ b) $AC = \begin{pmatrix} 3 & 81 & 41 \\ 0 & 72 & 32 \\ 21 & 36 & 51 \end{pmatrix}$ c) Uttrykket er ikke definert siden matrisene B og

C ikke har samme dimensjon (dermed er ikke summen $B + C$ definert). d) $(BC)^T = \begin{pmatrix} 6 & 27 \\ 72 & 54 \\ 42 & 69 \end{pmatrix}$

e) $B^T C^T t$ er ikke definert siden B^T er en 2×2 -matrise og C^T er en 3×2 -matrise, så dimensjonene stemmer

ikke overens. f) $(A + C^T)B = \begin{pmatrix} 89 & 86 \\ 153 & 102 \\ 96 & 144 \end{pmatrix}$ g) $B(A^T - 2C) = \begin{pmatrix} 62 & -80 & -38 \\ 9 & -60 & -51 \end{pmatrix}$

58. Vi finner første rad i DE ved å multiplisere første rad i D med matrisen E :

$$(3, 1, 4) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (18, 55, 19).$$

Vi finner andre søyle i DE ved å multiplisere matrisen D med andre søyle i E :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 89 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

Regner du ut hele matriseproduktet på vanlig måte, får du:

$$DE = \begin{pmatrix} 18 & 55 & 19 \\ 51 & 89 & 59 \\ 57 & 66 & 60 \end{pmatrix}$$

59. a) Første og andre søyle i produktmatrisen AB er også like. b) Andre søyle i produktmatrisen AB består også bare av nuller.

60. 4 61. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$

62. a) $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ c) $A\mathbf{y} = C\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

63. a) $M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.05 & 0.1 \\ 0.15 & 0.75 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$ b) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.95 \end{pmatrix}$ c) $K = \begin{pmatrix} 0.73 & 0.2 & 0.13 \\ 0.125 & 0.605 & 0.155 \\ 0.095 & 0.095 & 0.665 \end{pmatrix}.$

Fordeling: A: 258, B: 268.5, C: 313.5 d) Fordeling: A: 282.8, B: 243.3, C: 258.5 (vi tar med flere siffer enn det som er rimelig for å gjøre svaret lett å kontrollere).

67. Matrisene A , B og D er inverterbare med inverse matriser. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix},$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.75 & -0.5 \end{pmatrix}.$ Matrisen C er singulær (siden den har en søyle som bare består av nuller).

68. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 69. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 59 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$

74. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) Multipliserer vi med A^{-1} på begge sider av matriseligningen, får vi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Fasit til seksjon T2.1

1. a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ b) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y \text{ og } x \neq -y\}$

c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$

d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{det ikke finnes et heltall } k \text{ slik at } x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

e) $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{kuleflaten med sentrum i origo og radius } 5\}$

2. a) lukket b) åpen c) hverken lukket eller åpen d) lukket e) åpen f) lukket g) hverken lukket eller åpen h) åpen i) lukket

3. a) $(2, -\frac{3}{2})$ b) $(1, -2)$ c) $(1, 1, e^{-\frac{1}{2}})$ 14. a) 20 b) 1 c) e d) 1

20. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 3y^4$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 12xy^3$ b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + 3x^2}{y}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2 + x^3}{y^2}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x + y^2)$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin(x + y^2)$ d) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ln(xy^2) + x$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2}{y}$

e) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-z}$ og $\frac{\partial f}{\partial z} = -(x + y)e^{-z}$

f) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z^2}{(1 + y^2) \cos^2(x)}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2yz^2 \tan x}{(1 + y^2)^2}$ og $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z \tan x}{1 + y^2}$

g) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{1 + (x + y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{1 + (x + y)^2}$ og $\frac{\partial f}{\partial z} = \arctan(x + y)$

h) $\frac{\partial f}{\partial x} = -(z^2 + u)e^{-x+3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(z^2 + u)e^{-x+3y}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{-x+3y}$ og $\frac{\partial f}{\partial u} = e^{-x+3y}$

21. a) $\nabla f = (2xy, x^2)$ b) $\nabla f = (\cos(xy^2z) - xy^2z \sin(xy^2z), -2x^2yz \sin(xy^2z), -x^2y^2 \sin(xy^2z))$

c) $\nabla f = (w \cos v e^{u \cos v}, -wue^{u \cos v} \sin v, e^{u \cos v})$ d) $\nabla f = \left(\frac{z_2 z_3}{1+z_1^2 z_2^2}, \frac{z_1 z_3}{1+z_1^2 z_2^2}, \arctan(z_1 z_2) + e^{z_3} \right)$

22. a) $f'((1, 2); (3, -1)) = 11$ b) $f'((1, 0); (-1, 1)) = -1$ c) $f'((1, 0, 1); (1, 1, -1)) = -1$

d) $f'((\frac{\pi}{2}, 1, 0); (2, 0, -1)) = -1$

23. a) I retningen gitt av vektoren (24, 173) b) I retningen gitt av vektoren (1, 1, 0) c) I retningen gitt av vektoren (3, 0, -3, 1)

24. Hint: Bruk at $\Delta V \approx V'((r, h); (\Delta r, \Delta h))$ Anslått usikkerhet: $\Delta V \approx 3.8 \text{ m}^3$

25. Tommelfingerregelen gjelder når høyden i centimeter er det dobbelte av vekten i kilo (f.eks. høyde 180 cm og vekt 90 kilo). Er man lettere enn dette, er regelen «for snill» i den forstand at BMI går opp hvis man legger på en kilo og en centimeter.

27. a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x + 4y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \sin y$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x^2 + 4x + 2)e^{x-y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -(x^2 + 2x)e^{x-y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{x-y}$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2z^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -4yz$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y^2$

28. a) $(6xy + 6x^2yz + x^3yz^2)e^{xz}$.

b) $-60x^2y^4 \cos(xyz) + 60x^3y^5z \sin(xyz) + 15x^4y^6z^2 \cos(xyz) - x^5y^7z^3 \sin(xyz)$

$$31. \text{ a) } \mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \quad \text{ b) } \mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2y+z} & x^2e^{x^2y+z} & e^{x^2y+z} \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{pmatrix}$$

$$\text{ c) } \mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} \arctan(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2} & \frac{x^2}{1+x^2y^2} \\ \ln y & \frac{x}{y} \\ y \cos y^2 & x \cos y^2 - 2xy^2 \sin y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ d) } \mathbf{F}'(x, y, z, u) = \begin{pmatrix} y \sin(xu^2) + xyu^2 \cos(xu^2) & x \sin(xu^2) & 0 & 2x^2yu \cos(xu^2) \\ 0 & 0 & 2zu & z^2 \end{pmatrix}$$

$$32. \frac{\partial k}{\partial x} = 8xy^2 + 1, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = 8x^2y + 2y$$

$$33. \frac{\partial k}{\partial x} = 2ye^{-2y(x+z)} - (4xy^2 + 2yz)e^{-2y(x+z)}, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = 2xe^{-2y(x+z)} - 2(2xy + z)(x + z)e^{-2y(x+z)},$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = e^{-2y(x+z)} - 2(2xy^2 + yz)e^{-2y(x+z)}$$

$$34. \frac{\partial h}{\partial x_2} = 54x_1^5x_2^2x_3^2 \sin x_3, \quad \frac{\partial h}{\partial x_3} = 36x_1^5x_2^3x_3 \sin x_3 + 18x_1^5x_2^3x_3^2 \cos x_3$$

$$35. \frac{\partial h}{\partial v} = e^{3uv^3} u \cos(uv) (9v^2 \cos(uv) - 2 \sin(uv)) \quad 36. \mathbf{H}'(1, -2) = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$37. \mathbf{H}'(-1, -2, 1) = \begin{pmatrix} 5 & -13 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad 41. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad 42. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad 43. - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$44. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 45. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 46. \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & -2 \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 2 \cos \theta \end{pmatrix} \quad 47. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$48. \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad 50. \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$51. x = -\frac{3}{7}, y = \frac{1}{7}, z = \frac{1}{7}, u = \frac{2}{7} \quad \text{ b) } \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}, \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \text{ c) } \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$52. \text{ a) } x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}. \mathbf{T}^4(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 353 \\ -136 \end{pmatrix} \quad \text{ b) } u = -\frac{1}{2}, v = \frac{1}{2}. \mathbf{T}^4(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -544 \\ 353 \end{pmatrix} \quad \text{ c) } \begin{pmatrix} 353 & -544 \\ -136 & 353 \end{pmatrix}$$

$$54. \text{ c) } x = 1, y = 2. A^{10}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3^{10} + 2 \\ 3^{10} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59051 \\ 59047 \end{pmatrix} \quad 57. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$58. \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 5t + 11 \\ -4t - 10 \end{pmatrix} \quad 59. T_{\mathbf{a}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -4x + 4y - 10 \\ 2x - 2y + 2 \end{pmatrix} \quad 60. T_{\mathbf{a}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4y \\ x + 2y \\ 24x + y - 32 \end{pmatrix}$$

$$61. \text{ Matrise } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ konstantledd } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 62. \text{ Matrise } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \text{ konstantledd } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$63. \text{ a) Matrise } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ konstantledd } \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ b) Matrise } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ konstantledd } \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$64. \text{ a) Matrise } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ konstantledd } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tom Lindstrøm

Tilleggs kapitler til

Kalkulus

3. utgave

Universitetsforlaget, Oslo

© 3. utgave Universitetsforlaget AS 2006

1. utgave 1995

2. utgave 1996

ISBN-13: 978-82-15-00977-3

ISBN-10: 82-15-00977-8

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning, og kan straffes med bøter eller fengsel.

Boken har egen nettside: www.universitetsforlaget.no/kalkulus

Henvendelser om denne utgivelsen kan rettes til:

Universitetsforlaget AS

Postboks 508 Sentrum

0105 Oslo

www.universitetsforlaget.no

Sats, figurer og formgivning: Arve Michaelsen/Matematisk Sats

Boken er satt med: MathTimes og Times Roman 10/12

Forord

Dette tilleggskapitlet gir en innføring i maksimums- og minimumsproblemer for funksjoner av flere variable. Den første seksjonen konsentrerer seg om vanlige optimeringsproblemer, mens den andre tar for seg optimeringsproblemer med bibetingelser (Lagranges multiplikator metode). Kapitlet er mindre ambisiøst enn de andre kapitlene i *Kalkulus* — det konsentrerer seg om metoder og inneholder ikke fullstendige bevis. Fremstillingen forutsetter at studentene kjenner til vektorer, matriser og partiell derivasjon, men det er ikke nødvendig å ha lest hele tilleggskapittel 2.

Blindern, 14. januar 2009,
Tom Lindstrøm

Innhold

Forord	3
3 Optimering av funksjoner av flere variable	7
3.1 Maksimums- og minimumsproblemer 7	
Stasjonære punkter 7	
Annenderiverttesten 12	
Uoppstilte problemer 16	
Oppgaver 20	
3.2 Lagranges multiplikator metode 25	
Lagranges multiplikator metode med flere bibetingelser 33	
Økonomisk tolkning av Lagrangemultiplikatorer 36	
Oppgaver 38	

Optimering av funksjoner av flere variable

Dette kapitlet er en repetisjon og videreføring av vektorregningen i videregående skole. De fleste begrepene (som vektorer, linjer og parametriserte kurver) vil du kjenne fra før, men noen (som vektorprodukt og determinanter) vil kanskje være nye. I tillegg til vektorregning i to og tre dimensjoner skal vi begynne å se litt på vektorregning i n dimensjoner — et tema som høres mye skumlere ut enn det er!

T3.1 Maksimums- og minimumsproblemer

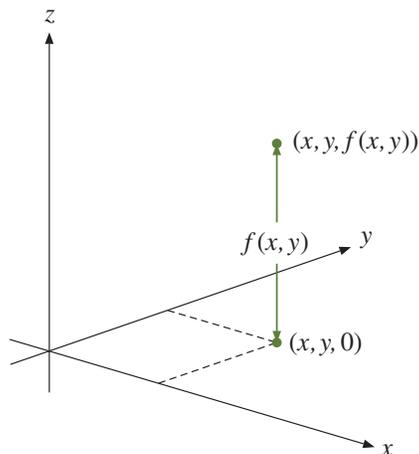
I dette kapitlet skal vi studere to typer maksimums- og minimumsproblemer for funksjoner $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ av flere variable. I den første seksjonen skal vi se på «vanlige» maksimums- og minimumsproblemer der variablene kan ha hvilke som helst verdier i definisjonsområdet til funksjonen, mens vi i neste seksjon skal se hvordan vi kan finne maksimums- og minimumspunkter når det er begrensninger (såkalte *bibetingelser*) på hvilke verdier variablene kan ha.

Stasjonære punkter

Vanligvis er det umulig å gi realistiske, grafiske fremstillinger av funksjoner av flere variable. Det finnes imidlertid ett unntak, og det er når funksjonen går fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R} . Slike grafisk fremstilling er nyttig å kjenne til når man skal studere maksimums- og

minimumsproblemer for funksjoner av flere variable, og vi skal derfor begynne med å forklare hvordan man fremstiller en funksjon $z = f(x, y)$ grafisk.

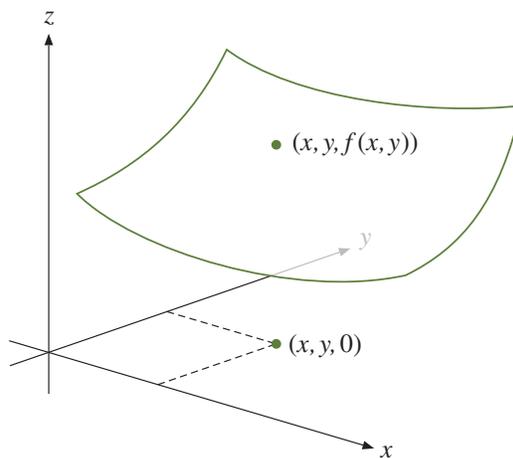
For å tegne funksjonsgrafen lager vi først et tre-dimensjonalt koordinatsystem som vist på figur T3.1.1.



Figur T3.1.1 Plotting av skalarfelt

Gitt variabelverdier x og y , finner vi punktet $(x, y, 0)$ i xy -planet. Vi flytter oss nå loddrett (dvs. parallelt med z -aksen) til vi finner punktet $(x, y, f(x, y))$. Dette er det første punktet på funksjonsgrafen vår. Gjentar vi denne prosedyren for stadig flere variabelverdier (x, y) , vokser grafen etterhvert frem som en flate i rommet (se figur T3.1.2).

Selv om denne prosedyren på en grei måte forklarer hva grafen til et skalarfelt er, så er den i praksis ubrukelig som en oppskrift på hvordan man tegner grafen. Prøver du den, selv på en enkel funksjon, oppdager du fort at du helt mister romfølelsen i bildet. Det finnes bedre metoder for å tegne grafer, men de er ikke så viktige for oss i dette kapitlet — det som er viktig, er at du vet hvordan du kan tenke på grafen til f som en flate.



Figur T3.1.2 Grafisk fremstilling av skalarfelt

La oss nå definere det vi er på jakt etter. Dersom $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon av m variable, sier vi at $\mathbf{a} \in A$ er et (*globalt*) *maksimumspunkt* for f i A dersom $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in A$. Tilsvarende kaller vi $\mathbf{a} \in A$ et (*globalt*) *minimumspunkt* for f i

A dersom $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in A$. Et maksimumspunkt er altså et punkt der funksjonen har sin største verdi, mens et minimumspunkt er et punkt der funksjonen har sin minste verdi. Vi bruker *ekstremalpunkt* som er fellesnavn på maksimumspunkter og minimumspunkter.

Før vi ser på metoder for å finne maksimums- og minimumspunkter for funksjoner av flere variable, skal vi kaste et raskt blikk på et teorem som garanterer eksistensen av slike punkter under visse forutsetninger. Fra teorien for funksjoner av én variabel kjenner vi ekstremalverdisetningen (se setning 5.3.5 i *Kalkulus*) som sier at en kontinuertlig funksjon definert på et lukket, begrenset *intervall* alltid har maksimums- og minimumspunkter. Det finnes en tilsvarende ekstremalverdisetning for funksjoner av flere variable. Den sier at alle kontinuertlige funksjoner definert på lukkede, begrensede *mengder* har maksimums- og minimumspunkter (Husker du ikke hva en lukket mengde er, så se definisjon T2.2.2 i tilleggskapittel 2. En mengde begrenset dersom det finnes et tall $K \in \mathbb{R}$ slik at $|\mathbf{x}| \leq K$ for alle $\mathbf{x} \in A$).

T3.1.1 Ekstremalverdisetningen Anta at A er en lukket, begrenset delmengde av \mathbb{R}^m og at $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuertlig. Da har f minimumspunkter og maksimumspunkter i A .

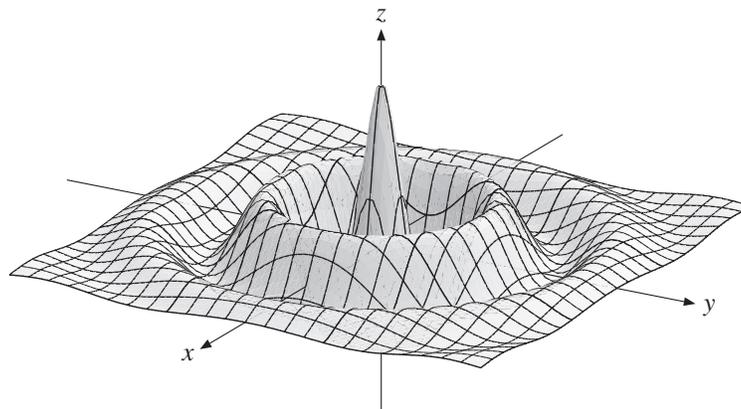
Ekstremalverdisetningen er hovedsakelig et teoretisk verktøy, men den har også en viss praktisk nytte når vi skal argumentere for at punkter vi tror muligens kan være ekstremalpunkter, virkelig er det. For å finne frem til disse «mulige ekstremalpunktene» trenger vi imidlertid andre teknikker. Før vi beskriver dem, kan det være nyttig å minne om hvordan vi finner ekstremalpunktene til funksjoner av én variabel.

Det første vi gjør er å lete etter *lokale* maksimums- og minimumspunkter ved å derivere funksjonen og finne alle punkter der den deriverte er 0. Deretter undersøker vi hva slags punkter vi har funnet ved enten å se på fortegnskiftet til den førstederiverte eller på fortegnet til den annenderiverte. Til slutt sammenligner vi funksjonsverdiene i de lokale maksimums- og minimumspunktene for å finne de globale ekstremalpunktene vi egentlig er på jakt etter.

Vi skal følge akkurat samme strategi i det flervariable tilfellet, men siden geometrien er rikere, blir teknikkene litt mer kompliserte. La oss begynne med å definere de *lokale* ekstremalpunktene som vi først skal lete etter (husk at *snittet* $C \cap D$ av to mengder C og D består av de punktene som er med i *både* C og D):

T3.1.2 Definisjon La $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ være en funksjon av m variable. Vi sier at $\mathbf{a} \in A$ er et *lokalt maksimumspunkt* for f dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, r)$ med sentrum i \mathbf{a} slik at $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r) \cap A$. Tilsvarende kalles \mathbf{a} et *lokalt minimumspunkt* dersom det finnes en kule $B(\mathbf{a}, r)$ slik at $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r) \cap A$. Vi bruker *lokale ekstremalpunkter* som et fellesnavn på lokale maksimums- og minimumspunkter.

Lokale maksimumspunkter ser litt forskjellig ut ettersom de er indre punkter eller randpunkter. Figur T3.1.3 viser noen av mulighetene. Et lokalt maksimum i det indre kan f.eks. være en «fjelltopp» som den høyeste toppen på figuren, eller det kan være



Figur T3.1.3 Lokale ekstremalpunkter i det indre og på randen

et punkt på en «åskam» som de andre lokale maksimumspunktene i det indre. Det er lett å forstille seg at i begge disse tilfellene må alle de partiellderiverte i punktet være lik 0. Dette behøver imidlertid ikke være tilfellet for lokale maksimumspunkter på randen til området. Grafen i figur T3.1.3 har lokale maksimumspunkter i hjørnene av definisjonsområdet (de fire «flippene» i kanten av figuren), men de partiellderiverte i disse punktene er ikke 0 — punktene ligger i en «skråning» der funksjonen hadde fortsatt å stige hvis den var blitt forlenget på naturlig måte utover sitt definisjonsområde.

I denne seksjonen skal vi stort sett konsentrere oss om jakten på lokale ekstremalpunkter i det indre av definisjonsområdet. I neste seksjon skal vi se på en teknikk som (blant annet) kan brukes til å finne mulige ekstremalpunkter på randen. La oss først vise at det virkelig er tilfellet at de partiellderiverte er null i alle lokale ekstremalpunkter i det indre av området.

T3.1.3 Setning Anta at en funksjon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i et indre punkt \mathbf{a} . Dersom f er deriverbar i \mathbf{a} , må $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, dvs. at $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ for alle i .

Bevis: Vi fører resultatet tilbake til det tilsvarende resultatet for funksjoner av én variabel (*Kalkulus*, setning 6.2.1). Anta at f har et lokalt maksimum i $\mathbf{a} = (a_1, a_1, \dots, a_m)$ (beviset for et lokalt minimum er helt tilsvarende). La g være funksjonen av én variabel definert ved

$$g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, x_i, \dots, a_m)$$

(g er altså funksjonen vi får når vi «fryser» alle variablene i f unntatt den i -te). Da må g ha et lokalt maksimum for $x_i = a_i$, og følgelig er $g'(a_i) = 0$. Per definisjon av partiellderiverte er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = g'(a_i)$, og følgelig er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$. ■

Ved hjelp av setningen ovenfor kan vi innskrenke jakten på mulige maksimums- og minimumspunkter betraktelig.

T3.1.4 Eksempel La oss forsøke å lokalisere eventuelle maksimums- og minimumspunkter for funksjonen

$$f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$$

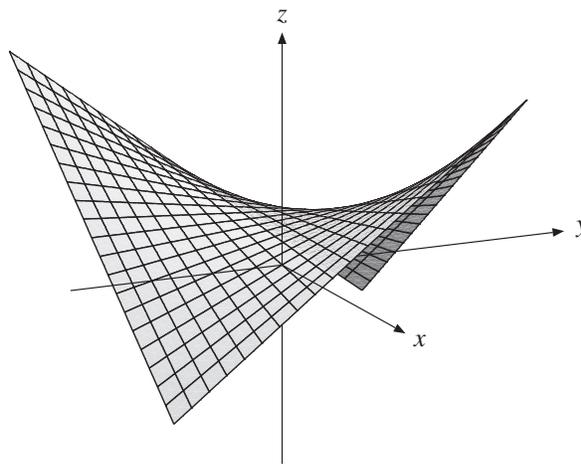
Vi deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Ifølge setningen ovenfor bør vi se etter punkter hvor begge de partiellderiverte er null. Dette gir ligningssystemet

$$3y - 3 = 0 \quad \text{og} \quad 3x + 9 = 0$$

som har løsningen $x = -3$, $y = 1$. Dette betyr at det eneste mulige maksimums- eller minimumspunktet til f er $(-3, 1)$, og at den tilsvarende funksjonsverdien er $f(-3, 1) = 9$.



Figur T3.1.4 Et sadelpunkt

Neste spørsmål er om $(-3, 1)$ virkelig er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt. Vi skal lære en teknikk for å besvare slike spørsmål senere i denne seksjonen, men foreløpig nøyer vi oss med å se på grafen (figur T3.1.4). Den minner litt om en sal (på en hest), og vi ser at «vårt punkt» $(-3, 1)$ ligger på det stedet der man naturlig sitter i salen. Det betyr at punktet $(-3, 1)$ hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum — beveger hvis oss fra punktet i én retning, får vi større verdier, og beveger vi oss i en annen retning, får vi mindre verdier. ■

Eksemplet ovenfor peker på det som skal være hovedproblemstillingen i resten av denne seksjonen: Hvis $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, hvordan avgjør vi da på en effektiv måte om \mathbf{a} er et lokalt maksimum, minimum eller ingen av delene?

La oss begynne med å innføre litt terminologi. Et punkt \mathbf{a} der $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ vil vi kalle et *stasjonært* punkt for funksjonen f . Et stasjonært punkt som hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum, vil vi kalle et *sadelpunkt* (se figur 4 ovenfor). Som vi allerede har vært inne på, er det ikke vanskelig å forstå hvor det siste navnet kommer fra — det punktet du sitter på når du rir på en hest, er et typisk eksempel på et sadelpunkt; det er et minimum når du beveger deg i hestens lengderetning og et maksimum når du beveger deg på tvers av hesten.

Vi tar med et eksempel til på hvordan man finner stasjonære punkter.

T3.1.5 Eksempel

 Finn de stasjonære punktene til

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy - 7x + 3y$$

Vi deriverer:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 7$$

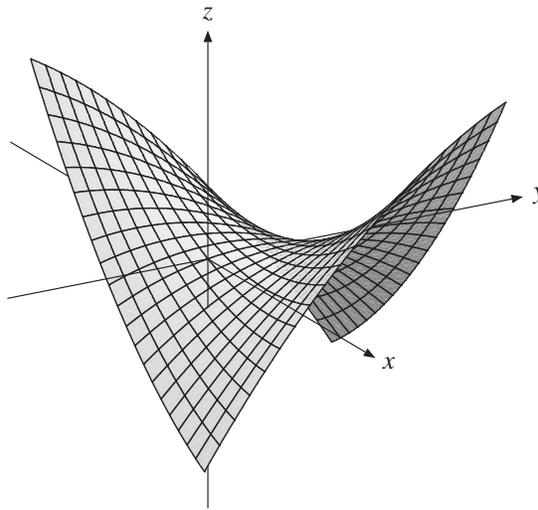
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4x + 3$$

Dette gir ligningene

$$2x + 4y = 7$$

$$4x - 2y = -3$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $x = \frac{1}{10}$, $y = \frac{17}{10}$. Det betyr at punktet $(\frac{1}{10}, \frac{17}{10})$ er et stasjonært punkt for f . Figur T3.1.5 viser grafen, og vi ser at vi også i dette tilfellet har et sadelpunkt.



Figur T3.1.5 Grafen til $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy - 7x + 3y$

Annenderiverttesten

Når vi arbeider med funksjoner av to variable slik som i eksemplene ovenfor, kan vi ofte bruke dataprogrammer eller lommeregnerne til å undersøke om de stasjonære punktene våre er minimumspunkter, maksimumspunkter eller sadelpunkter. Hvis funksjonsgrafene er svært flat i området rundt det stasjonære punktet, kan det imidlertid være vanskelig å avgjøre visuelt hva slags punkt vi har med å gjøre. Arbeider vi med funksjoner av flere enn to variable, er det atskillig verre å bruke visuelle hjelpemidler. Vi trenger derfor en teori som kan hjelpe oss i klassifiseringen av stasjonære punkter.

For funksjoner av én variabel har vi et slikt hjelpemiddel, nemlig *annenderiverttesten*. Den sier at hvis f er en funksjon av én variabel med $f'(a) = 0$, så er a et lokalt minimum dersom $f''(a) > 0$ og at a er et lokalt maksimum dersom $f''(a) < 0$. Når $f''(a) = 0$, gir testen ingen konklusjon. Vårt mål er å lage en tilsvarende test for funksjoner av flere variable. Dette arbeidet er ganske komplisert fordi en funksjon av

flere variable har så mange forskjellige annenderiverte, og de må kombineres på riktig måte for å få en test som virker. Heldigvis skal vi få litt hjelp av lineær algebra og matriser.

Dersom $f(x_1, \dots, x_m)$ er en to ganger deriverbar funksjon av m variable, kan vi skrive opp alle de annenordens partiellderiverte som en $m \times m$ matrise:

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Vi kaller dette *Hesse-matrisen* til f i punktet \mathbf{a} (ikke bland Hesse-matrisen, som er en matrise av annenderiverte til et skalarfelt, sammen med Jacobi-matrisen, som er en matrise av førstederiverte til en vektorvaluert funksjon!). Foreløpig er Hesse-matrisen bare en grei måte å skrive opp de annenordens partiellderiverte på, men det neste resultatet viser at den også har matematisk betydning (dersom du ikke lært om egenverdier ennå, kan du hoppe over dette resultatet og gå videre til korollaret).

Vi vet at dersom de blandede partiellderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ er kontinuerlige, så er de like. Det betyr at Hesse-matrisen $Hf(\mathbf{a})$ er symmetrisk. Et viktig resultat i lineær algebra (det såkalte *spektralteoremet*) sier at $Hf(\mathbf{a})$ da har m reelle egenverdier $\lambda_1(\mathbf{a}), \lambda_2(\mathbf{a}), \dots, \lambda_m(\mathbf{a})$ (flere av dem kan være like). Det viser seg at det er fortegnet til disse egenverdiene som avgjør om et stasjonært punkt er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et sadelpunkt.

T3.1.6 Teorem (Annenderiverttesten) La \mathbf{a} være et stasjonært punkt for en funksjon f av m variable. Anta at de annenordens partiellderiverte til f er kontinuerlige i en omegn om \mathbf{a} . Da gjelder:

- Hvis alle egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er (strengt) positive, så er \mathbf{a} et lokalt minimumspunkt.
- Hvis alle egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er (strengt) negative, så er \mathbf{a} et lokalt maksimumspunkt.
- Hvis $Hf(\mathbf{a})$ har både (strengt) positive og (strengt) negative egenverdier, så er \mathbf{a} et sadelpunkt.

Dersom noen av egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ er null og de andre har samme fortegn, så gir testen ingen konklusjon.

For funksjoner av to variable har annenderiverttesten også en annen form som er enklere å bruke i praksis.

T3.1.7 Korollar (Annenderiverttesten i to variable) La \mathbf{a} være et stasjonært punkt for en funksjon f av to variable. Anta at de annenordens partiellderiverte er kontinuerlige i en omegn om \mathbf{a} . La

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a})$$

og la D være determinanten til Hesse-matrisen: $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Da gjelder:

- (i) Hvis $D < 0$, så er \mathbf{a} et sadelpunkt.
- (ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, så er \mathbf{a} et lokalt minimum.
- (iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, så er \mathbf{a} et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$, gir testen ingen konklusjon.

La oss se hvordan annenderiverttesten virker på noen eksempler. Vi tar først for oss funksjonen fra eksempel T3.1.4 på nytt.

T3.1.8 Eksempel Vi ser altså på funksjonen $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$ som vi allerede har vist har partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Vi vet også at begge de partiellderiverte er null i punktet $(-3, 1)$. For å bruke annenderiverttesten regner vi ut

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

som gir

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Ifølge annenderiverttesten er $(-3, 1)$ et sadelpunkt. ■

La oss se på et litt mer komplisert eksempel:

T3.1.9 Eksempel Vi skal finne de stasjonære punktene til

$$f(x, y) = xye^{x-y^2}$$

og avgjøre om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

Derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot ye^{x-y^2} + xye^{x-y^2} = y(1+x)e^{x-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + xye^{x-y^2}(-2y) = x(1-2y^2)e^{x-y^2}.$$

Siden e^{x-y^2} ikke kan være null, er det nok å løse ligningene

$$\begin{aligned}y(1+x) &= 0 \\x(1-2y^2) &= 0\end{aligned}$$

for å finne de stasjonære punktene. Den første ligningen har to løsninger $x = -1$ og $y = 0$. Setter vi $x = -1$ inn i den andre ligningen, får vi $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Setter vi $y = 0$ inn i den andre ligningen, får vi $x = 0$. Vi har altså tre stasjonære punkter $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(0, 0)$.

Neste skritt er å regne ut de annenderiverte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2} = y(2+x)e^{x-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \cdot (1+x) \cdot e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2}(-2y) = (1+x)(1-2y^2)e^{x-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(-4y)e^{x-y^2} + x(1-2y^2)e^{x-y^2}(-2y) = -2xy(3-2y^2)e^{x-y^2}$$

Vi må undersøke de stasjonære punktene hver for seg.

Det stasjonære punktet $(0, 0)$: Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0(2+0)e^{0-0^2} = 0$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = (1+0)(1-2 \cdot 0^2)e^{0-0^2} = 1$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -2 \cdot 0 \cdot 0(3-2 \cdot 0^2)e^{0-0^2} = 0.$$

Dette gir $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0^2 - 1^2 = -1$. Altså er $(0, 0)$ et sadelpunkt.

Det stasjonære punktet $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$: Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+(-1))e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1+(-1))\left(1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2(-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-3/2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}e^{-3/2} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$, $A > 0$, forteller annenderiverttesten oss at $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ er et lokalt minimum.

Det stasjonære punktet $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$: Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (2 + (-1)) e^{-1 - (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (1 + (-1)) \left(1 - 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right) e^{-1 - (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 0$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2(-1) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(3 - 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right) e^{-1 - (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} \\ &= -2\sqrt{2} e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Dette gir

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-3/2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} e^{-3/2} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Siden $D > 0$, $A < 0$, må $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ være et lokalt maksimum. ■

Uoppstilte problemer

Til slutt i denne seksjonen skal vi se på noen eksempler på uoppstilte minimums- og maksimumsproblemer.

T3.1.10 Eksempel Vi har en 1 meter lang ståltråd som skal deles i maksimalt tre biter. Hver bit skal så bøyes sammen til et kvadrat. Hva er det største og minste samlede areal disse rektanglene kan ha?

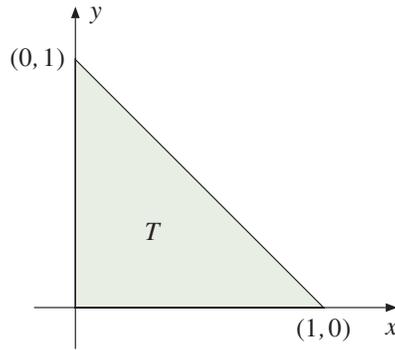
Hvis vi sier at de to første bitene har lengde x og y , må den tredje ha lengde $1 - x - y$. Det totale arealet er dermed (husk at vi må dele lengdene på 4 for å få sidekantene i kvadratene):

$$A(x, y) = \left(\frac{x}{4} \right)^2 + \left(\frac{y}{4} \right)^2 + \left(\frac{1 - x - y}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} (x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2)$$

Det er fristende å sette igang å derivere med en gang, men la oss først se hvilke verdier x og y kan ha. Vi må åpenbart ha $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x + y \leq 1$ (legg merke til at vi godt kan ha $x = 0$, $y = 0$ eller $x + y = 1$ — det svarer bare til at vi deler opp ståltråden i færre enn tre biter). Dette betyr at vi ønsker å maksimere og minimere funksjonen A på området

$$T = \{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \}$$

Dette er trekanten med hjørner $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(0, 1)$ som vist på figur T3.1.6.



Figur T3.1.6

Siden T er en lukket mengde, vet vi fra ekstremalverdisetningen at A har en maksimums- og en minimumsverdi.

Partiellderiverer vi A , får vi

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{16}(2x + 2(1 - x - y)(-1)) = \frac{1}{16}(4x + 2y - 2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{16}(2y + 2(1 - x - y)(-1)) = \frac{1}{16}(2x + 4y - 2)$$

Ligningssystemet $4x + 2y - 2 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$ er lett å løse og gir $x = y = \frac{1}{3}$. Bruker vi annenderiverttesten (gjør det!), ser vi at $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ er et lokalt minimum.

Dette betyr at det eneste potensielle ekstremalpunktet vi har i det indre av T , er et lokalt minimum i $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. For å finne andre kandidater må vi se på randen til T . Den faller naturlig i tre deler, og vi ser på hver del for seg.

Linjestykket fra $(0, 0)$ til $(1, 0)$: På dette linjestykket er $y = 0$, og vi får

$$A(x, 0) = \frac{1}{16}(x^2 + (1 - x)^2) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1$$

Drøfter vi dette uttrykket som en vanlig funksjon av én variabel, finner vi et minimum for $x = \frac{1}{2}$ og maksima for $x = 0$ og $x = 1$. Vi har dermed et mulig minimumspunkt i $(\frac{1}{2}, 0)$ og mulige maksimumspunkter i $(0, 0)$ og $(1, 0)$.

Linjestykket fra $(0, 0)$ til $(0, 1)$: På dette linjestykket er $x = 0$, og vi får

$$A(0, y) = \frac{1}{16}(y^2 + (1 - y)^2) \quad \text{for } 0 \leq y \leq 1$$

Dette er samme uttrykk som ovenfor bare med x byttet ut med y . Vi får derfor et mulig minimumspunkt i $(0, \frac{1}{2})$ og mulige maksimumspunkter i $(0, 0)$ og $(0, 1)$.

Linjestykket fra $(1, 0)$ til $(0, 1)$: På dette linjestykket er $y = 1 - x$, og vi får

$$A(x, 1 - x) = \frac{1}{16}(x^2 + (1 - x)^2) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1$$

Dette er samme uttrykk som i det første punktet ovenfor, og vi finner et minimum for $x = \frac{1}{2}$ og maksima for $x = 0$ og $x = 1$. Vi har dermed et mulig minimumspunkt i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og mulige maksimumspunkter i $(1, 0)$ og $(0, 1)$.

La oss ta en liten oppsummering: Vi har potensielle minimumspunkter i $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ og $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Regner vi ut funksjonsverdiene, får vi $A(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{48}$ og $A(\frac{1}{2}, 0) = A(0, \frac{1}{2}) = A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$. Dette betyr at minimumspunktet er $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ og minimumsverdien $\frac{1}{48}$. Vi får altså minimalt areal når vi deler opp ståltråden i tre like store deler.

På tilsvarende måte har vi de potensielle maksimumspunktene $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(0, 1)$. Regner vi ut funksjonsverdiene, får vi $A(0, 0) = A(1, 0) = A(1, 1) = \frac{1}{16}$. Maksimumsverdiene er altså $\frac{1}{16}$ oppnådd i hjørnene $A(0, 0) = A(1, 0) = A(1, 1)$. Geometrisk representerer disse hjørnene den samme løsningen — vi deler ikke opp ståltråden i det hele tatt, men bøyer den sammen til ett stort kvadrat. ■

Eksemplet ovenfor viser at vi ikke kan neglisjere punktene på randen av definisjonsområdet — det kan hende at det er der det interessante foregår! Det neste eksemplet illustrerer (blant annet) de problemene vi kan støte på når definisjonsområdet *ikke* er begrenset.

T3.1.11 Eksempel Vi skal lage en boks med volum V . Hvordan skal vi ordne oss for at overflatearealet A skal bli minst mulig?

Kaller vi sidekantene x , y og z som vist på figur T3.1.7, ser vi at arealet blir

$$A = 2xy + 2xz + 2yz$$

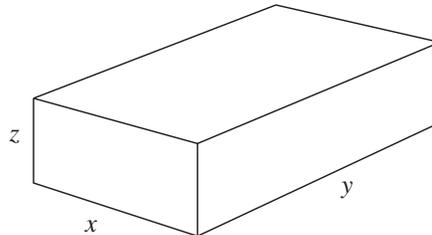
Siden volumet $V = xyz$ er gitt, kan vi eliminere en av variablene

$$z = \frac{V}{xy}$$

Dette gir

$$A(x, y) = 2xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

I dette uttrykket kan x og y være vilkårlige, positive tall.



Figur T3.1.7

Vi deriverer A :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2y - \frac{2V}{x^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x - \frac{2V}{y^2}$$

For å finne de stasjonære punktene, må vi løse ligningen

$$y = \frac{V}{x^2} \quad \text{og} \quad x = \frac{V}{y^2}.$$

Setter vi det første uttrykket inn i det andre, ser vi at

$$x = \frac{V}{\left(\frac{V}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{V}$$

som gir $x = \sqrt[3]{V}$. Dette gir $y = \frac{V}{x^2} = \frac{V}{(\sqrt[3]{V})^2} = \sqrt[3]{V}$. Vi har altså ett stasjonært punkt $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$.

La oss regne ut de annenderiverte:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = 2, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

Dette gir

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 4$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 2$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 4$$

og $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12$. Følgelig er $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ et lokalt minimum. Legg merke til at siden

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[3]{V}} = \sqrt[3]{V}$$

svarer dette lokale minimumet til at vi lar kassen være en kube (alle sider like lange) med overflateareal

$$A = 6 \cdot V^{2/3}$$

La oss oppsummere våre resultater så langt: Vi har vist at funksjonen A bare har ett stasjonært punkt, og det er et lokalt minimum for $x = \sqrt[3]{V}$ og $y = \sqrt[3]{V}$. Dersom det finnes et globalt minimum, må dette være i punktet $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$. Mange vil nok slå seg til ro med at dette betyr at $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ er et globalt minimum, men det finnes faktisk en annen mulighet — det kan tenkes at A nærmer seg en lavere «minimalverdi» enn $6V^{2/3}$ uten noen gang å nå frem til den. Vi skal nå vise at dette ikke kan skje og at $A_0 = 6V^{2/3}$ faktisk er den minste verdien arealet kan ha.

Vi tar utgangspunkt i at uttrykket for arealet

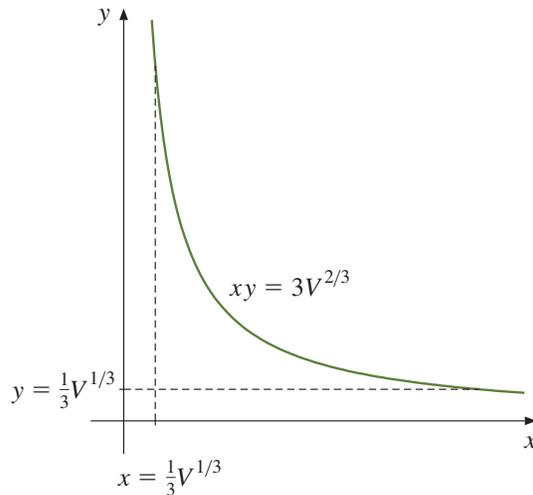
$$A(x, y) = 2xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

består av tre positive ledd $2xy$, $\frac{2V}{y}$ og $\frac{2V}{x}$. Skal arealet være mindre enn A_0 , må i hvert fall hvert av disse leddene være mindre enn A_0 . Begynner vi bakfra, ser vi at skal $\frac{2V}{x}$ være mindre enn A_0 , må

$$x > \frac{2V}{A_0} = \frac{1}{3}V^{1/3},$$

dvs. punktet (x, y) må ligge til høyre for den vertikale linjen $x = \frac{1}{3}V^{1/3}$. Tilsvarende ser vi at skal $\frac{2V}{y}$ være mindre enn A_0 , må

$$y > \frac{1}{3}V^{1/3}$$



Figur T3.1.8

dvs. punktet (x, y) må ligge over for den horisontale linjen $y = \frac{1}{3}V^{1/3}$. Til slutt ser vi at skal $2xy$ være mindre enn A_0 , må

$$xy \leq \frac{A_0}{2} = 3V^{2/3}$$

dvs. punktet (x, y) må ligge under hyperbelen $xy = 3V^{2/3}$.

Kombinerer vi disse kravene, ser vi at (x, y) må ligge i det avgrensede området på figur T3.1.8 dersom det skal være noe håp om at $A(x, y) < A_0 = 6V^{2/3}$. Vi legger også merke til at på randen av det avgrensede området vil $A(x, y) > A_0$ – her er nemlig ett av de tre leddene $2xy$, $\frac{2V}{y}$ og $\frac{2V}{x}$ lik A_0 mens de to andre er positive.

Inkluderer vi randen, er det avgrensede området lukket og begrenset. Ifølge ekstremalverdisetningen i forrige seksjon har A et (globalt) minimumspunkt i dette området. Dette minimumspunktet kan ikke ligge på randen siden verdien på randen hele tiden er større enn verdien A_0 i det indre punktet $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$. Altså må minimumspunktet ligge i det indre, og ifølge setning T3.1.3 må det være et stasjonært punkt. Siden det eneste stasjonære punktet er $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$, må dette være et globalt minimum for A på det avgrensede området. Siden funksjonsverdien utenfor dette området alltid er større enn $A(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$, må $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ være det globale minimumet for A på hele definisjonsområdet. ■

Det siste resonnementet i eksemplet ovenfor er ganske komplisert, og i praktiske oppgaver hender det ofte at man utelater argumenter av denne typen. Isteden argumenterer man for at det ut i fra oppgavens praktiske tolkning må finnes et maksimum eller minimum. I eksemplet ovenfor virker det imidlertid ikke så lett å gi et slikt argument.

Oppgaver

1. Finn de stasjonære punktene til funksjonen:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

c) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 7y$

d) $f(x, y) = xe^{y^2+x}$

e) $f(x, y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$

2. Finn de stasjonære punktene og avgjør om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

b) $f(x, y) = x^2y^2 - 4xy + 6x - 6y$

c) $f(x, y) = e^{x^2+3y^2}$

d) $f(x, y) = \frac{1}{1 - x + y + x^2 + y^2}$

e) $f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$

3. Finn det stasjonære punktet til funksjonen

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 6y$$

og avgjør om det er et lokalt maksimumspunkt, minimumspunkt eller sadelpunkt.

4. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

5. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

6. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = (x + y^2)e^x$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

7. Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

8. (Eksamen i MAT1110, 13/6, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = 2x^2y + 4xy - y^2$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

9. (Eksamen i MAT1110, 13/8, 2007)

a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^x$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

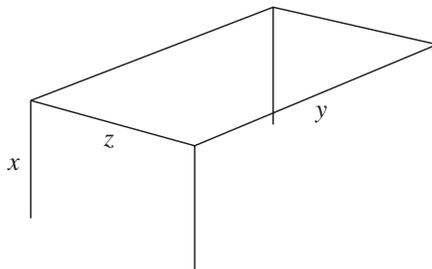
10. La $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

a) Finn de stasjonære punktene til f og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

b) Finn maksimum og minimum til f på området $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 3\}$. Bruk en datamaskin eller en lommeregner til å tegne grafen.

11. Du skal lage en boks med volum V . Boksen skal ha bunn og fire sideflater, men ingen topp. Hvordan skal du lage boksen for at overflatearealet skal bli minst mulig?

12. Du skal lage en ramme av stålrør som skal brukes som reisverk til et telt. Rammen består av fire bein med lengde x festet til et rektangel med sider y og z , se figur under. Lengdene x , y og z måles i meter.



Volumet $V = xyz$ av teltet skal være 500 m^3 . Din oppgave er å lage teltet slik at den totale lengden L av stålrør som går med blir minst mulig.

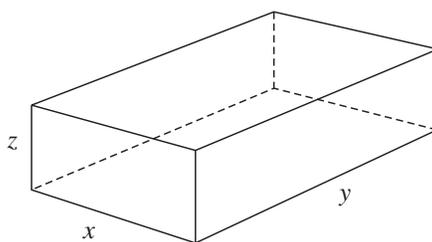
- a) Begrunn at lengden L kan skrives som

$$L(x, y) = 4x + 2y + \frac{1000}{xy}$$

og finn de partiellderiverte $\frac{\partial L}{\partial x}$ og $\frac{\partial L}{\partial y}$.

- b) Bestem de dimensjonene av teltet som gjør total lengden av stålrør minst mulig.

13. Vi skal bygge en rettvinklet kasse uten lokk, se figur nedenfor. Kassen skal ha sidelengder x og y og høyde z . Selve «skjelettet» til kassen skal lages av 12 tynne rør (markert med streker på figuren). Den totale lengden rør vi skal benytte er 56 meter.



- a) Begrunn at arealet A av kassens utside (de fire veggene pluss bunnen) som funksjon av x og y kan skrives

$$A(x, y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy.$$

og finn de partiellderiverte av A . Bestem deretter eventuelle punkter (x, y) der begge de partiellderiverte er null, og avgjør om disse punktene er lokale minimumspunkter for A , lokale maksimumspunkter for A eller ingen av delene.

- b) Finn maksimumsverdien for $A(x, y)$ på området i xy -planet gitt ved $0 \leq x \leq 14$, $0 \leq y \leq 14$. Hvordan bør sidelengdene x og y velges for at arealet av kassens utside skal bli størst mulig? (Begrunn svaret.)

14. (Eksamen i MAT 1100, 9/12, 2005) Oslo kommune planlegger å bygge et akvarium med volum 5000 m^3 . Kostnadene er gitt ved:

Fronten – en glassplate: 1000 kr per m^2 .

Sidekantene – 3 stk i stål: 300 kr per m^2

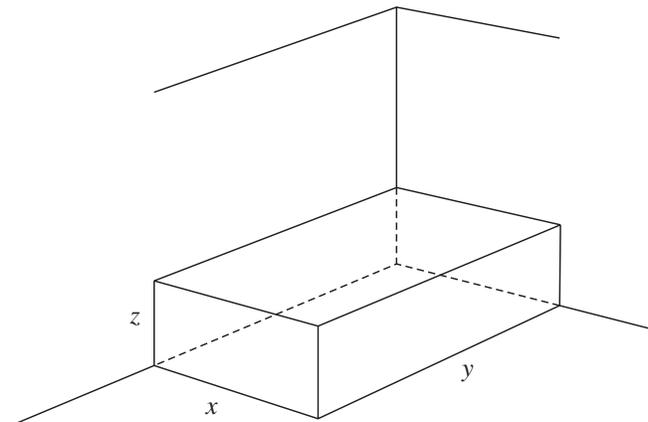
Bunnen – i sement: 500 kr per m^2

Anta glassplaten har lengde l og høyde h . Forklar hvorfor materialene koster

$$f(l, h) = 100 \left(13lh + \frac{30\,000}{l} + \frac{25\,000}{h} \right)$$

Finn l og h som minimaliserer materialkostnadene.

15. Et baderom har takhøyde 3 m og et kvadratisk gulv som er 4 m^2 . I dette rommet skal vi plassere et badekar av lengde x , bredde y og høyde z (målt i meter) og med volum $xyz = \frac{2}{3} \text{ m}^3$. Badekaret skal plasseres i det ene hjørnet av baderommet som vist på tegningen.



Ut i fra dimensjonene på rommet og karet får vi: $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq 2$, $0 < z \leq 3$ (og derfor også $xy = \frac{2}{3z} \geq \frac{2}{9} \text{ (m)}^2$). Vi skal flislegge de to veggene badekaret berører, samt badegulvet, men vi flislegger bare de delene av veggene og gulvet som badekaret ikke dekker. Vi bruker to forskjellige typer fliser til vegger og gulv. Prisen på veggflisene er 90 kr/m^2 og på gulvflisene 60 kr/m^2 . La $P(x, y)$ betegne totalprisen på flisene som funksjon av x og y angitt i kr.

- a) Vis at vi får

$$P(x, y) = 1320 - \frac{60}{x} - \frac{60}{y} - 60xy,$$

og beregn $\frac{\partial P}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$.

- b) For å få oversikt over utgiftene til flisleggingen ønsker vi å finne den verdien av (x, y) som gjør at $P(x, y)$ blir størst mulig. Finn denne verdien av (x, y) og den tilsvarende verdien til P .

16. Det amerikanske postvesenet ekspederer bare pakker der summen av lengde, bredde og høyde er mindre enn 108 tommer. Hva er det største volumet en kasseformet pakke kan ha?
17. En fabrikk produserer to modeller av en vare. Det koster 400 kr å lage standardmodellen og 600 kr å lage luksusmodellen. Undersøkelser viser at når utsalgsprisene for standardmodellen og luksusmodellen er hhv. x og y kroner, så får fabrikkens solgt $5(y - x)$ eksemplarer av standardmodellen og $450\,000 + 500(x - 2y)$ eksemplarer av luksusmodellen. Hvordan skal prisene settes for å maksimere fortjenesten?
18. To bedrifter konkurrerer om å selge nesten identiske varer i samme marked. En økning i produksjonen hos den ene bedriften fører derfor til svikt i inntektene hos den andre. Hvis bedrift A produserer x enheter per måned, og bedrift B produserer y enheter per måned, er de månedlige fortjenestene gitt ved

$$P = 12\,000x - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} \quad \text{for bedrift A}$$

$$Q = 12\,000y - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{6} \quad \text{for bedrift B}$$

- a) Dersom bedriftene ikke samarbeider om å fastsette produksjon, er det naturlig å anta at hver av bedriftene uavhengig av den andre fastsetter sin produksjon slik at egen fortjeneste blir

så stor som mulig. Dessuten antar hver av bedriftene at den andre gjør det samme. Forklar hvorfor produksjonsnivået (x, y) er løsningen av ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Finn fortjenestene til A og B i dette tilfellet.

- b) Bedriftsledelsen i de to bedriftene tror at ved å samarbeide om produksjonsnivået kan de øke den totale fortjenesten til bedriftene. Forklar at det optimale produksjonsnivået nå er løsningen av ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Finn fortjenestene til A og B i dette tilfellet.

- c) Anta at bedriftene i hemmelighet har samarbeidet om å fastsette produksjonsnivået. Etter en stund oppdager bedrift B , som tidligere var mest lønnsom, at bedrift A nå er blitt markedsleder. Bedrift B bestemmer seg derfor for å bryte avtalen uten å si fra til A . Gitt at A fastholder sitt produksjonsnivå fra b), hvordan skal B velge sitt produksjonsnivå for å få størst mulig fortjeneste? Hva blir fortjenestene til A og B i dette tilfellet?

19. I denne oppgaven er $f(x, y) = x^4 + y^4$.

- a) Vis at $(0,0)$ er et stasjonært punkt der Hesse-determinanten D er lik null. Vis at $(0,0)$ er et minimumspunkt for funksjonen.
b) Lag en funksjon $g(x, y)$ der $(0,0)$ er et maksimumspunkt, men hvor Hesse-determinanten i $(0,0)$ er lik null.
c) Lag en funksjon $h(x, y)$ slik at $(0,0)$ er et sadelpunkt, men hvor Hesse-determinanten i $(0,0)$ er lik null.

20. I denne oppgaven skal vi se på noen viktige forskjeller mellom funksjoner av henholdsvis én og flere variable.

- a) La $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon av én variabel og anta at det eneste stasjonære punktet til f er et lokalt maksimum i a . Vis at da er a et globalt maksimum for f .
b) La

$$f(x, y) = 1 - x^2 - (1 + x)^3 y^2$$

Vis at $(0,0)$ er det eneste stasjonære punktet til f .

- c) Vis at $(0,0)$ er et lokalt maksimum, men ikke et globalt maksimum for f . Bruk en datamaskin eller lommeregner til å tegne grafen til f , og tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.
d) La $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon av én variabel og anta at a og b er to lokale maksimumspunkter for f . Vis at det finnes et lokalt minimumspunkt mellom a og b .
e) La

$$g(x, y) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y}$$

Vis at de stasjonære punktene til g er $(-1, 0)$ og $(1, 0)$.

- f) Vis at begge de to stasjonære punktene til g er lokale maksimumspunkter. Bruk en datamaskin eller lommeregner til å tegne grafen til g , og tenk gjennom forskjellen på én og flere dimensjoner.

T3.2 Lagranges multiplikatormetode

I forrige seksjon så vi hvordan vi kan finne de lokale maksimums- og minimumspunktene til en funksjon $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ av flere variable når x_1, x_2, \dots, x_m får lov til å ha *alle* verdiene i definisjonsområdet til f . Vi skal nå se hva som skjer når vi har begrensninger (såkalte *bibetingelser*) på variablene.

I de enkleste problemene av denne typen har vi to funksjoner $f(x, y)$ og $g(x, y)$, og vi ønsker å finne den største og/eller minste verdien til $f(x, y)$ blant de punktene som tilfredsstiller *bibetingelsen* $g(x, y) = b$, der b er en gitt konstant. La oss begynne med et enkelt (men langt!) eksempel.

T3.2.1 Eksempel Vi skal finne maksimums- og minimumsverdien til funksjonen $f(x, y) = xy$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. Setter vi $g(x, y) = x^2 + y^2$, ser vi at dette er en bibetingelse $g(x, y) = 1$ av typen vi beskrev ovenfor. Det er flere måter å løse dette problemet på. Den mest naturlige er kanskje å løse ligningen $x^2 + y^2 = 1$ for y og sette inn (substituere) resultatet i f . Da får vi to optimeringsproblemer med én variabel,

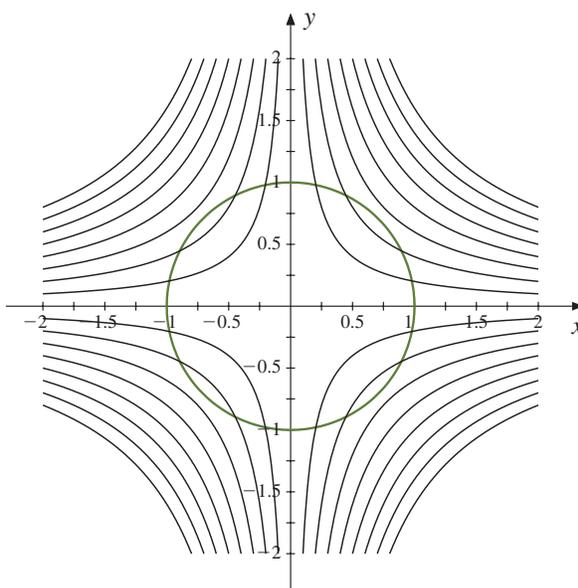
$$h(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

for øvre halvsirkel, og

$$k(x) = -x\sqrt{1-x^2}$$

for nedre halvsirkel. Det er lett å finne maksimumspunktene til disse funksjonene ved vanlige metoder.

Selv om «substitusjonsmetoden» fungerer bra i dette eksemplet, har den en fundamental svakhet. Dersom bibetingelsen er mer komplisert enn $x^2 + y^2 = 1$, klarer vi ikke å løse ligningen for én av variablene, og hele forsøket vårt bryter sammen. Vi ønsker derfor å finne en metode som ikke er basert på at vi løser ligninger og substituerer.

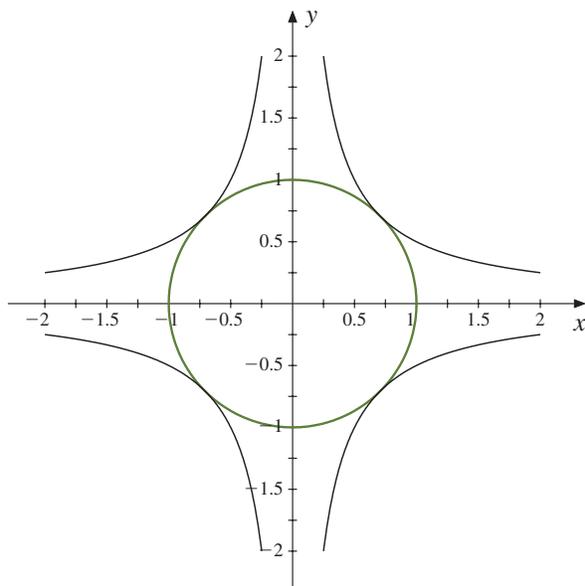


Figur T3.2.1 Nivåkurver og bibetingelseskurve

I figur T3.2.1 har vi tegnet opp punktene som tilfredsstiller bibetingelsene (sirkelen) sammen med noen av nivåkurvene til funksjonen $f(x, y) = xy$. En *nivåkurve* $N_c = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$ er en kurve bestående av alle punkter med en gitt funksjonsverdi

c. Nivåkurvene på figuren tilsvarer funksjonsverdiene fra -1.6 til 1.6 med trinn på 0.2 . Absoluttverdien til funksjonen vokser med x og y , så det er de ytterste nivåkurvene som svarer til høye positive og negative funksjonsverdier (legg merke til at f har positive verdier i første og tredje kvadrant, og negative verdier i annen og fjerde kvadrant).

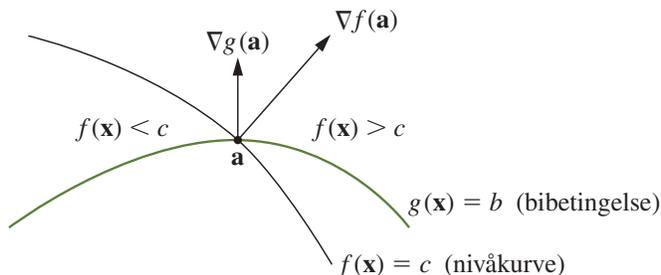
Vi ser at det er noen nivåkurver som ikke skjærer bibetingelseskurven i det hele tatt — de tilsvarer verdier som funksjonen ikke kan ha så lenge vi innskrenker oss til punkter på sirkelen. Nivåkurver som skjærer sirkelen, tilsvarer verdier som funksjonen har på sirkelen. De største og minste verdiene får vi når nivåkurvene bare berører sirkelen og går ut igjen. Figur T3.2.2 viser denne situasjonen.



Figur T3.2.2 Optimale nivåkurver

Nivåkurvene i figur T3.2.2 tilsvarer verdiene $\frac{1}{2}$ (i første og tredje kvadrant) og $-\frac{1}{2}$ (i annen og fjerde kvadrant), så maksimumsverdien til funksjonen på sirkelen er $\frac{1}{2}$ og minimumsverdien er $-\frac{1}{2}$.

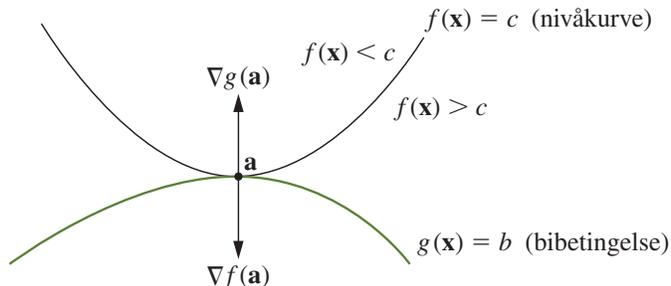
Legg merke til at nivåkurvene i figur T3.2.2 tangerer bibetingelseskurven. Det er lett å innse at dette er et fenomen som ikke bare gjelder i dette eksemplet, men som gjelder generelt når man skal optimere en funksjon $f(x, y)$ under en bibetingelse $g(x, y) = b$ — dersom nivåkurven *krysser* bibetingelseskurven, vil vi normalt ha større verdier på den ene siden av skjæringspunktet og mindre på den andre (se figur T3.2.3).



Figur T3.2.3 a er ikke et ekstremalpunkt under bibetingelsen $g(\mathbf{x}) = b$

Dette betyr at når vi leter etter våre maksimums- og minimumspunkter, så må vi lete etter punkter der nivåkurven *tangerer* bibetingelseskurven, eller – sagt med andre

ord — der normalen til nivåkurven er parallell med normalen til bibetingelseskurven (se figur T3.2.4). Disse normalene er lette å finne siden det viser seg at gradienter alltid står normalt på nivåkurver (prøv å overbevise deg selv om dette — det henger sammen med at gradienten peker i en retningen hvor funksjonen vokser raskest), og bibetingelseskurven er en nivåkurve for funksjonen $g(x, y)$. Vi leter altså etter punkter der de to gradientene $\nabla f(x, y)$ og $\nabla g(x, y)$ er parallelle, dvs. punkter der det finnes et tall λ slik at $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.



Figur T3.2.4 a er et minimumspunkt under bibetingelsen $g(\mathbf{x}) = b$

I eksemplet vårt er

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

og vi er på jakt etter punkter der disse er parallelle, dvs. punkter der det finnes et tall λ slik at

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x \\ x &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Dette gir oss to ligninger med tre ukjente, x , y og λ . Den nye ukjente λ som har sneket seg inn i regnestykket, kalles en *Lagrangemultiplikator* og har gitt navn til hele metoden. I tillegg har vi en tredje ligning siden punktet vårt må tilfredsstille bibetingelsen:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dette ligningssystemet med tre ligninger og tre ukjente kan løses på mange måter. La oss først observere at ingen av de ukjente x , y kan være 0, for hvis den ene er det, må den andre også være det, og da får vi ikke oppfylt ligningen $x^2 + y^2 = 1$. Dette medfører at heller ikke λ kan være 0. Dermed kan vi dele den første av ligningene våre på den andre, og få

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

som gir $y^2 = x^2$. Setter vi dette inn i den tredje ligningen, får vi $2x^2 = 1$ som gir $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden $y^2 = x^2$, får vi også $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dermed har vi fire punkter vi

må se videre på: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Setter vi inn i funksjonen $f(x, y) = xy$, får vi

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

og

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Dette stemmer svært godt med våre grafiske undersøkelser ovenfor, og siden ekstremalverdisetningen forteller oss at funksjonen f må ha maksimums- og minimumspunkter på sirkelen (som er en lukket, begrenset mengde), må vi ha en maksimumsverdi $\frac{1}{2}$ som oppnås i punktene $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og en minimumsverdi $-\frac{1}{2}$ som oppnås i punktene $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. ■

La oss oppsummere eksemplet ovenfor i litt mer generelle vendinger. Vi har en funksjon $f(x, y)$ som vi ønsker å maksimere eller minimere under bibetingelsen $g(x, y) = b$, der b er en konstant. Da må vi lete etter punkter på bibetingelseskurven der $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$. Skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi to ligninger med to ukjente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

I tillegg har vi bibetingelsen

$$g(x, y) = b$$

slik at vi får tre ligninger med tre ukjente. Løser vi dette ligningssystemet, vil vi (under svært generelle betingelser) ha funnet alle potensielle maksimums- og minimumspunkter for problemet vårt.

Vi kan generalisere enda litt lenger. Anta at vi har en funksjon

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

av m variable og en bibetingelse

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

Setter vi opp den samme ligningen $\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ som før og skriver den ut komponentvis, får vi m ligninger med $m+1$ ukjente $x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

.....

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Legger vi til bibetingelsen

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

har vi $m + 1$ ligninger med $m + 1$ ukjente. Igjen viser det seg at dette ligningssystemet gir oss alle mulige maksimums- og minimumspunkter.

BEMERKNING: Ser du i litteraturen, vil du finne at bibetingelsene formuleres litt forskjellig — i noen bøker finner du alltid formen $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$, mens andre tillater $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$ for en vilkårlig $b \in \mathbb{R}$. Egentlig er det ikke noen forskjell på disse formene — har vi et krav av typen $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$, innfører vi bare en ny funksjon

$$\tilde{g}(x_1, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, x_2, \dots, x_m) - b,$$

og dermed har vi en bibetingelse av typen

$$\tilde{g}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

Siden $\nabla \tilde{g} = \nabla g$, blir betingelsene for maksimums-/minimumspunkt uforandret.

T3.2.2 Teorem (Lagranges multiplikator metode med én bibetingelse)

Anta at U er en åpen delmengde av \mathbb{R}^m , og at $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ er to funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. La b være et reelt tall, og anta at $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for f på mengden

$$A = \{\mathbf{x} \in U \mid g(\mathbf{x}) = b\}$$

Dersom $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, finnes det en konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \nabla g(\bar{\mathbf{x}})$$

Legg merke til at det i teoremet er kommet inn en betingelse som vi ikke har nevnt tidligere, nemlig at $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Dette er bare naturlig — dersom $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, bryter vårt geometriske resonnement sammen, og hva som helst kan hende. Vi understreker også at teoremet bare hjelper oss å finne *potensielle* maksimums- og minimumspunkter — et punkt som tilfredsstiller betingelsene, behøver ikke å være noen av delene, men kan være et generalisert sadelpunkt.

La oss se på et eksempel på bruken.

T3.2.3 Eksempel Vi skal finne minimumsverdien til funksjonen

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + y^2 + z^2$$

under bibetingelsen $x^2 + 4y^2 - z = 0$. Legg merke til at problemet har en geometrisk tolkning — vi ønsker å finne det punktet (x, y, z) på flaten $z = x^2 + 4y^2$ som har kortest avstand til punktet $(3, 0, 0)$.

Lar vi $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z = 0$, ser vi at

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siden ∇g aldri er null, slipper vi å bry oss om tilfellet $\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Vi ser videre at

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 6 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Skriver vi ligningen $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ på komponentform, får vi (etter å ha forkortet litt)

$$\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ y &= 4\lambda y \\ 2z &= -\lambda \end{aligned}$$

I tillegg har vi bibetingelsen

$$x^2 + 4y^2 - z = 0$$

En av utfordringene ved Lagranges multiplikator metode er å løse ligningssystemene vi kommer frem til. Ofte er dette ganske krevende fordi ligningssystemene får en uvant form som vi ikke har noen standardmetode for løse. I tilfellet vi nå ser på, kan det være lurt å starte med ligning nummer to, $y = 4\lambda y$. Her er det to muligheter. Dersom $y \neq 0$, må $\lambda = \frac{1}{4}$. Dersom $y = 0$, kan derimot λ være hva som helst. Vi ser på disse tilfellene hver for seg:

Tilfellet $\lambda = \frac{1}{4}$: Den øverste ligningen blir nå til $x - 3 = \frac{1}{4}x$, som gir $x = 4$, og den tredje ligningen gir $z = -\frac{1}{8}$. Setter vi dette inn i den nederste ligningen, får vi

$$16 + 4y^2 + \frac{1}{8} = 0$$

som åpenbart ikke har noen løsning. Tilfellet $\lambda = \frac{1}{4}$ fører derfor ikke frem.

Tilfellet $y = 0$: Vi sitter nå igjen med tre ligninger for x , z og λ , nemlig

$$\begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ 2z &= -\lambda \\ x^2 - z &= 0 \end{aligned}$$

Eliminerer vi z fra de to siste, ser vi at $\lambda = -2x^2$, og setter vi dette inn i den øverste ligningen, sitter vi igjen med $x - 3 = -2x^3$, dvs.

$$2x^3 + x - 3 = 0$$

Vi ser at $x = 1$ er en løsning av denne ligningen. For å undersøke om det finnes flere løsninger, polynomdividerer vi $2x^3 + x - 3$ med $x - 1$, og får $2x^2 + 2x + 3$ som ikke har reelle røtter. Dermed har vi bare én løsning for x , nemlig $x = 1$. Siden $x^2 - z = 0$, følger det at $z = 1$, (det følger også at $\lambda = -2$, men λ er vi egentlig ikke interessert i).

Vi har dermed sett at den eneste løsningen av ligningssystemet er $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. Siden den geometriske tolkningen forteller oss at funksjonen må ha et minimumspunkt, er det dette vi har funnet. ■

BEMERKNING: Som vi allerede har observert, er det ofte krevende å løse ligningssystemene vi får fra Lagranges metode. I praksis bruker man gjerne numeriske teknikker (f.eks. Newtons metode) til å finne løsningene.

I forrige seksjon viste vi hvordan man kan finne lokale maksimums- og minimumspunkter i *det indre* av et område ved å lete etter punkter der alle de partiellderiverte er null. Men hva med eventuelle maksimal- og minimalpunkter på randen til området? De kan vi ofte finne ved hjelp av Lagranges multiplikator metode slik neste eksempel viser.

T3.2.4 Eksempel Vi skal finne maksimums- og minimumspunktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - y^3$$

på området

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

Hvis et slikt punkt ligger i det indre av området, vet vi at de partiellderiverte må være null i punktet. Siden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2,$$

ser vi at det eneste stasjonære punktet er $(0, 0)$ og at $f(0, 0) = 0$. Dette er vår første kandidat til tittelen som maksimums- og minimumspunkt. De andre kandidatene må ligge på randen

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \},$$

så vi bruker Lagranges multiplikator metode med $f(x, y) = x^2 - y^3$ og $g(x, y) = x^2 + y^2$. Vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3y^2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

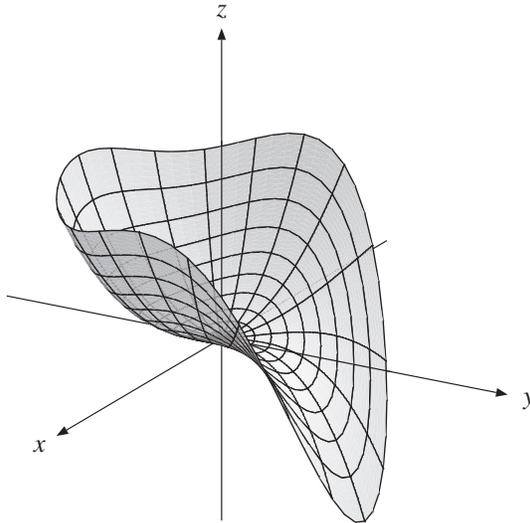
og skriver vi ligningen $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ på komponentform, får vi (etter litt forkorting) ligningssystemet

$$\begin{aligned} x &= \lambda x \\ -3y^2 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Den første ligningen kan oppfylles på to måter, enten er $x = 0$ eller så er $\lambda = 1$. Vi ser på tilfellene hver for seg. Hvis $x = 0$, følger det fra den siste ligningen at $y = \pm 1$. Dette betyr at $(0, \pm 1)$ er mulige ekstremalpunkter. Setter vi isteden $\lambda = 1$, får den andre ligningen i systemet formen $-3y^2 = 2y$. Denne ligningen har to løsninger, $y = 0$ og $y = -\frac{2}{3}$. Setter vi disse løsningene inn i den tredje ligningen, ser vi at $y = 0$ gir $x = \pm 1$ og at $y = -\frac{2}{3}$ gir $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

I alt har vi dermed sju kandidater: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ og $(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$. For å finne maksimum og minimum, regner vi ut alle funksjonsverdiene:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, \pm 1) = \mp 1, \quad f(\pm 1, 0) = 1, \quad f\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{27}$$



Figur T3.2.5 Grafisk fremstilling av flaten $f(x, y) = x^2 - y^3$

Dette viser at maksimumsverdien 1 finner vi i punktene $(0, -1)$, $(\pm 1, 0)$, mens minimumsverdien -1 finner vi i punktet $(0, 1)$.

Figur T3.2.5 viser grafen. Du ser tydelig de tre maksimumspunktene og det ene minimumspunktet. Punktene $(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$ er lokale minimumspunkter når du går fra topp til topp langs randen. Det indre punktet $(0, 0)$ er et sadelpunkt (men du kan ikke vise det ved annenderivertesten siden determinanten D er null). ■

BEMERKNING OM LAGRANGEFUNKSJONER: I mange bøker vil du finne teorien ovenfor fremstilt på en litt annen måte ved hjelp av såkalte *Lagrangefunksjoner*. For å optimere funksjonen $f(x_1, \dots, x_m)$ under bibetingelsen $g(x_1, \dots, x_m) = b$, definerer man *Lagrangefunksjonen*

$$L(x_1, \dots, x_m, \lambda) = f(x_1, \dots, x_m) - \lambda(g(x_1, \dots, x_m) - b)$$

(legg merke til at λ nå er blitt en variabel på linje med x_1, \dots, x_m). La oss glemme det opprinnelige problemet et øyeblikk, og heller finne de stasjonære punktene til L . Regner vi ut de partiellderivate til L , får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_m} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_m} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -g(x_1, \dots, x_m) + b \end{aligned}$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi akkurat de ligningene vi må løse når vi bruker Lagranges multiplikator metode — å bruke denne metoden er altså det samme som å finne de stasjonære punktene til Lagrangefunksjonen! I en del bøker vil du derfor se at man løser optimeringsproblemer under bibetingelser ved å skrive opp Lagrangefunksjoner og lete etter deres stasjonære punkter.

Det er en ting til du bør være klar over. Noen bøker bytter fortegn på λ -leddet i Lagrangefunksjonen og skriver den som

$$L(x_1, \dots, x_m, \lambda) = f(x_1, \dots, x_m) + \lambda(g(x_1, \dots, x_m) - b)$$

Dette spiller ingen rolle — maksimums- og minimumspunktene er de samme som før, det er bare λ som får omvendt fortegn av det den ellers ville ha fått.

Lagranges multiplikatormetode med flere bibetingelser

Vi skal nå se på Lagranges multiplikatormetode når vi ønsker å optimere en funksjon

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

under flere bibetingelser

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = b_2$$

.....

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = b_k$$

Normalt må vi ha $k < m$ for å få et fornuftig ekstremalproblem, og vi skal derfor anta at dette alltid er tilfellet.

For å få en følelse for problemet ser vi først på tilfellet der vi ønsker å maksimere en funksjon

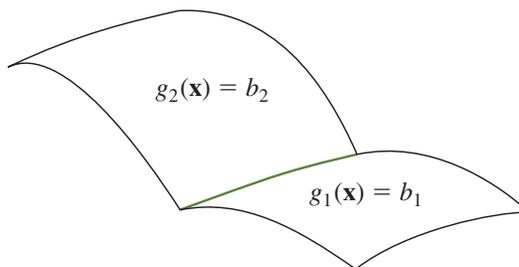
$$f(x, y, z)$$

av tre variable under to bibetingelser

$$g_1(x, y, z) = b_1$$

$$g_2(x, y, z) = b_2$$

De to ligningene $g_1(x, y, z) = b_1$ og $g_2(x, y, z) = b_2$ vil normalt definere to flater i rommet som skjærer hverandre langs en kurve (se figur T3.2.6). Problemet er altså å finne den største verdien til f langs denne kurven.



Figur T3.2.6 De to flatene $g_1(\mathbf{x}) = b_1$ og $g_2(\mathbf{x}) = b_2$ skjærer hverandre i en kurve

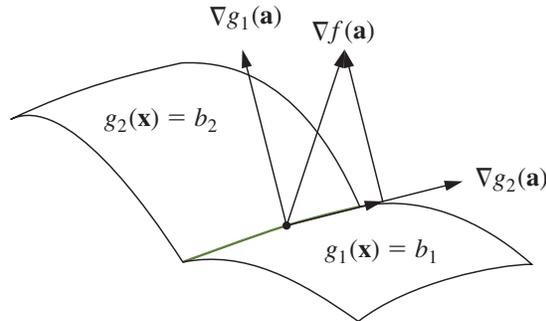
Husk at gradienten til f peker i den retningen hvor f vokser raskest. Dersom ∇f ikke står normalt på kurven, er det rimelig å tro at funksjonen langs kurven stiger i den retningen hvor ∇f peker. Skal vi derfor ha maksimum i et punkt, må ∇f i dette punktet stå normalt på kurven, dvs. den må ligge i normalplanet til kurven. Dette normalplanet er utspent av normalvektorene til flatene (prøv å forstå dette geometrisk!), og ∇f må

derfor være en lineærkombinasjon av normalvektorene ∇g_1 og ∇g_2 til de to flatene (se figur T3.2.7).

Vi venter derfor å finne maksimalverdien i et punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der det finnes konstanter λ_1 og λ_2 slik at

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Teorem T3.2.5 nedenfor forteller oss at denne geometriske intuisjonen er riktig.



Figur T3.2.7 $\nabla f(\mathbf{a})$ som lineærkombinasjon av $\nabla g_1(\mathbf{a})$ og $\nabla g_2(\mathbf{a})$

T3.2.5 Teorem (Lagranges multiplikator metode med flere bibetingelser)

Anta at U er en åpen delmengde av \mathbb{R}^m , og at $f, g_1, g_2, \dots, g_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ er funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Anta at b_1, b_2, \dots, b_k er reelle tall og at $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for f på mengden

$$A = \{\mathbf{x} \in U \mid g_1(\mathbf{x}) = b_1, g_2(\mathbf{x}) = b_2, \dots, g_k(\mathbf{x}) = b_k\}$$

Dersom $\nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}), \nabla g_2(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \nabla g_k(\bar{\mathbf{x}})$ lineært uavhengige, så finnes det konstanter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ slik at

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{\mathbf{x}}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{\mathbf{x}})$$

Før vi ser på et eksempel, skal vi ta en nærmere kikk på hva teoremet sier. Legg merke til at vi nå har et ligningssystem med $m + k$ ukjente $x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, men at vi også har $m + k$ ligninger: Skriver vi ut ligningen

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x})$$

komponentvis, får vi m ligninger, og bibetingelsene

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= b_1 \\ g_2(\mathbf{x}) &= b_2 \\ &\dots \\ g_k(\mathbf{x}) &= b_k \end{aligned}$$

gir oss de k siste.

T3.2.6 Eksempel Vi skal minimere funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ under bibetingelsene

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + 2z &= 1\end{aligned}$$

(Dette er ekvivalent med å finne det punktet på skjæringslinjen mellom planene $x + 2y - z = 2$ og $-x + y + 2z = 1$ som ligger nærmest origo, så det er klart at problemet har en løsning). Vi regner ut gradientene til f og funksjonene $g_1(x, y, z) = x + 2y - z$, $g_2(x, y, z) = -x + y + 2z$:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ifølge teoremet ovenfor leter vi etter punkter der

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skriver vi ut ligningen komponentvis, får vi

$$\begin{aligned}2x &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2y &= 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2z &= -\lambda_1 + 2\lambda_2\end{aligned}$$

og i tillegg har vi bibetingelsene

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + 2z &= 1,\end{aligned}$$

altså fem ligninger med fem ukjente. Ligningssystemet er lineært og kan løses ved våre standardmetoder, men vi velger en snarvei. Fra de tre første ligningene, får vi uttrykkene $x = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}$, $y = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2}$, $z = -\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2$, som vi setter inn i de to siste ligningene. Resultatet er

$$\begin{aligned}3\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} &= 2 \\ -\frac{\lambda_1}{2} + 3\lambda_2 &= 1\end{aligned}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $\lambda_1 = \frac{26}{35}$ og $\lambda_2 = \frac{16}{35}$. Setter vi inn i uttrykkene for x , y og z , får vi $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$, $z = \frac{3}{35}$. Siden det geometriske minimaliseringsproblemet vårt åpenbart har en løsning, og $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$, $z = \frac{3}{35}$ er den eneste kandidaten, er problemet løst. ■

BEMERKNING: Vi skal ikke komme nærmere inn på det her, men nevner i forbigarten at det også finnes annenderiverttester for ekstremalverdi problemer med bibetingelser.

BEMERKNING OM LAGRANGEFUNKSJONER: Også når vi skal optimere en funksjon $f(x_1, \dots, x_m)$ under flere bibetingelser $g_1(x_1, \dots, x_m) = b_1, \dots, g_k(x_1, \dots, x_m) = b_k$ er det mulig å formulere problemstillingen ved hjelp av en Lagrangefunksjon L . I dette tilfellet får L formen

$$L(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_m) - \lambda_1(g_1(x_1, \dots, x_m) - b_1) - \dots - \lambda_k(g_k(x_1, \dots, x_m) - b_k)$$

Regner vi ut de partiellderiverte til L , får vi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \dots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1}$$

.....

$$\frac{\partial L}{\partial x_m} = \frac{\partial f}{\partial x_m} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_m} - \dots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -g_1(x_1, \dots, x_m) + b_1$$

.....

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = -g_k(x_1, \dots, x_m) + b_k$$

Setter vi disse uttrykkene lik 0, får vi akkurat de ligningene vi må løse når vi bruker Lagranges multiplikator metode. Akkurat som for problemer med én bibetingelse kan vi altså løse optimeringsproblemer med flere bibetingelser ved å finne de stasjonære punktene til Lagrangefunksjonen.

Vær oppmerksom på at noen bøker bytter fortegn på λ -leddene i Lagrangefunksjonen slik at den blir seende slik ut:

$$L(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_m) + \lambda_1(g_1(x_1, \dots, x_m) - b_1) + \dots + \lambda_k(g_k(x_1, \dots, x_m) - b_k)$$

Dette spiller ingen rolle — maksimums- og minimumspunktene er de samme som før, det er bare λ -ene som får omvendt fortegn av det de ellers ville ha fått.

Økonomisk tolkning av Lagrangemultiplikatorer

Lagranges multiplikator metode brukes mye i økonomiske fag. Det er ikke så vanskelig å forstå hvorfor — i økonomi er man opptatt av maksimums- og minimumsproblemer (man ønsker f.eks. å maksimere inntektene og minimere utgiftene), men samtidig har man naturlige bibetingelser — man kan f.eks. ha en begrenset sum å kjøpe råvarer for, eller man har et begrenset antall arbeidstimer å fordele på ulike oppgaver.

I de eksemplene vi har sett på hittil, har Lagrangemultiplikatorene spilt en underordnet rolle; de har vært hjelpetørrelser vi har trengt for å løse problemet vårt, men de har ikke hatt noen selvstendig betydning. I en del økonomiproblemer spiller imidlertid Lagrangemultiplikatorene en viktig rolle.

La oss tenke oss av vi ønsker å maksimere en inntektsfunksjon $f(\mathbf{x})$ under bibetingelsene $g_1(\mathbf{x}) = b_1, g_2(\mathbf{x}) = b_2, \dots, g_k(\mathbf{x}) = b_k$. Dersom vi endrer verdiene b_1, b_2, \dots, b_k , må vi selvfølgelig regne med at både maksimalpunktet $\bar{\mathbf{x}}$ og maksimalverdien $\bar{y} = f(\bar{\mathbf{x}})$ endrer seg. Vi kan derfor tenke på disse som funksjoner av

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$, altså $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}), \bar{y}(\mathbf{b}) = f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))$. Dersom $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ er Lagrange-multiplikatorene som gir maksimumspunktet $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})$, antar vi at disse er funksjoner av \mathbf{b} , altså $\lambda_1(\mathbf{b}), \lambda_2(\mathbf{b}), \dots, \lambda_k(\mathbf{b})$. Det er lurt å tenke på b_1, b_2, \dots, b_k som *innsatsfaktorer* i produksjonen — b_1 er kanskje det totale beløpet vi er villige til å kjøpe råvarer for, b_2 er det totale antall arbeidstimer vi er villige til å bruke i produksjonen, b_3 beløpet vi bruker på å videreutvikle produktene osv.

Et naturlig spørsmål er hvordan en endring i innsatsfaktorene vil påvirke inntektene — hvor mye vil vi f.eks. tjene på å øke arbeidsinnsatsen med 10 %? Disse endringene måles av de partiellderiverte

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))}{\partial b_i}$$

Som vi snart skal se, er

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})$$

Dette betyr at dersom vi gir innsatsfaktoren b_i en liten økning Δb_i , så øker inntektene med $\lambda_i(\mathbf{b}) \Delta b_i$. Dersom kostnadene ved å øke b_i én enhet er mindre enn $\lambda_i(\mathbf{b})$, så lønner det seg altså å øke innsatsfaktoren b_i , men dersom kostnadene er større enn $\lambda_i(\mathbf{b})$, lønner det seg å redusere b_i . Av denne grunn kalles $\lambda_i(\mathbf{b})$ *likevektsprisen* til innsatsfaktor b_i (den kalles også *skyggeprisen* for å understreke at den ikke nødvendigvis har noe med den virkelige prisen å gjøre).

La oss nå vise at

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})$$

Vi skal ikke gjennomføre et fullstendig matematisk resonnement, men vise at denne formelen følger dersom vi antar at de involverte funksjonene er deriverbare (det går an å vise at dette er tilfellet under svært rimelige betingelser). La oss begynne med å se på bibetingelsene. Siden de alltid er oppfylt, har vi

$$g_j(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = b_j$$

Deriverer vi dette uttrykket mhp. b_i , får vi (husk kjerneregelen på venstresiden!):

$$\sum_{n=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (3.1)$$

Deriverer vi inntektsfunksjonen mhp. b_i , får vi tilsvarende

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial b_i} f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = \sum_{n=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b})$$

Ifølge Lagrangebetingelsene er

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) = \sum_{j=1}^k \lambda_j(\mathbf{b}) \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b}))$$

og setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{y}}{\partial b_i}(\mathbf{b}) &= \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^k \lambda_j(\mathbf{b}) \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j(\mathbf{b}) \sum_{n=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{b})) \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial b_i}(\mathbf{b}) = \lambda_i(\mathbf{b})\end{aligned}$$

der vi i siste overgang har brukt formel (3.1).

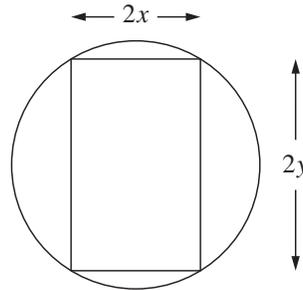
Oppgaver

1. Finn maksimums- og minimumspunktene (hvis de finnes) til funksjonen f under bibetingelsen(e).
 - a) $f(x, y) = 4x - 3y$ når $x^2 + y^2 = 1$
 - b) $f(x, y) = xy$ når $9x^2 + y^2 = 18$
 - c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ når $2x - 3y + 2z = 17$
 - d) $f(x, y, z) = x + y + z$ når $x^2 + y^2 = 1$ og $2x + z = 1$
 - e) $f(x, y, z) = 2x + 3y$ når $3x^2 + 2y^2 = 3$
 - f) $f(x, y, z) = x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$ når $x + y + z = 1$ og $2x - y - z = 5$
2. Finn punktene på flaten $z^2 - xy = 1$ som ligger nærmest origo.
3. Finn punktene på skjæringkurven mellom flatene $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ som ligger nærmest origo.
4. Løs oppgave 11 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.
5. Løs oppgave 12 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.
6. Løs oppgave 13 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.
7. Løs oppgave 16 i forrige seksjon ved hjelp av Lagranges multiplikatorer.
8. La $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + y^2$.
 - a) Finn de stasjonære punktene til f og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.
 - b) Finn maksimum og minimum til f på området $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. (*Hint*: Det kan lønne seg å bytte til polarkoordinater.)
9. (Eksamen i MAT 1110, 13/6, 2008) Forklar at funksjonen $f(x, y) = 2x + 4y$ har maksimums- og minimumspunkter under bibetingelsen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$. Finn disse maksimums- og minimumspunktene.
10. Kjeglesnittet K består av alle punkter (x, y) som oppfyller ligningen $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$
 - a) Hva slags kjeglesnitt er K ? Lag en tegning av K der alle viktige størrelser er tegnet inn (f.eks. sentrum, brennpunkter, halvaksler, asymptoter etter hva som er aktuelt).
 - b) Forklar at funksjonen $f(x, y) = 2x + y$ har en største og minste verdi når den begrenses til mengden K . Finn disse maksimums- og minimumsverdiene.
11. En rektangulær boks med kanter parallelle med koordinataksene skal plasseres inni ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Hva er det største volumet denne boksen kan ha?

12. Av en sylinderformet stokk med radius r skal det skjæres ut en bjelke med bredde $2x$ og høyde $2y$. (Se figur). Bæreevnen til bjelken er proporsjonal med x og med kvadratet av y , dvs. den er gitt ved funksjonen

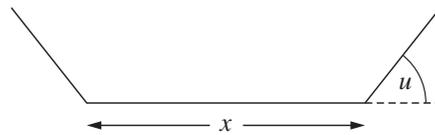
$$f(x, y) = kxy^2$$

der k er en konstant.



Finn de verdier av x og y som gir størst verdi for $f(x, y)$.

13. En renne skal lages ved at en b cm bred metallplate brettes opp symmetrisk på begge sider. Figuren viser et tverrsnit av rennen. Hvordan må vi velge bredden x og vinkelen u for at tverrsnittet skal få størst mulig areal?



14. Herons formel sier at arealet til en trekant med sider x, y, z er

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

der $s = \frac{x+y+z}{2}$ er halve omkretsen. Bruk Lagranges multiplikator metode til å vise at blant alle trekanter med samme omkrets, er det den likesidede som har størst areal.

15. La S være ellipsoideflaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Finn ligningen for tangentplanet til S i punktet (x_0, y_0, z_0) .
 - Anta at $x_0, y_0, z_0 > 0$. Finn volumet til pyramiden avgrenset av koordinatplanene og tangentplanet til S i (x_0, y_0, z_0) .
 - Finn det punktet (x, y, z) på S med $x, y, z \geq 0$ som gjør produktet xyz størst mulig.
 - Hva er det minste volumet pyramiden i b) kan ha?
16. I økonomi regner man ofte at profitten kan modelleres som en *Cobb-Douglasfunksjon*. Det betyr at profitten er gitt ved $P(x, y) = Kx^\alpha y^\beta$ der K, α, β er positive konstanter, og x og y står for det beløpet man investerer i forskjellige «innsatsfaktorer», f.eks. kan x være investeringen i råvarer og y investeringen i arbeidskraft. Anta at den totale investeringen er gitt, dvs. at $x + y = S$, der S er en konstant.
- Vis at profitten er størst når $x = \frac{\alpha S}{\alpha + \beta}$, $y = \frac{\beta S}{\alpha + \beta}$. Hva er den maksimale profitten?
 - Generaliser resultatet ovenfor til flere innsatsfaktorer. Anta at

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Kx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

(der $K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ er positive konstanter) og finn maksimumsverdien til P under bibetingelsen $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$.

17. Anta at en forbruker har valget mellom to varetyper. De to vareslagene koster hhv. p og q kroner per enhet. I økonomiske modeller regner man ofte med at nytten forbrukeren har av å kjøpe x enheter av den ene varetypen og y enheter av den andre, er gitt ved en *nyttefunksjon* av typen

$$U(x, y) = a \ln x + b \ln y$$

der a og b er positive konstanter. Dersom forbrukeren har S kroner til rådighet, ønsker hun å maksimere nyttefunksjon under bibetingelsen $px + qy = S$. Vist at hun får maksimalt utbytte ved å velge $x = \frac{aS}{p(a+b)}$ og $y = \frac{bS}{q(a+b)}$.

18. Et firma produserer to vareslag. Det har et samlet produksjonsbudsjett på S kroner i året og et utviklingsbudsjett på T kroner i året. Firmaet regner at hvis det bruker x kroner på produksjon av vareslag 1 og samtidig bruker y kroner på å videreutvikle produktet, vil overskuddet fra vareslag 1 være

$$U(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$$

der A og α er konstanter, $0 \leq \alpha < 1$. Hvis firmaet på samme måte bruker z kroner på produksjon av vareslag 2 og samtidig bruker u kroner på videreutvikling, regner det med at overskuddet fra vareslag 2 vil være

$$V(z, u) = Bz^\beta u^{1-\beta}$$

der B og β er konstanter, $0 \leq \beta < 1$.

- a) Forklar hvorfor det er naturlig for firmaet å optimere størrelsen $U(x, y) + V(z, u)$ under bibetingelsene $x + z = S$, $y + u = T$.
 b) Vis at Lagranges multiplikator metode leder til ligningene

$$\alpha A \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-1} = \lambda$$

$$(1 - \alpha)A \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \mu$$

$$\beta B \left(\frac{z}{u}\right)^{\beta-1} = \lambda$$

$$(1 - \beta)B \left(\frac{z}{u}\right)^\beta = \mu$$

$$x + z = S$$

$$y + u = T$$

- c) Vis ved å kombinere de to første ligningene ovenfor at $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\mu}{\lambda}$. Vis også at $\frac{z}{u} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\mu}{\lambda}$.
 d) Vis ved å kombinere den første og tredje ligningen ovenfor at

$$\alpha A \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-1} = \beta B \left(\frac{z}{u}\right)^{\beta-1}$$

Sett inn uttrykkene for $\frac{x}{y}$ og $\frac{z}{u}$ fra c) og vis at dette leder til formelen

$$\frac{\mu}{\lambda} = \left[\frac{B\beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta}}{A\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

- e) For enkelthets skyld kaller vi uttrykket på høyre side av uttrykket ovenfor for K . Vi har med andre ord $\frac{\mu}{\lambda} = K$. Ifølge c) har vi dermed $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha} K$ og $\frac{z}{u} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\mu}{\lambda}$. Sett disse uttrykkene inn i de to siste ligningen i ligningssystemet i b), og finn x , y , z og u .

19. I denne oppgaven skal vi se på en anvendelse av Lagranges multiplikator metode i statistisk fysikk. La oss begynne med en kort skisse av den fysiske problemstillingen (selv om det egentlig

ikke er nødvendig å skjønne fysikken for å løse oppgaven): Vi har et system med N partikler (N er et svært stort tall) som kan fordele seg på n energinivåer E_1, E_2, \dots, E_n . Den totale energien til systemet er U , og sannsynligheten for å finne en tilfeldig partikkel på energinivå E_i er p_i . Målet er å finne den mest sannsynlige fordelingen av partiklene på energinivåene. Denne fordelingen er gitt ved vektoren (x_1, x_2, \dots, x_n) der x_i er antall partikler på nivå E_i .

Etter noen innledende betraktninger (som er ren sannsynlighetsregning) kommer man frem til at man ønsker å finne maksimum til funksjonen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = N - \sum_{i=1}^n x_i \ln \left(\frac{x_i}{p_i} \right)$$

under bibetingelsene

$$\sum_{i=1}^n x_i = N \quad (\text{det totale antall partikler er } N)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i E_i = U \quad (\text{den totale enegien er } U)$$

- a) La g og h være funksjonene $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i E_i$.
Vis at

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\ln \left(\frac{x_i}{p_i} \right) + 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial h}{\partial x_i} = E_i$$

- b) Vis at Lagranges multiplikatormetode gir ligningene

$$-\ln \left(\frac{x_i}{p_i} \right) + 1 = \lambda + \mu E_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

i tillegg til bibetingelsene $\sum_{i=1}^n x_i = N$ og $\sum_{i=1}^n x_i E_i = U$.

- c) Vis at $x_i = p_i e^{-\lambda - \mu E_i + 1}$.
d) Vi innfører nå *partisjonsfunksjonen* $Z = \sum_{i=1}^n p_i e^{-\mu E_i}$. Bruk den første bibetingelsen til å vise at $x_i = \frac{N}{Z} p_i e^{-\mu E_i}$. Dermed har vi kvittet oss med den første multiplikatoren λ .
e) Vis at den gjenværende multiplikatoren μ er bestemt av ligningen $U = \frac{N}{Z} \sum_{i=1}^n p_i E_i e^{-\mu E_i}$.

Dette viser at μ er knyttet til den totale energien til systemet. Faktisk viser det seg at $\mu = \frac{1}{kT}$ der T er temperaturen til systemet (målt i grader Kelvin) og k er en konstant (*Boltzmanns konstant*). Vi ender dermed opp med den fundamentale sammenhengen $x_i = \frac{N}{Z} p_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$ som kalles *Maxwell-Boltzmann-fordelingen*.

20. (Eksamen i MAT 1110 15/8, 2008, noe utvidet) I denne oppgaven er

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en symmetrisk $n \times n$ -matrise, og $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ er funksjonen $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{x}$ (der $(\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{x}$ betegner skalarproduktet mellom vektorene \mathbf{Ax} og \mathbf{x}).

- a) Vis at dersom \mathbf{x} er en egenvektor for A med egenverdi λ , så er $f(\mathbf{x}) = \lambda |\mathbf{x}|^2$.
b) Vis at for alle vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ er

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$$

der den siste summen er over alle par av ulike indekser $1 \leq i, j \leq n$.

- c) La $S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1 \}$ være det n -dimensjonale kuleskallet om origo med radius 1. Forklar at når vi innskrenker f til S , så har funksjonen maksimums- og minimumspunkter. Bruk Lagranges multiplikator metode til å vise at disse maksimums- og minimumspunktene er egenvektorer til A . Vis til slutt at maksimumsverdien til f på S er den største egenverdien til A , mens minimumsverdien er den minste egenverdien til A .

Fasit

Fasit til seksjon T3.1

1. a) $(2, -1)$ b) $(0, 0)$ c) $(-\frac{3}{2}, 1)$ d) $(-1, 0)$, e) $(\frac{1}{4}, -4)$
2. a) Min. i $(1, -2)$ b) Sadelpunkt i $(-1, 1)$ c) Min. i $(0, 0)$ d) Maks. i $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
e) Sadelpunkt i $(-2, 0)$
3. $(1, -2)$, lokalt minimum. 4. $(0, 0)$ er et lokalt minimum, $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ er et sadelpunkt.
5. $(1, -\frac{1}{2})$, sadelpunkt. 6. $(-1, 0)$, lokalt minimum.
7. Lokalt minimum i $(0, 0, 0)$, sadelpunkter i $(2, 2, 2)$, $(2, -2, -2)$, $(-2, 2, -2)$, $(-2, -2, 2)$
8. a) Stasjonære punkter: $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$ b) De to første punktene er sadelpunkter, det siste et lokalt maksimum.
9. a) $(0, 0)$, $(-2, 0)$ b) $(0, 0)$ er et lokalt (og faktisk et globalt) minimum, $(-2, 0)$ er et sadelpunkt.
10. a) $(0, 0)$ er et sadelpunkt, $(\pm\sqrt{2}, 0)$ er lokale (og globale) maksimumspunkter, $(0, \pm\sqrt{2})$ er lokale (og globale) minimumspunkter. b) Minimumsverdi: $-2e^{-1}$ i $(0, \pm\sqrt{2})$. Maksimumsverdi: $e^{-\frac{1}{2}}$ i $(\pm 1, 0)$.
11. Sidene i grunnflaten skal være $\sqrt[3]{2V}$ og høyden $\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.
12. a) $\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{1000}{x^2y}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{1000}{xy^2}$ b) $x = 5$, $y = z = 10$
13. a) $\frac{\partial A}{\partial x} = 28 - 4x - 3y$, $\frac{\partial A}{\partial y} = 28 - 4y - 3x$, lokalt maksimum for $x = y = 4$
b) Maksimalt areal $A = 122$ for $x = y = 4$.
14. $l = \frac{60}{\sqrt[3]{78}}$, $h = \frac{50}{\sqrt[3]{78}}$
15. a) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{60}{x^2} - 60y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{60}{y^2} - 60x$ b) Maksimalverdi $P = 1140$ for $x = y = 1$
16. $x = y = z = 36$ 17. $x = 650$, $y = 750$
18. a) $x = y = 12\,000$, $P = 36\,000\,000$, $Q = 48\,000\,000$ b) $x = 9000$, $y = 8000$, $P = 51\,500\,000$,
 $Q = 50\,500\,000$ c) $x = 9000$, $y = 12\,000$, $P = 31\,500\,000$, $Q = 58\,500\,000$

Fasit til seksjon T3.2

1. a) Maks.verdi 5 i punktet $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, min.verdi -5 i punktet $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. b) Maks.verdi 3 i punktene $(1, 3)$ og $(-1, -3)$, min.verdi -3 i $(1, -3)$ og $(-1, 3)$. c) Min.verdi 17 i punktet $(2, -3, 2)$. Ingen maksimalverdi.
 d) Maks.verdi $1 + \sqrt{2}$ i punktet $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$, min.verdi $1 - \sqrt{2}$ i punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$
 e) Maks.verdi $\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $(\frac{4}{\sqrt{70}}, \frac{9}{\sqrt{70}})$, min.verdi $-\frac{19}{\sqrt{70}}$ i punktet $(-\frac{4}{\sqrt{70}}, -\frac{9}{\sqrt{70}})$. f) Min.verdi $-\frac{1}{12}$ i punktet $(2, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6})$.

2. $(0, 0, 1), (0, 0, -1)$ 3. $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$

8. a) Lokalt min. i $(0, 0)$, sadelpunkter i $(\pm 1, 0)$ b) Min.verdi 0 i $(0, 0)$, maks.verdi $\ln 2 + 1$ i $(0, \pm 1)$

9. Maks. punkt $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$, min. punkt $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$

10. a) Ellipse med sentrum i $(1, -2)$, halvaksler $a = 2, b = 3$, brennvidde $c = \sqrt{5}$, brennpunkter $(1, 2 \pm \sqrt{5})$.

b) Maks. punkt $(\frac{13}{5}, -\frac{1}{5})$, min. punkt $(-\frac{3}{5}, -\frac{19}{5})$

11. $V = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ 12. $x = \frac{R}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ 13. $x = \frac{b}{3}, u = \frac{\pi}{3}$

15. a) $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$ b) $V = \frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$ c) $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$

16. a) $P_{\max} = K \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta S^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$

b) $P_{\max} = K \frac{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_n^{\alpha_n} S^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}$ for $x_1 = \frac{\alpha_1 S}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}, x_2 = \frac{\alpha_2 S}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}, \dots$

18. $x = \frac{S\alpha(1-\beta) - \alpha\beta KT}{\alpha - \beta}, y = \frac{S(1-\beta)(1-\alpha) - \beta(1-\alpha)KT}{(\alpha - \beta)K}, z = \frac{S\beta(1-\alpha) - \alpha\beta KT}{\beta - \alpha}$ og $u = \frac{S(1-\beta)(1-\alpha) - \alpha(1-\beta)KT}{(\beta - \alpha)K}$

Tom Lindstrøm

Tilleggs kapitler til

Kalkulus

3. utgave

Universitetsforlaget, Oslo

© 3. utgave Universitetsforlaget AS 2006

1. utgave 1995

2. utgave 1996

ISBN-13: 978-82-15-00977-3

ISBN-10: 82-15-00977-8

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning, og kan straffes med bøter eller fengsel.

Boken har egen nettside: www.universitetsforlaget.no/kalkulus

Henvendelser om denne utgivelsen kan rettes til:

Universitetsforlaget AS

Postboks 508 Sentrum

0105 Oslo

www.universitetsforlaget.no

Sats, figurer og formgivning: Arve Michaelsen/Matematisk Sats

Boken er satt med: MathTimes og Times Roman 10/12

Forord

Dette tilleggskapitlet gir en kort innføring i regning med vektorer, determinanter og parametriserte kurver. Stort sett skal vi holde oss i planet og rommet, men kapitlet inneholder også litt stoff som peker fremover mot det n -dimensjonale tilfellet. Selv om de fleste lesere allerede vil ha vært borti vektorregning i den videregående skolen, har jeg for logikkens og sammenhengens skyld valgt å starte fremstillingen fra bunnen av. I undervisningen vil det sikkert være naturlig å hoppe over en del av det stoffet som skal være kjent fra før. Studenter som ikke har vært borti vektorregning tidligere, vil kanskje finne fremstillingen noe kortfattet enkelte steder, og de vil kanskje føle seg ekskludert av en del bemerkninger av typen: «Som vi husker fra videregående skole, så . . . ». Jeg håper likevel det vil være mulig å bruke kapitlet også som en første innføring i emnet.

En del av stoffet i dette kapitlet finnes også i tilleggskapittel T2, men behandling her er langsommere og mer elementær (den konsentrerer seg hovedsaklig om vektorer i \mathbb{R}^2 og \mathbb{R}^3 , mens fremstillingen i T2 stort sett handler om vektorer i \mathbb{R}^n). Det er mulig å lese T1 først og så T2, men overlappet mellom kapitlene er så pass stort at de fleste nok vil være mer fornøyd med å velge ett av kapitlene. Ønsker man en snill og forsiktig videreføring av vektorregningen i videregående skole, er dette kapitlet best egnet, men ønsker man en raskere og mer ambisiøs innføring, er T2 det beste valget (her får man i tillegg med en del stoff om funksjoner av flere variable). Kapitlene har til forskjellige tider vært brukt i første semester ved Universitetet i Oslo og fungerer godt for studentgruppen der.

Litt om notasjon og organisering: Kapitlet er delt opp i «seksjoner» (seksjon 1,

seksjon 2 osv), som igjen er delt opp i «avsnitt» (avsnitt 3.1, avsnitt 3.2, osv). Definisjoner, setninger og teoremer er nummerert fortløpende innen hvert seksjon. Eksempler og figurer er også nummerert seksjonsvis, men med egen nummerering. Jeg bruker ■ til å markere slutten på et bevis, og ■ til å markere slutten på et eksempel.

Til slutt en stor takk til Klara Hveberg som har kommet med en rekke konstruktive forslag underveis, og som har hjulpet til med å lage fasiten.

Blindern, 29. juni, 2006

Tom Lindstrøm

Innhold

Forord	3
1 Vektorregning og parametriserte kurver	7
1.1 Regning med n -tupler	7
Oppgaver	10
1.2 Vektorer i planet	10
Geometrisk tolkning av regneoperasjonene	11
Oppgaver	13
Skalarproduktet	13
Oppgaver	18
Parameterfremstilling	19
Oppgaver	22
Determinanter, arealer og orientering	23
Oppgaver	27
Parametriserte kurver	28
Oppgaver	35
1.3 Vektorer i rommet	37
Geometrisk tolkning av regneoperasjonene	38
Oppgaver	39
Vektorproduktet	40
Oppgaver	47
Determinanter, volumer og orientering	47
Oppgaver	49
Plan	50
Oppgaver	54
Parametriserte kurver	55
Oppgaver	58
1.4 Geometri i høyere dimensjoner	59
Oppgaver	64
Fasit	66

Vektorregning og parametriserte kurver

Dette kapitlet er en repetisjon og videreføring av vektorregningen i videregående skole. De fleste begrepene (som vektorer, linjer og parametriserte kurver) vil du kjenne fra før, men noen (som vektorprodukt og determinanter) vil kanskje være nye. I tillegg til vektorregning i to og tre dimensjoner skal vi begynne å se litt på vektorregning i n dimensjoner — et tema som høres mye skumlere ut enn det er!

T1.1 Regning med n -tupler

I denne seksjonen skal vi studere de grunnleggende regnereglene for n -tupler og se på noen eksempler som antyder hva n -tupler kan brukes til.

Et n -tupel er en sekvens av n (reelle) tall (a_1, a_2, \dots, a_n) . For eksempel er $(3, -4, \frac{3}{4}, 7, 0, 3)$ et 6-tupel, mens $(-1, \pi, -1, \frac{37}{42})$ er et 4-tupel. Tallene a_1, a_2, \dots, a_n kalles *komponentene* til n -tuppelet (a_1, a_2, \dots, a_n) ; a_1 er førstekomponenten, a_2 er andrekomponenten osv. To n -tupler regnes som *like* dersom de inneholder de samme tallene i den samme rekkefølgen. At $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, betyr altså at $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Legg merke til at $(3, 2, 4) \neq (2, 3, 4)$; selv om tallene er de samme, er rekkefølgen forskjellig.

I dette kapitlet skal vi bruke bokstaver i **fete typer** som navn på n -tupler, f.eks. $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$. Det er vanskelig å bruke fete typer når man skriver for hånd, og man kan da isteden skrive en pil eller en strek over bokstaven — slik $\vec{a} = (-2, 3, 0, -17)$ eller slik $\bar{a} = (-2, 3, 0, -17)$.

Vi skal skrive $\mathbf{0}$ for det n -tupplet som har alle komponenter lik 0, altså $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Hvis vi har et n -tupple $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, skriver vi $-\mathbf{a}$ for n -tupplet $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$.

Det er en naturlig måte å definere addisjon og subtraksjon av n -tupler på. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, så er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

Vi sier at vi adderer og subtraherer *komponentvis*. Legg merke til at vi bare kan addere og subtrahere n -tupler av samme type — oppskriften ovenfor gir oss ikke noen måte å addere et 3-tupple og et 7-tupple på. Før vi ser på noen eksempler, tar vi med en regneoperasjon til. Dersom s er et tall og $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ er et n -tupple, definerer vi produktet av s og \mathbf{a} til å være

$$s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, \dots, sa_n)$$

Vi ganger altså s inn i hver komponent i \mathbf{a} .

T1.1.1 Eksempel Vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$. Da er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2 + 4, 3 + (-1), 0 + 3, -17 + 17) = (2, 2, 3, 0)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-2 - 4, 3 - (-1), 0 - 3, -17 - 17) = (-6, 4, -3, -34)$$

Hvis $s = 3$, får vi

$$s\mathbf{a} = (3 \cdot (-2), 3 \cdot 3, 3 \cdot 0, 3 \cdot (-17)) = (-6, 9, 0, -51)$$



Vi skal innføre en regneoperasjon til. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ er to n -tupler, definerer vi *skalarproduktet* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ved

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Legg merke til at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ er ikke et n -tupple, men et tall (eller en *skalar* som man ofte sier når man vil understreke at noe er et tall og ikke et n -tupple). Hvis vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$ som ovenfor, ser vi at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-17) \cdot 17 = -8 - 3 + 0 - 289 = -300$$

Vi har nå sett hvordan vi kan regne med n -tupler, og det er kanskje på tide å forklare hvorfor det er noen vits i slike regnestykker. Eksempelet nedenfor viser at n -tupler er naturlige redskap når vi skal holde styr på mer informasjon enn det som kan rommes i et enkelt tall, og at regneoperasjonene svarer til regnestykker det ofte er naturlig å utføre i slike sammenhenger.

T1.1.2 Eksempel En forretning har ansatt 7 studenter på timebasis. For å holde styr på hvor mange timer hver student har arbeidet, kan vi bruke et 7-tupple $\mathbf{t} =$

(t_1, t_2, \dots, t_7) der t_1 er antall timer den første studenten har arbeidet, t_2 er antall timer den andre studenten har arbeidet osv. Dersom studentene arbeider mer, kan vi på samme måte kode tilleggstimene som et n -tupplel $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_7)$. Det totale antall timer som studentene har arbeidet, er nå gitt ved $\mathbf{t} + \mathbf{s}$.

Studentene har ulik erfaring og derfor ulik lønn. Hvis student nummer én har en timelønn på p_1 kroner, student nummer to har en timelønn på p_2 kroner osv., kan vi også representere lønnen som et 7-tupplel $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_7)$. Dersom studentene har arbeidet $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_7)$ timer, er den totale lønnen som forretningen skylder, gitt av skalarproduktet $\mathbf{p} \cdot \mathbf{t} = p_1t_1 + p_2t_2 + \dots + p_7t_7$. Dersom alle studentene får et lønnstillegg på 7 prosent, får vi det nye lønnstuppelet ved å gange det gamle med skalaren 1.07, altså $1.07\mathbf{p}$. ■

Vi tar med noen eksempler til som viser hvordan n -tupler brukes til å holde styr på tallmessig informasjon i forskjellige sammenhenger.

T1.1.3 Eksempel Tilstanden til en gassbeholder er bestemt av trykket p , temperaturen T og volumet V . Hvis du får i oppdrag å måle tilstanden til beholderen ved forskjellige tidspunkt, kan det være naturlig å bruke 4-tupler (t, p, T, V) der t er tidspunktet for målingen. Forskjellen mellom to målinger \mathbf{a} og \mathbf{b} er da gitt ved differensen $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. ■

T1.1.4 Eksempel Et bilde på en fjernsynsskjerm eller en dataskjerm er bygget opp av små lysende punkter (pikslar). Et vanlig format er $1280 \times 1024 = 1\,310\,720$ pikslar. I hvert punkt må vi angi styrken til hver av de tre grunnfargene rødt, blått og grønt, så totalt har vi $3 \times 1\,310\,720 = 3\,932\,160$ tall å holde styr på. En naturlig måte å gjøre dette på, er å oppfatte bilder som 3 932 160-tupler! ■

Her er noen enkle regneregler for n -tupler (det finnes flere):

T1.1.5 Regneregler for n -tupler Dersom \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} er n -tupler og s og t er reelle tall, gjelder følgende regneregler:

- (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- (c) $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$
- (d) $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
- (e) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ og $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- (f) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Bevis: Alle disse reglene bevises lett ved å regne ut venstre- og høyresiden og kontrollere at svarene stemmer. Vi tar (c) og (f) som eksempler:

(c) Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, ser vi at venstresiden kan skrives

$$\begin{aligned} s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2), \dots, s(a_n + b_n)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, \dots, sa_n + sb_n) \end{aligned}$$

Tilsvarende kan høyresiden skrives

$$\begin{aligned}\mathbf{sa} + \mathbf{sb} &= (sa_1, sa_2, \dots, sa_n) + (sb_1, sb_2, \dots, sb_n) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, \dots, sa_n + sb_n)\end{aligned}$$

Siden de to uttrykkene er like, er (c) bevist.

(f) Vi ser at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$$

siden kvadrater aldri er negative. Likhet har vi dersom $a_1^2 = 0, a_2^2 = 0, \dots, a_n^2 = 0$, dvs. dersom $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$ ■

Vi har nå innført noen regneoperasjoner for n -tupler og sett på noen av de enkleste regnereglene. I de neste to seksjonene skal vi se at når n er lik 2 eller 3, er ikke regning med n -tupler noe annet enn regning med vektorer i planet og i rommet. Forskjellen er bare at i rommet og i planet har vi muligheten til å forestille oss vektorene geometrisk, og det gir oss en helt annen forståelse av hva de er. Mot slutten av kapitlet skal vi se at det er mulig å ta med seg mye av denne geometriske forståelsen når vi studerer generelle n -tupler. Dette vil gi oss en slags geometrisk forståelse av n -dimensjonale objekter!

Før vi går videre, tar vi med noen ord om notasjon. Mengden av alle n -tupler kaller vi \mathbb{R}^n . Når vi skriver $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, betyr dette derfor ikke noe annet enn at \mathbf{a} er et n -tupel. I dette kapitlet skal vi stort sett holde oss til reelle n -tupler, men vi kan selvfølgelig også tenke oss n -tupler (c_1, c_2, \dots, c_n) der komponentene c_1, c_2, \dots, c_n er *komplekse* tall. Mengden av alle slike n -tupler kaller vi \mathbb{C}^n . Vi kan gjøre det enda mer generelt: Dersom A er en hvilken som helst mengde, betegner A^n mengden av alle n -tupler (a_1, a_2, \dots, a_n) der $a_i \in A$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$.

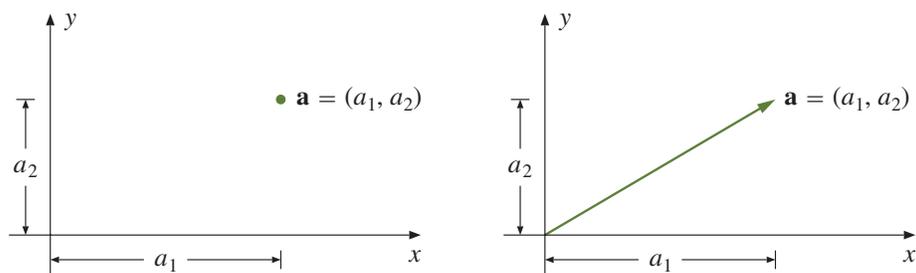
Oppgaver

1. Finn $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (1, -2, 4, -5, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 5, 5, 0, -3)$ og $s = 3$.
2. Finn $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (7, 0, 4, -2, -5, 4)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1, -6, 0, -1)$ og $s = -4$.
3. Vi sier at \mathbf{a} står ortogonalt på \mathbf{b} dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Vis at dersom \mathbf{a} står ortogonalt på både \mathbf{b} og \mathbf{c} , så står \mathbf{a} ortogonalt på $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.
4. Bevis punkt (d) i setning T1.1.5.
5. Bevis punkt (e) i setning T1.1.5.

T1.2 Vektorer i planet

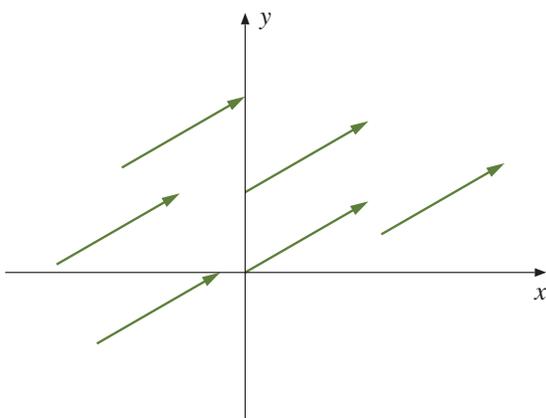
Et 2-tupel er ikke noe annet enn et par (a_1, a_2) . Geometrisk kan vi tenke på et slikt par på to måter — enten som et *punkt* med koordinater a_1 og a_2 , eller som en *vektor* (pil) som starter i origo og ender i dette punktet (se figur T1.2.1). I skolematematikken bruker man gjerne forskjellig notasjon om man tenker på paret som et punkt eller som en vektor — et punkt (a_1, a_2) har runde parenteser, mens en vektor $[a_1, a_2]$ har klammeparenteser. Det er ganske tungvint å bruke to forskjellige notasjoner, og vi vil derfor bruke runde parenteser $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ uansett om vi tenker på \mathbf{a} som et punkt eller

som en vektor. Hva som er naturlig, fremgår som regel av sammenhengen. Snakker vi om en linje gjennom \mathbf{a} , er det naturlig å tenke på \mathbf{a} som et punkt, men snakker vi om en linje parallell med \mathbf{a} , er det naturlig å tenke på \mathbf{a} som en vektor. Når jeg lager figurer, vil jeg noen ganger tegne parett (a_1, a_2) som en vektor og andre ganger som et punkt etter hva jeg synes passer best i hvert enkelt tilfelle (se figur T1.2.1).



Figur T1.2.1 \mathbf{a} som et punkt og som en vektor

Oftte er det naturlig å tegne vektorer med et annet startpunkt enn origo. Vi skal derfor regne to vektorer som *like* dersom de har samme retning og er like lange (selv om de ikke starter samme sted). Figur T1.2.2 viser flere versjoner av den samme vektoren.



Figur T1.2.2 Forskjellige versjoner av samme vektor

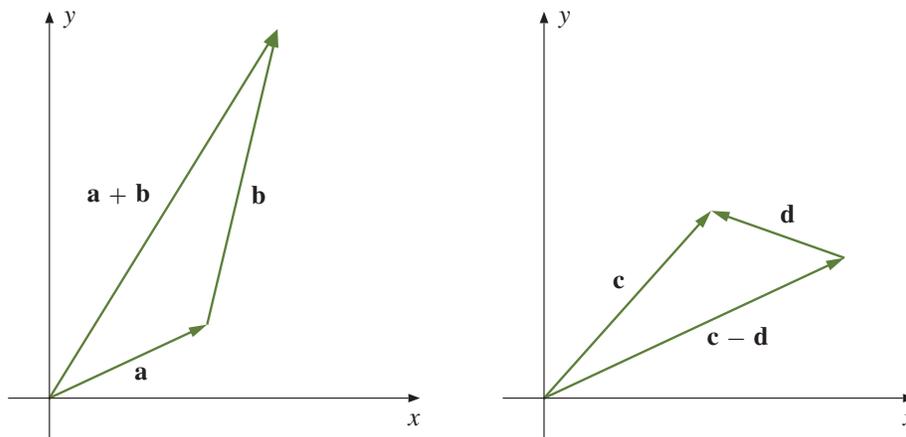
BEMERKNING: Det kan være på sin plass med en liten advarsel — det er ikke i alle sammenhenger vi kan neglisjere startpunktet til en vektor. Det er greit i dette kapitlet der vi bare er interessert i lengden og retningen til vektorer, men i fysikk symboliserer ofte vektorene krefter, og da er startpunktet viktig fordi det markerer det stedet hvor kraften angriper. Flytter vi startpunktet, får kraften ofte en helt annen virkning (tenk på en vektstang). I praksis er det nesten alltid klart om startpunktet spiller noen rolle eller ikke, men det skader ikke å være oppmerksom på problemstillingen.

Geometrisk tolkning av regneoperasjonene

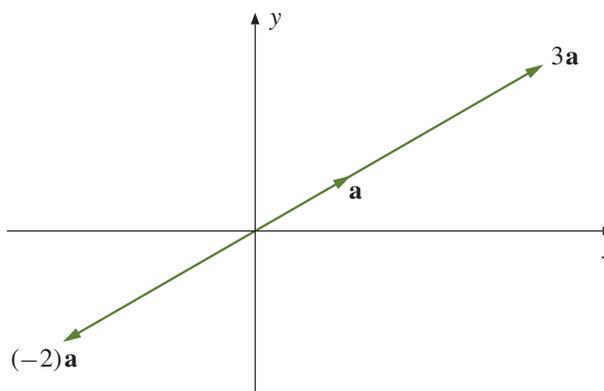
Når $n = 2$, kan de regneoperasjonene vi innførte i forrige seksjon, tolkes som sammensetting av vektorer. Figur T1.2.3 viser hvordan vi setter sammen vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} for å få $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, og hvordan vi setter sammen \mathbf{c} og \mathbf{d} for å få $\mathbf{c} - \mathbf{d}$.

Multiplikasjon med en skalar har også en geometrisk tolkning. Dersom vi ganger \mathbf{a} med et *positivt* tall s , beholder vektoren retningen, men blir s ganger så lang. Dersom

vi ganger \mathbf{a} med et *negativt* tall s , snur retningen 180° og den nye vektoren blir $|s|$ ganger så lang som den opprinnelige (se figur T1.2.4).



Figur T1.2.3 Addisjon og subtraksjon av vektorer



Figur T1.2.4 Multiplikasjon med et tall

Lengden $|\mathbf{a}|$ til en vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ er gitt ved Pythagoras' setning:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Tilsvarende er avstanden $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mellom to punkter $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ gitt ved

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Legg merke til at

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

Avstanden fra \mathbf{a} til \mathbf{b} er altså lik lengden til vektoren $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (lag en figur!).

To vektorer spiller en så viktig rolle at de har fått egne navn. Det er enhetsvektorene langs x - og y -aksen. Vi bruker betegnelsene

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

I enkelte bøker vil du isteden finne notasjonen

$$\mathbf{e}_x = (1, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_y = (0, 1)$$

Vi skal ikke gjøre mye bruk av disse betegnelse i dette kapitlet, men det er greit å vite om dem.

Før vi går videre, tar vi oss tid til noen få ord om hva vektorer kan brukes til i fysikk. Der brukes vektorer til å beskrive fysiske fenomener som har både retning og størrelse, som for eksempel hastigheter og krefter. Når man kjører i en bil, er det ikke bare viktig å vite hvor fort man kjører — retningen har også noe å si. Man kan derfor beskrive hastigheten som en vektor der lengden angir hvor fort man kjører, og der retningen til vektoren forteller hvilken vei man kjører. Når man bruker en kraft for å flytte en gjenstand, drar man ikke bare med en viss styrke, men også i en bestemt retning. For å beskrive en slik kraft, bruker man en vektor der lengden angir styrken man drar med, og retningen angir hvilken vei man drar. Dersom det er flere krefter som trekker gjenstanden i hver sin retning, blir den samlede kraften (*resultanten*) summen av alle disse vektorene.

Oppgaver

1. Vi har vektorene $\mathbf{a} = (-2, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 3)$. Tegn \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ i samme koordinatsystem.
2. La $\mathbf{a} = (-1, 3)$ og $\mathbf{b} = (2, 3)$. Tegn punktene $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ og $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ i samme koordinatsystem. Beskriv mengden av alle punkter $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.
3. Tegn et punkt $\mathbf{a} = (a, b)$. Tegn deretter punktene $(-a, -b)$, $(b, -a)$, $(-b, a)$. Kommenter.
4. Finn avstanden fra $(-7, 8)$ til $(6, -3)$.
5. Vannet i en elv renner med en fart på 1 m/s. Du kan svømme med en fart på 2 m/s relativt til vannet. I hvilken retning bør du svømme dersom du skal til et punkt tvers over elven? Hvor lang tid bruker du på turen dersom elven er 50 meter bred?

Skalarproduktet

Skalarproduktet av de to vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ er gitt på vanlig måte:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Vi ser at vi kan uttrykke lengden $|\mathbf{a}|$ til \mathbf{a} ved hjelp av skalarproduktet på denne måten:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Sagt på en annen måte er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Denne sammenhengen er grei å bruke når vi skal skrive opp kvadratsetningene for vektorer.

T1.2.1 Kvadratsetninger for vektorer Dersom \mathbf{a} og \mathbf{b} er to vektorer i planet, gjelder:

$$(a) \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

$$(b) \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

$$(c) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$$

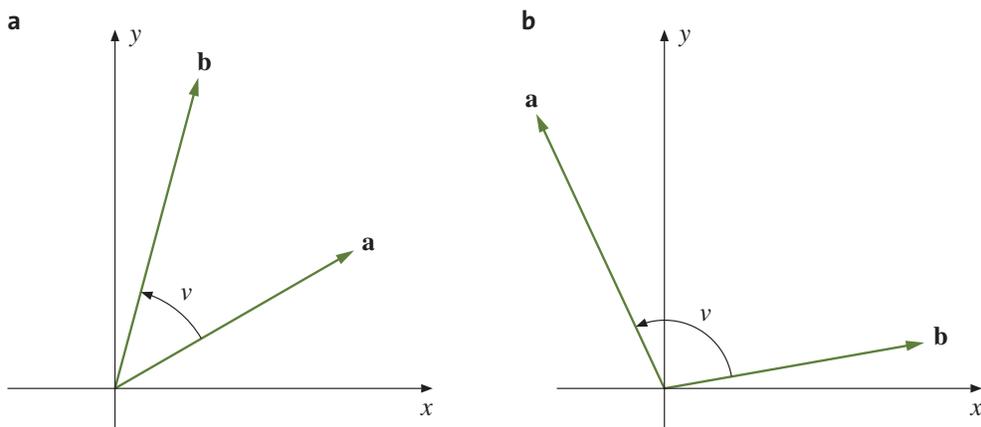
Bevis: Disse formlene kan bevises på flere måter — man kan for eksempel regne ut begge sider og se at man får det samme svaret, eller man kan bruke regne-reglene T1.1.5 fra forrige seksjon. Som et eksempel skal jeg vise hvordan man bruker regnereglene til å vise punkt (a) — de andre punktene greier du sikkert selv.

Vi starter med venstresiden og regner ut (prøv å finne ut hvilke regneregler som brukes i hvert trinn):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

■

To vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} bestemmer en vinkel v mellom 0° og 180° som vist på figur T1.2.5. Vi kaller dette *vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b}* . Legg merke til at dersom vi beveger oss i positiv omløpsretning, vil denne vinkelen noen ganger starte i \mathbf{a} og ende i \mathbf{b} (se figur T1.2.5a) og andre ganger starte i \mathbf{b} og ende i \mathbf{a} (se figur T1.2.5b). I det første tilfellet sier vi at paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er *positivt orientert*, i det andre tilfellet at det er *negativt orientert*. Her er åpenbart rekkefølgen til vektorene viktig — \mathbf{a} er første vektor og \mathbf{b} er andre vektor. Bytter vi om rekkefølgen av vektorene, bytter vi også orientering.



Figur T1.2.5 Vinkelen v

Som de fleste vil huske fra skolematematikken, kan skalarproduktet uttrykkes geometrisk ved hjelp av vinkelen v :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v \quad (1.1)$$

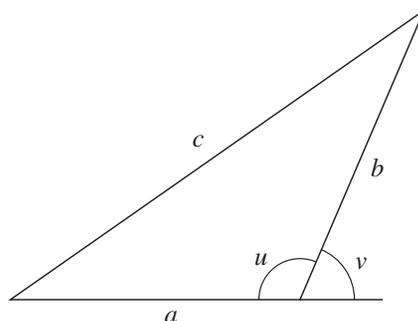
At skalarproduktet kan uttrykkes på to vidt forskjellige måter (både som $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ og som $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$), er svært nyttig. Den første måten er grei når man skal regne ut skalarprodukter eller bevise regneregler, mens den andre måten gjør det mulig å bruke skalarproduktet som et redskap i geometriske resonnementer.

Siden det geometriske uttrykket (1.1) for skalarproduktet er så viktig, skal vi utlede det her selv om det er kjent fra videregående skole. Det er flere utledninger å velge mellom, men den vi skal bruke, har den fordelen at den også fungerer for vektorer i rommet. Før vi starter på utledningen, minner jeg om *cosinussetningen* fra 1T: Gitt en trekant som på figur T1.2.6. Da er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos u$$

(husker du ikke denne setningen, finner du en utledning i oppgave 1.2.19). Siden $\cos u = -\cos v$ (hvorfor?), kan denne formelen også skrives

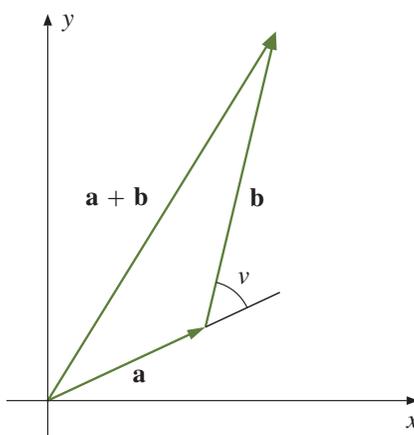
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos v \quad (1.2)$$



Figur T1.2.6 Cosinussetningen

Bevis for formel (1.1): Bruker vi formel (1.2) på trekanten i figur T1.2.7, ser vi at

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$$



Figur T1.2.7

Dersom vi isteden bruker den første kvadratsetningen ovenfor, får vi:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

Skal disse to uttrykkene være like, må

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$$

og beviset for (1.1) er fullført. ■

Formel (1.1) er grei å bruke når man skal finne vinkelen mellom to vektorer.

T1.2.2 Eksempel Finn vinkelen v mellom vektorene $\mathbf{a} = (4, -1)$ og $\mathbf{b} = (-2, 3)$. Vi har

$$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3}{\sqrt{17}\sqrt{13}} = \frac{-11}{\sqrt{221}} \approx -0.74$$

En lommeregner forteller oss at $v \approx \arccos(-0.74) \approx 137.7^\circ$. ■

Som det neste eksemplet på sammenhengen mellom skalarproduktet og geometri, skal vi undersøke når vektorer er parallelle eller står normalt på hverandre (også dette er kjent fra skolematematikken). Husk at to ikke-null vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} står normalt på hverandre dersom vinkelen mellom dem er 90° , og at de er parallelle dersom vinkelen mellom dem er 0° eller 180° (vektorer som peker i motsatt retning, regnes altså som parallelle). Når to vektorer står normalt på hverandre, sier vi ofte at de er *ortogonale*.

T1.2.3 Setning La \mathbf{a} og \mathbf{b} være to vektorer i planet forskjellig fra $\mathbf{0}$. Da gjelder:

- (a) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ med likhet hvis og bare hvis \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle.
- (b) \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale hvis og bare hvis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Bevis: (a) Siden $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$ og $|\cos v| \leq 1$, er

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| |\cos v| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

med likhet hvis og bare hvis $|\cos v| = 1$, dvs. når v er lik 0 eller 180 grader.

(b) Siden \mathbf{a} og \mathbf{b} er forskjellige fra $\mathbf{0}$, kan $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$ bare være 0 fordi $\cos v = 0$, og det skjer bare når v er 90 grader. ■

T1.2.4 Eksempel For å vise at vektorene $\mathbf{a} = (-3, 4)$ og $\mathbf{b} = (2, \frac{3}{2})$ er ortogonale, sjekker vi at skalarproduktet er lik 0 :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3) \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} = -6 + 6 = 0$$

Altså er vektorene ortogonale. ■

Tidligere i boken har vi møtt trekantulikhetene for reelle og komplekse tall. Nå kommer trekantulikheten for vektorer:

T1.2.5 Trekantulikheten Dersom \mathbf{a} og \mathbf{b} er to vektorer i planet, så er

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Bevis: Geometrisk sier denne setningen at lengden til én side i en trekant alltid er mindre enn summen av de to andre (forklar!). Vi kan gi et algebraisk bevis ved å kombinere første kvadratsetning og setning T1.2.3(a) ovenfor:

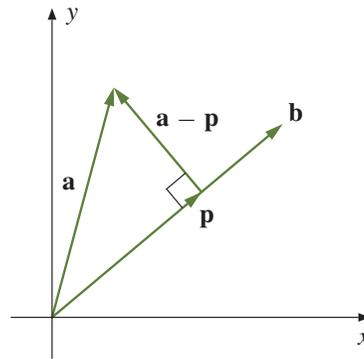
$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

Siden både $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ og $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ er positive, må

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

■

Vi skal nå bruke den geometriske tolkningen av skalarproduktet til å studere projeksjoner. Figur T1.2.8 viser projeksjonen \mathbf{p} av \mathbf{a} ned på \mathbf{b} . Projeksjonen \mathbf{p} er vektoren som er parallell med \mathbf{b} og så lang at $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ står normalt på \mathbf{b} .



Figur T1.2.8 Projeksjonen \mathbf{p} av \mathbf{a} ned på \mathbf{b}

Vi skal finne et uttrykk for \mathbf{p} . Siden \mathbf{p} er parallell med \mathbf{b} , må $\mathbf{p} = t\mathbf{b}$ for ett eller annet tall t . Siden $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ står ortogonalt på \mathbf{b} , må vi derfor ha:

$$0 = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - t\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - t|\mathbf{b}|^2$$

Løser vi denne ligningen med hensyn på t , får vi

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$$

Dette betyr at

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

Vi får dermed dette resultatet:

T1.2.6 Setning Anta at \mathbf{a} og \mathbf{b} er to ikke-null vektorer i planet. Da er projeksjonen \mathbf{p} av \mathbf{a} ned på \mathbf{b} gitt ved:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

Lengden til projeksjonen er

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

Bevis: Den første formelen har vi allerede utledet. Den andre kan vi for eksempel finne med følgende regnestykke:

$$|\mathbf{p}| = |t||\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|^2} |\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

■

T1.2.7 Eksempel Finn lengden til projeksjonen \mathbf{p} av $\mathbf{a} = (2, -5)$ ned på $\mathbf{b} = (3, 4)$. Vi har

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-5) \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{14}{5}$$

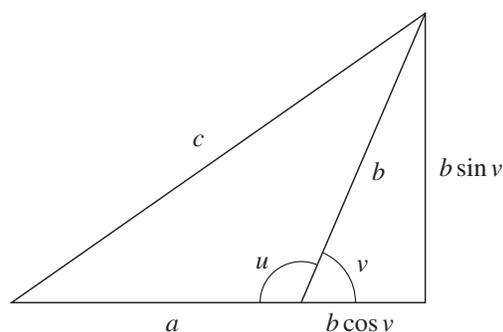


Projeksjonen av en vektor \mathbf{a} ned på en annen vektor \mathbf{b} brukes ofte i fysikk og mekanikk. Ved hjelp av projeksjonen \mathbf{p} kan vi skrive \mathbf{a} som en sum av to ortogonale vektorer \mathbf{p} og $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ der den ene (\mathbf{a}) er parallell med \mathbf{b} og den andre står normalt på \mathbf{b} . Dette kalles å *dekomponere* \mathbf{a} . Dekomposisjon brukes mye i forbindelse med krefter der vi ofte er interessert i den komponenten av kraften som peker i en spesiell retning (gjerne den retningen vi ønsker at kraften skal virke i).

Oppgaver

6. Finn skalarproduktet av $(-2, 3)$ og $(4, 1)$. Finn også vinkelen mellom vektorene.
7. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$ og vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} er 45° . Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
8. Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (4, 3)$ og $\mathbf{b} = (-1, 3)$. Finn også projeksjonen av \mathbf{a} ned på \mathbf{b} .
9. Hvor lang er projeksjonen av $(-3, 4)$ ned på $(1, 2)$?
10. Finn vinkelen som hver av vektorene $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 1)$ danner med x -aksen. Regn ut $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og bruk svaret til å finne et eksakt uttrykk for $\cos(15^\circ)$.
11. Skriv $\mathbf{a} = (4, 3)$ som en sum av to vektorer \mathbf{b} og \mathbf{c} der \mathbf{b} er parallell med $\mathbf{d} = (1, 2)$ og \mathbf{c} står normalt på \mathbf{d} .
12. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$. Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
13. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5$. Finn vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} .
14. Per påstår at han har to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} slik at $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 7$. Hvorfor tror du ikke på ham?
15. Kari påstår at hun har to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} slik at $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 4$. Hvorfor tror du ikke på henne?
16. Bevis punkt (b) og (c) i setning T1.2.1.
17. Husk at $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Bevis at $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ for alle vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Hva er den geometriske tolkningen av denne ulikheten?
18. Anta at \mathbf{b} og \mathbf{c} står normalt på \mathbf{a} . Vis at \mathbf{b} og \mathbf{c} er parallelle.

19. Forklar at på figuren nedenfor er $(a + b \cos v)^2 + (b \sin v)^2 = c^2$.



Bruk dette til å bevise cosinussetningen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos u$ når vinkel u er stump (dvs. større enn 90°). Bruk en tilsvarende figur til å bevise cosinussetningen når vinkel u er spiss (dvs. mindre enn 90°).

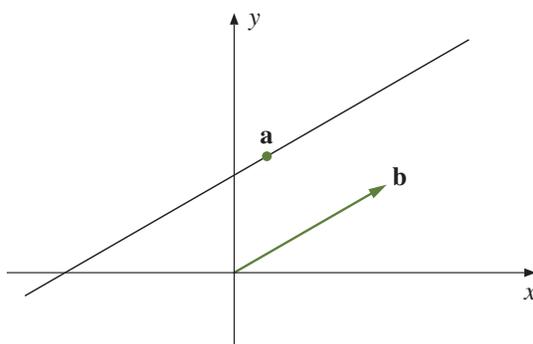
20. Vis at for alle vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} gjelder

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$$

Vis at i et parallelogram er summen av kvadratene av sidene lik summen av kvadratene av diagonalene.

Parameterfremstilling

Vi skal nå se litt på hvordan vektorer kan brukes til å studere linjer i planet. Du er vant til å beskrive linjer ved hjelp av ligninger av typen $y = ax + b$. I vektorregning er det ofte nyttigere å bruke en annen beskrivelse av linjer. Vi tar utgangspunkt i en linje som går gjennom et punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og er parallell med vektoren $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ (se figur T1.2.9).



Figur T1.2.9 Rett linje gjennom \mathbf{a} parallell med \mathbf{b}

Siden enhver vektor $t\mathbf{b}$ er parallell med \mathbf{b} , ser vi at alle punkter av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ må ligge på linjen (se figur T1.2.10). Det er heller ikke så vanskelig å overbevise seg om at ethvert punkt på linjen må være av formen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for ett eller annet tall t .

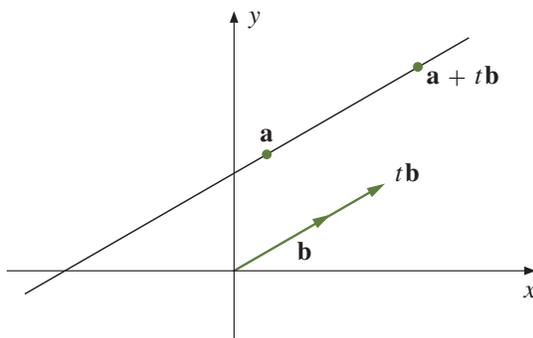
Vi har dermed kommet frem til at de punktene som ligger på den rette linjen, er nøyaktig de som er av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for et reelt tall t . Bruker vi koordinater, ser vi at

$$\mathbf{a} + t\mathbf{b} = (a_1, a_2) + t(b_1, b_2) = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$$

Dette uttrykket kaller vi en *parameterfremstilling* for den rette linjen. Det er ofte greit å ha et kortere navn på parameterfremstillingen, og vi skriver da gjerne

$$\mathbf{r}(t) = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$$

Tenk på $\mathbf{r}(t)$ som et punkt som beveger seg langs linjen når t endrer seg.



Figur T1.2.10 Parameterfremstilling av en rett linje

T1.2.8 Eksempel Vi skal finne en parameterfremstilling for den rette linjen som går gjennom punktet $\mathbf{a} = (2, 3)$ og er parallell med $\mathbf{b} = (-1, 4)$. Deretter skal vi undersøke om punktet $(5, -2)$ ligger på linjen. Etter formelen ovenfor får vi:

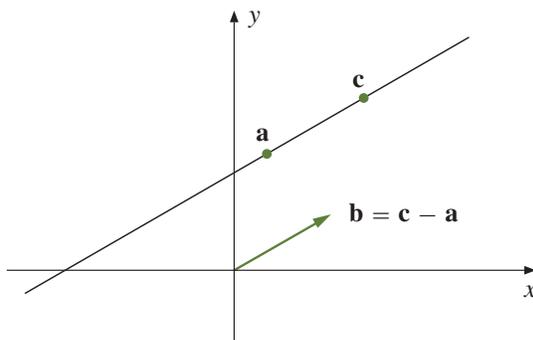
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (2, 3) + t(-1, 4) = (2 - t, 3 + 4t)$$

La oss sjekke om punktet $(5, -2)$ ligger på linjen. Da må det finnes et tall t slik at $(2 - t, 3 + 4t) = (5, -2)$, det vil si at vi må ha

$$2 - t = 5 \quad \text{og} \quad 3 + 4t = -2$$

Løser vi den første ligningen, får vi $t = -3$, men prøver vi denne løsningen i den andre ligningen, ser vi at den ikke passer. Det betyr at punktet *ikke* ligger på linjen (hadde $t = -3$ passet i denne ligningen også, ville punktet ha ligget på linjen). ■

Hittil har vi beskrevet en linje ved å oppgi at den går gjennom et gitt punkt og er parallell med en gitt vektor, men ofte er det andre beskrivelser som er mer naturlige, for eksempel å oppgi to punkter som linjen går gjennom. Hvordan finner vi en parameterfremstilling for linjen som går gjennom de to punktene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$? Det er lett — vi observerer bare at denne linjen må være parallell med vektoren $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ (se figur T1.2.11), og bruker deretter formelen ovenfor.



Figur T1.2.11 En rett linje gjennom to gitte punkter

T1.2.9 Eksempel Vi skal finne en parameterfremstilling for den rette linjen som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (3, -5)$ og $\mathbf{c} = (-1, 4)$. Vi ser at $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-1 - 3, 4 - (-5)) = (-4, 9)$. Dermed blir parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (3, -5) + t(-4, 9) = (3 - 4t, -5 + 9t)$$



Parametriserte linjer kan brukes til å beskrive jevne, rettlinjede bevegelser. Her er et enkelt eksempel:

T1.2.10 Eksempel I dette eksemplet er alle avstander målt i nautiske mil. En fiskebåt befinner seg ved tidspunktet $t = 0$ i punktet $(2, 3)$ og beveger seg med en jevn fart av 9 nautiske mil per time i retningen $(3, 4)$. Finn båten sin posisjon etter t timer.

Siden vektoren $\mathbf{d} = (3, 4)$ har lengde 5, vil båten i løpet av en time ha forflyttet seg en strekning gitt ved $\frac{9}{5}\mathbf{d}$. I løpet av t timer vil den derfor ha forflyttet seg en strekning $\frac{9t}{5}\mathbf{d}$. Siden startposisjonen er $\mathbf{e} = (2, 3)$, må posisjonen etter t timer være:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{e} + \frac{9t}{5}\mathbf{d} = (2, 3) + \frac{9t}{5}(3, 4) = (2 + \frac{27t}{5}, 3 + \frac{36t}{5})$$



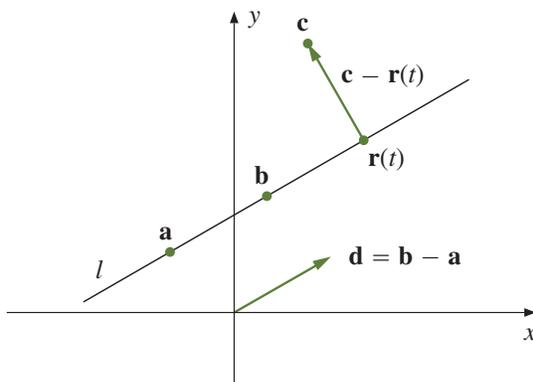
La oss ta med et litt mer omfattende eksempel.

T1.2.11 Eksempel Linjen l går gjennom punktene $\mathbf{a} = (-1, 2)$ og $\mathbf{b} = (1, 3)$. Vi skal finne det punktet på l som ligger nærmest punktet $\mathbf{c} = (2, 6)$. Det er flere måter å gå frem på, men uansett hvilken vi velger, trenger vi først å finne en bedre beskrivelse av punktene på l . Velger vi å bruke parameterfremstilling, regner vi først ut vektoren $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (1 - (-1), 3 - 2) = (2, 1)$. Parameterfremstillingen blir dermed

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{d} = (-1, 2) + t(2, 1) = (-1 + 2t, 2 + t)$$

Vi må nå finne ut hvilket av disse punktene som ligger nærmest \mathbf{c} . Det må være det punktet $\mathbf{r}(t)$ der vektoren $\mathbf{c} - \mathbf{r}(t)$ står ortogonalt på linjen l (se figur T1.2.12), eller, med andre ord, ortogonalt på vektoren \mathbf{d} . Dette betyr at vi må ha

$$(\mathbf{c} - \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{d} = 0$$



Figur T1.2.12 Punktet på l nærmest \mathbf{c}

Siden

$$(\mathbf{c} - \mathbf{r}(t)) = (2, 6) - (-1 + 2t, 2 + t) = (3 - 2t, 4 - t)$$

ser vi at

$$(\mathbf{c} - \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{d} = (3 - 2t, 4 - t) \cdot (2, 1) = (3 - 2t) \cdot 2 + (4 - t) \cdot 1 = 6 - 4t + 4 - t = 10 - 5t$$

Skal dette uttrykket være lik 0, må vi ha $t = 2$. Det punktet på l som ligger nærmest \mathbf{c} finner vi altså ved å sette $t = 2$:

$$\mathbf{r}(2) = (-1 + 2 \cdot 2, 2 + 2) = (3, 4)$$



Oppgaver

21. Finn en parameterfremstilling for linjen gjennom $(-3, -2)$ parallell med $(1, -2)$. Sjekk om punktet $(-7, 6)$ ligger på linjen.
22. Finn en parameterfremstilling for linjen som går gjennom punktene $(2, -1)$ og $(3, 8)$.
23. Finn en parameterfremstilling for linjen som går gjennom $(5, -2)$ og som står normalt på $(-1, 2)$.
24. Finn en parameterfremstilling for linjen som har ligning $2x + 3y = 6$.
25. En linje har parameterfremstilling $(-3 + 2t, 2 - t)$. Finn en ligning av typen $y = ax + b$ for denne linjen.
26. En linje går gjennom punktene $(0, 1)$ og $(3, 2)$. Finn det punktet på linjen som ligger nærmest $(3, 4)$.
27. En linje går gjennom $(3, -1)$ og er parallell med $(1, 2)$. Finn avstanden fra punktet $(1, 5)$ til linjen.
28. En linje går gjennom punktet $(1, 2)$ og står normalt på vektoren $(3, 4)$. Finn det punktet på linjen som ligger nærmest $(9, 2)$.
29. I denne oppgaven skal vi løse problemet i eksempel T1.2.11 på en annen måte.
 - a) Forklar hvorfor avstanden fra punktet $\mathbf{c} = (2, 6)$ til punktet $\mathbf{r}(t)$ på linjen er

$$\sqrt{(2t - 3)^2 + (-4 + t)^2}.$$

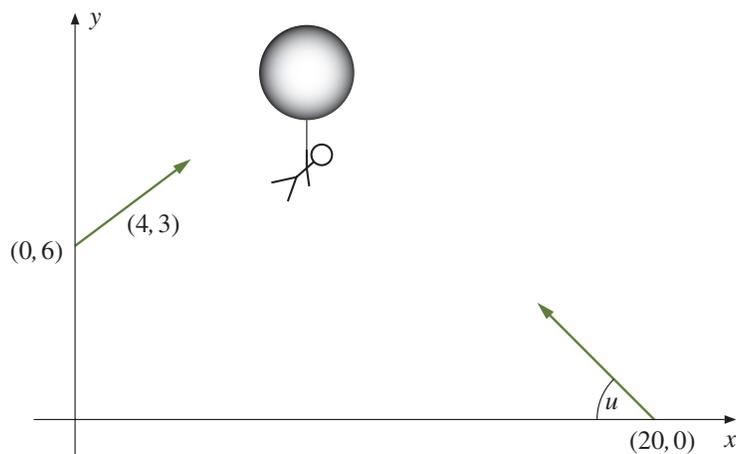
- b) Forklar hvorfor avstanden fra \mathbf{c} til $\mathbf{r}(t)$ er minst når $f(t) = (2t - 3)^2 + (-4 + t)^2$ er minst.
- c) Deriver $f(t)$ og bruk resultatet til å finne det punktet på linjen som ligger nærmest \mathbf{c} .

30. En linje har ligning $ax + by = c$. Vis at avstanden fra et punkt (x_0, y_0) til linjen er

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

31. To skip er på kryssende kurs. Ved tiden $t = 0$ er det ene skipet i punktet $(0, 4)$, og det andre skipet i punktet $(39, 14)$ (alle avstander er målt i nautiske mil.) Det første skipet beveger seg parallelt med vektoren $(3, 4)$ med en fart av 15 knop (1 knop = 1 nautisk mil per time). Det andre skipet beveger seg parallelt med vektoren $(-12, 5)$ med en fart av 13 knop.
 - a) Hvor vil kursene krysse hverandre?
 - b) Vil skipene kollidere?

32. I sin evige jakt etter honning forsøker Ole Brumm å invadere et tre ved hjelp av en ballong. Plutselig blir ballongen tatt av et vindkast og farer av sted med Ole Brumm. Etter å ha tenkt seg om et øyeblikk, innser Kristoffer Robin at hans eneste sjanse til å redde vennen er å skyte istykker ballongen med lekegeværet sitt. Figuren nedenfor viser en skisse av situasjonen.



Når vindkastet kommer ved tiden $t = 0$, befinner ballongen seg i punktet $(0, 6)$. Den blir ført av gårde med en fart av 5 m/s i retningen $(4, 3)$. Ved tiden $t = 2$ skyter Kristoffer Robin mot ballongen fra sin posisjon $(20, 0)$. Vinkelen mellom geværet og underlaget er u , og vi regner med at kulen beveger seg rettlinjet med en fart av 70 m/s . Alle avstander er målt i meter og tiden er målt i sekunder.

- Forklar at ballongens posisjon ved tiden t er $(4t, 6 + 3t)$.
- Vis at kulens posisjon ved tiden t er $(20 - 70(t - 2) \cos u, 70(t - 2) \sin u)$.
- Hvilken vinkel u må Kristoffer Robin holde geværet i for å treffe midt i ballongen? Hvor langt er det ned til bakken når ballongen blir truffet?

Determinanter, arealer og orientering

En 2×2 -determinant er et uttrykk

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

der a , b , c og d er fire tall. Dette uttrykket kan se mystisk ut, men det er rett og slett definert ved

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Legg merke til at uttrykket $ad - bc$ fremkommer fra diagonalene i $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; ganger vi sammen tallene i den ene diagonalen, får vi ad , og ganger vi sammen tallene i den andre diagonalen, får vi bc .

Man kan selvfølgelig lure på hvorfor man trenger et så komplisert symbol som $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ for det enkle uttrykket $ad - bc$. Det er det ikke så enkelt å forklare nå, men når du senere lærer om matriser og generelle $n \times n$ -determinanter, vil du se at denne definisjonen passer inn i et generelt system (vi skal se litt på 3×3 -determinanter i neste seksjon).

La oss regne ut en determinant.

T1.2.12 Eksempel Vi ser at

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = -6 + 20 = 14$$



Dersom vi har to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, kan vi lage en 2×2 -determinant $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ på denne måten:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Legg merke til at dersom vi bytter om rekkefølgen på vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} , så skifter determinanten fortegn:

$$\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Som vi snart skal se, har både fortegnet og størrelsen til $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ en geometrisk betydning.

For å forstå den geometriske tolkningen av determinanten lønner det seg å skrive vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} på polarform. Vi lar α være vinkelen mellom den positive x -aksen og vektor \mathbf{a} (se figur T1.2.13). Da er

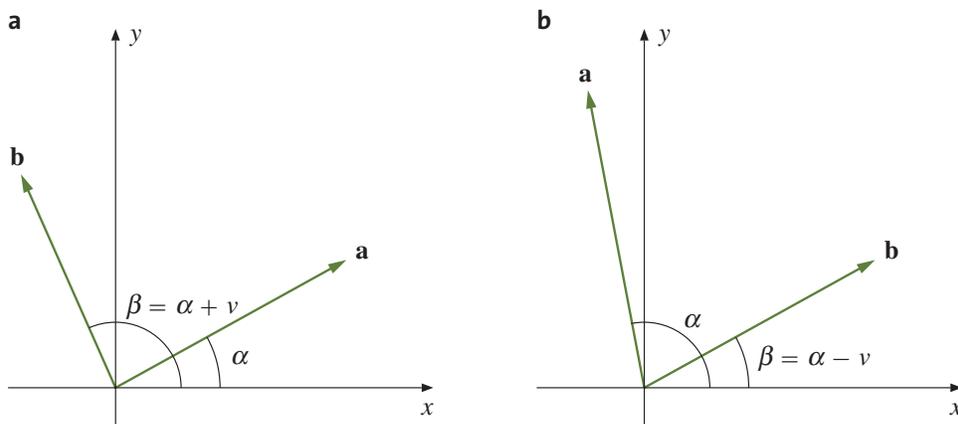
$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \sin \alpha)$$

(husk det du har lært om polarform til komplekse tall). La som vanlig v være vinkelen mellom vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} . Dersom paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt orientert (husk definisjonen rett før figur T1.2.5), lar vi $\beta = \alpha + v$. Da er på tilsvarende vis (se figur T1.2.13a)

$$\mathbf{b} = (|\mathbf{b}| \cos \beta, |\mathbf{b}| \sin \beta)$$

Dersom paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er negativt orientert, setter vi $\beta = \alpha - v$. Da er også i dette tilfellet (se figur T1.2.13b)

$$\mathbf{b} = (|\mathbf{b}| \cos \beta, |\mathbf{b}| \sin \beta)$$



Figur T1.2.13 Sammenhengen $\beta = \alpha \pm v$

Vi har altså

$$\beta = \alpha \pm v$$

der fortegnet er pluss eller minus ettersom paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt eller negativt orientert.

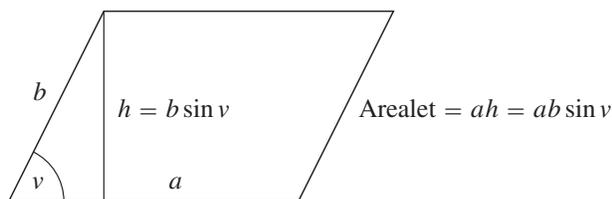
La oss nå finne determinanten uttrykt ved α og β :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\mathbf{a}| \cos \alpha & |\mathbf{a}| \sin \alpha \\ |\mathbf{b}| \cos \beta & |\mathbf{b}| \sin \beta \end{vmatrix} \\ &= |\mathbf{a}| \cos \alpha |\mathbf{b}| \sin \beta - |\mathbf{a}| \sin \alpha |\mathbf{b}| \cos \beta \\ &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \\ &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

der vi i den siste overgangen har brukt formelen for sinus til en differens. Siden $\beta = \alpha \pm v$, får vi

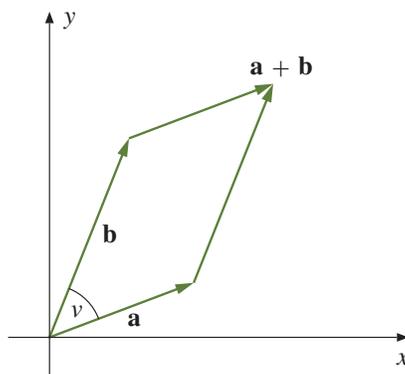
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\pm v) = \pm |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin v$$

Siden $\sin v$ aldri er negativ (v ligger per definisjon i intervallet $[0^\circ, 180^\circ]$ der sinus er positiv), vil $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ altså være positiv dersom paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt orientert, og negativ dersom dette paret er negativt orientert. Fortegnet til determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gjenspeiler altså orienteringen til paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Legg forøvrig merke til at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er 0 dersom v er 0° eller 180° , det vil si når \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle.



Figur T1.2.14 Arealet til et parallelogram

Etter at vi nå har funnet ut hva fortegnet til determinanten betyr, er det på tide å se på absoluttverdien. Aller først vil jeg minne om formelen for arealet til et parallelogram. Som det fremgår fra figur T1.2.14, er dette arealet gitt ved $A = ab \sin v$, der a og b er lengdene til sidene, og der v er vinkelen mellom dem (på figuren er vinkel v spiss, men det er lett å se at resultatet også holder dersom vinkelen er stump).



Figur T1.2.15 Parallelogrammet utspent av \mathbf{a} og \mathbf{b}

Arealet til parallelogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (a_1, a_2)$ (se figur T1.2.15) er derfor lik $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin u = \pm \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ der fortegnet er pluss eller minus ettersom (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt eller negativt orientert. Det betyr at arealet er lik tallverdien til determinanten. La oss oppsummere resultatene.

T1.2.13 Setning Determinanten

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

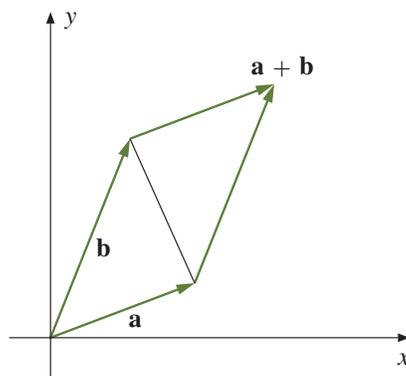
er positiv dersom vektorparet (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt orientert og negativ dersom paret er negativt orientert. Arealet til parallelogrammet utspent av \mathbf{a} og \mathbf{b} er lik tallverdien til determinanten.

BEMERKNING: Matematikere sier at determinanten gir oss arealet med fortegn (eller orientering). Det kan virke merkelig å knytte fortegn til areal, men spesielt når man skal studere arealet til flater, viser det seg viktig å holde styr på retningen — det er i mange sammenhenger viktig å vite hva man skal regne som flatens «overside/underside» eller «utside/innside». Som vi skal se i neste seksjon, kan sammenhengen mellom determinant og «areal med fortegn» generaliseres til tre dimensjoner.

T1.2.14 Eksempel Finn arealet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (3, -7)$ og $\mathbf{b} = (-4, 5)$. Vi får

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-7) \cdot (-4) = 15 - 28 = -13$$

Arealet er dermed $|-13| = 13$. Siden $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er negativ, er paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) negativt orientert, dvs. at vinkelen fra \mathbf{a} til \mathbf{b} er større enn 180° . ■



Figur T1.2.16 Trekanten med sider \mathbf{a} og \mathbf{b}

Determinanter kan også brukes til å regne ut arealet til trekanter. Arealet til trekanten med sider \mathbf{a} og \mathbf{b} er halvparten av arealet til parallelogrammet utspent av disse vektorene (se figur T1.2.16).

Vi har derfor følgende resultat:

T1.2.15 Korollar Arealet til trekanten med sider \mathbf{a} og \mathbf{b} er $\frac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$.

T1.2.16 Eksempel Finn arealet til trekanten med hjørner i punktene $\mathbf{c} = (-1, 2)$, $\mathbf{d} = (4, 8)$ og $\mathbf{e} = (2, -3)$. Vi regner ut

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = (4, 8) - (-1, 2) = (5, 6)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e} - \mathbf{c} = (2, -3) - (-1, 2) = (3, -5)$$

Trekanten vi er på jakt etter, har samme areal som trekanten med sider \mathbf{a} og \mathbf{b} (hvorfor?).
Dermed er

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-25 - 18| = \frac{43}{2}$$

Oppgaver

33. Regn ut determinantene

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

34. Finn arealet til parallelogrammet utspent av $\mathbf{a} = (1, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, 1)$.

35. En trekant har hjørner i punktene $(-1, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 7)$. Finn arealet.

36. En firkant har hjørner i punktene $(0, 1)$, $(5, 1)$, $(1, 7)$ og $(7, 4)$. Finn arealet.

37. Avgjør om parene (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt eller negativt orientert:

a) $\mathbf{a} = (3, -1)$ $\mathbf{b} = (-7, 2)$

b) $\mathbf{a} = (-1, 5)$ $\mathbf{b} = (3, 2)$

38. Vis at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ hvis og bare hvis vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle eller en av dem er $\mathbf{0}$.

39. Vis at $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, dvs. at vi får den samme determinanten om vi bytter om linjer og søyler.

40. Alle hjørnene til et parallelogram har heltallige koordinater. Vis at arealet er et helt tall.

41. Anta at $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

a) Vis at ligningssystemet $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ har løsningen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

b) Hva skjer med ligningssystemet når $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$?

Parametriserte kurver

Vi har tidligere sett på parameterfremstilling av linjer, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Ofte er det lurt å tenke seg at denne parametriseringen beskriver en gjenstand som beveger seg langs en rett linje slik at posisjonen ved tiden t er $\mathbf{r}(t)$. Nå er det ikke alltid at en gjenstand i bevegelse følger en rett linje, og for å fange mer generelle bevegelser, må vi utvide perspektivet litt. La oss tenke oss at gjenstanden ved tiden t har posisjonen $(x(t), y(t))$. Da er det naturlig å bruke notasjonen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Skal bevegelsen foregå uten sprang, må funksjonene $x(t)$ og $y(t)$ være kontinuerlige. Vi skal ta disse betraktningene som utgangspunkt for vår definisjon av parametriserte kurver:

T1.2.17 Definisjon Anta at I er et intervall. En *parametrisert kurve* over intervallet I er en funksjon

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

der $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner. Parametriserte kurver kalles også *vektorvaluerte funksjoner*.

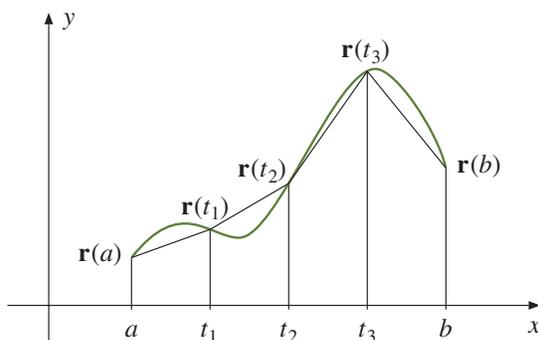
Det er ofte naturlig å tenke på $\mathbf{r}(t)$ som posisjonen ved tiden t , men det finnes situasjoner der andre tolkninger er naturlig — det kan f.eks. tenkes at $(x(t), y(t))$ er posisjonen en bil er i etter å ha kjørt t kilometer.

T1.2.18 Eksempel Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $I = [0, \pi]$ fremstiller en halvsirkel om origo med radius 1. Startpunktet er $(1, 0)$ og sluttpunktet $(-1, 0)$. En annen parametrisering av samme kurve får vi ved å sette

$$\mathbf{r}(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}), \quad I = [-1, 1]$$

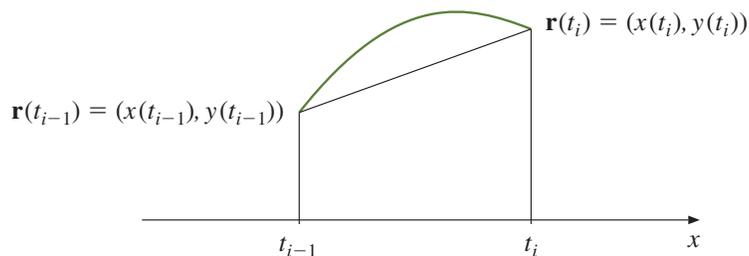
T1.2.19 Eksempel Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $I = [0, \infty)$ beskriver en bevegelse langs parabolen $y = x^2$. Farten i x -retning er konstant, men hastigheten i y -retning øker stadig. Bevegelsen starter i origo.

Et naturlig spørsmål er hvordan man finner lengden til en parametrisert kurve. Dersom jeg beveger meg langs den parametriserte kurven fra $t = a$ til $t = b$, hvor langt har jeg da gått?



Figur T1.2.17 Tilnærming til buelengden

Figur T1.2.17 viser en naturlig måte å nærme seg problemet på — vi deler intervallet $[a, b]$ med delepunkter $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$ og regner ut lengden til den brukne kurven fra $\mathbf{r}(a)$ til $\mathbf{r}(t_1)$ videre til $\mathbf{r}(t_2)$ osv. inntil vi når $\mathbf{r}(b)$. Figur T1.2.18 viser et nærbilde av den i -te delen av en slik kurve fra $\mathbf{r}(t_{i-1})$ til $\mathbf{r}(t_i)$.



Figur T1.2.18 Tilnærming til buelengden

Ifølge Pythagoras' setning er lengden av denne delen av den brukne kurven lik

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Hvis vi ganger og deler med $(t_i - t_{i-1})$, ser vi at dette uttrykket er lik

$$\sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}) \approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

Den totale lengden til den brukne veien er derfor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}) \\ \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

(forutsatt at x og y er deriverbare). Gjør vi oppdelingen av intervallet finere og finere, nærmer dette uttrykket seg

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Følgende definisjon er derfor fornuftig:

T1.2.20 Definisjon Anta at funksjonene x og y har kontinuerlige deriverte. Da er *buelengden* av den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ fra a til b

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

T1.2.21 Eksempel La oss bruke formelen ovenfor til å regne ut omkretsen til en sirkel. Bruker vi parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

får vi

$$x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t$$

Dette gir

$$\begin{aligned} L(0, 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

■

Vi skal nå se hvordan vi kan finne farten til gjenstanden vår. Fra tiden a til tiden t har den tilbakelagt en strekning $s(t)$ gitt ved $s(t) = L(a, t) = \int_a^t \sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2} dr$. Deriverer vi dette uttrykket med hensyn på t , får vi (ifølge analysens fundamentalteorem)

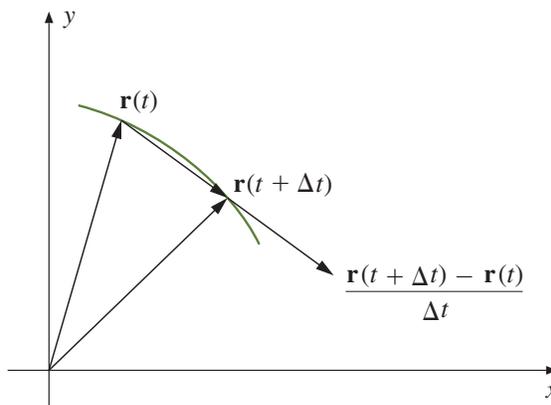
$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

Siden farten er den deriverte av strekningen med hensyn på tiden, forteller dette oss at farten til gjenstanden vår ved tiden t er

$$v(t) = s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

Formelen ovenfor gir oss farten ved tidspunktet t som en skalar størrelse $v(t)$. I mange sammenhenger er vi ikke bare interessert i hvor fort en gjenstand beveger seg, men også hvilken retning den beveger seg i. Vi er altså interessert i å oppfatte hastigheten som en vektor som har både størrelse og retning. La oss tenke gjennom problemet fra starten av.

I løpet av et lite tidsintervall $[t, t + \Delta t]$ vil partikkelen flytte seg fra $\mathbf{r}(t)$ til $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Forflytningen er altså $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ og den gjennomsnittlige forflytningen per tidsenhet er $\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$. Dersom Δt er liten, vil vektoren $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ (og dermed den parallelle vektoren $\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$) nesten være en tangent til kurven, og denne tilnærmingen blir bedre og bedre dess mindre Δt er (se figur T1.2.19).



Figur T1.2.19 Tilnærming til tangenten

Den deriverte vektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \\ &= (x'(t), y'(t))\end{aligned}$$

blir derfor både en tangent til kurven og en beskrivelse av forflytning per tidsenhet ved tidspunktet t . Dette er motivasjonen for følgende definisjon.

T1.2.22 Definisjon Anta at funksjonene x og y er deriverbare. Da sier vi at den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ er *deriverbar*, og at den deriverte er

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

I situasjoner der $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen til en gjenstand ved tiden t , kaller vi $\mathbf{v}(t)$ for *hastigheten* til gjenstanden.

BEMERKNING: Legg merke til terminologien — vektorstørrelsen $\mathbf{v}(t)$ kaller jeg *hastigheten*, mens tallet (skalaren) $v(t)$ kaller jeg *farten*. Dette pleide å være standard terminologi i matematikk- og fysikkbøker, men i senere år har det blitt mer og mer vanlig å bruke betegnelsen *fart* om både vektorstørrelsen $\mathbf{r}(t)$ og skalarstørrelsen $v(t)$. Jeg synes den gamle terminologien er oversiktlig og grei og holder derfor fast på den i dette kapitlet (det er en tilsvarende distinksjon på engelsk; *farten* kalles «speed» og *hastigheten* kalles «velocity»). Legg forøvrig merke til at $|\mathbf{v}(t)| = v(t)$ slik at *farten* er lengden til *hastighetsvektoren*.

Det er på tide med et eksempel:

T1.2.23 Eksempel Finn hastigheten og farten til den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t)$ (prøv å finne ut hvordan denne kurven ser ut!). Vi får

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= ((t \sin t)', (t \cos t)') \\ &= (\sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t)\end{aligned}$$

Farten blir

$$\begin{aligned}v(t) = |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{(\sin t + t \cos t)^2 + (\cos t - t \sin t)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + \cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{1 + t^2}\end{aligned}$$

De vanlige derivasjonsreglene gjelder også for derivasjon av vektorvaluerte funksjoner.

T1.2.24 Setning Dersom $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}_2(t)$ er to deriverbare parametriserte kurver, gjelder:

$$(i) (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) + \mathbf{r}'_2(t)$$

$$(ii) (\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) - \mathbf{r}'_2(t)$$

$$(iii) (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}'_2(t)$$

(iv) Dersom $\mathbf{r}(t)$ er en deriverbar parametrisert kurve og $u(t)$ er en deriverbar funksjon, er $(u(t)\mathbf{r}(t))' = u'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + u(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

Bevis: Vi tar (iii) som et eksempel (de andre bevises på lignende måte). Dersom

$$\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t)), \quad \mathbf{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$$

så er $\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)$. Dermed er

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))' &= (x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t))' \\ &= x'_1(t)x_2(t) + x_1(t)x'_2(t) + y'_1(t)y_2(t) + y_1(t)y'_2(t) \\ &= x'_1(t)x_2(t) + y'_1(t)y_2(t) + x_1(t)x'_2(t) + y_1(t)y'_2(t) \\ &= \mathbf{r}'_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) \end{aligned}$$

■

Vi tar med en konsekvens av (iii) som vi skal få bruk for senere:

T1.2.25 Korollar Dersom $|\mathbf{r}(t)|$ er konstant, så er $\mathbf{r}(t)$ og $\mathbf{r}'(t)$ ortogonale.

Bevis: Vi har $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = C$ er konstant. Deriverer vi begge sider, får vi:

$$2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Følgelig er $\mathbf{r}(t)$ og $\mathbf{r}'(t)$ ortogonale.

■

Den dobbeltderiverte til $\mathbf{r}(t)$ er

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (x''(t), y''(t))$$

Dersom $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen til en gjenstand ved tiden t , kalles $\mathbf{a}(t)$ for *akselerasjonen*. Dette er en vektor som forteller oss hvordan hastigheten endrer seg, både i størrelse og retning. I dagliglivet er det vanligere å snakke om akselerasjon i en litt annen betydning, nemlig som fartsendring per tidsenhet, dvs. som $a(t) = v'(t)$ (legg merke til at vi her deriverer skalarstørrelsen $v(t)$ og ikke vektorstørrelsen $\mathbf{v}(t)$). Vi skal kalle $a(t)$ for *baneakselerasjonen* ved tiden t . Det er naturlig å spørre om sammenhengen mellom vektoren $\mathbf{a}(t)$ og skalaren $a(t)$. Mange vil kanskje tippe at $|\mathbf{a}(t)| = a(t)$, men følgende eksempel viser at det ikke er tilfellet.

T1.2.26 Eksempel La

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

Da er

$$\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

som gir $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = 1$. Følgelig er $a(t) = v'(t) = 0$, mens

$$\mathbf{a}(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

Dette gir $|\mathbf{a}(t)| = 1$. Vi ser altså at $0 = a(t) \neq |\mathbf{a}(t)| = 1$. Det er ikke så vanskelig å forstå hva som foregår. Gjenstanden vår går i en sirkelbane med konstant fart. Siden farten er konstant, er baneakselerasjonen 0. Hastigheten skifter imidlertid retning hele tiden, og det medfører at $\mathbf{a}(t)$ er forskjellig fra $\mathbf{0}$. ■

Forutsatt at $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, kan vi definere *enhetstangentvektoren* $\mathbf{T}(t)$ ved

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$$

Som navnet sier, har denne vektoren lengde 1 for alle t . Vi kan altså skrive $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$, og deriverer vi dette uttrykket, får vi (husk setning T1.2.24(iv)):

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

Ifølge korollar T1.2.25 står $\mathbf{T}'(t)$ normalt på $\mathbf{T}(t)$ (og dermed på $\mathbf{v}(t)$). Vi har dermed vist:

T1.2.27 Setning Dersom $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, kan akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ dekomponeres i to ortogonale vektorer

$$\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

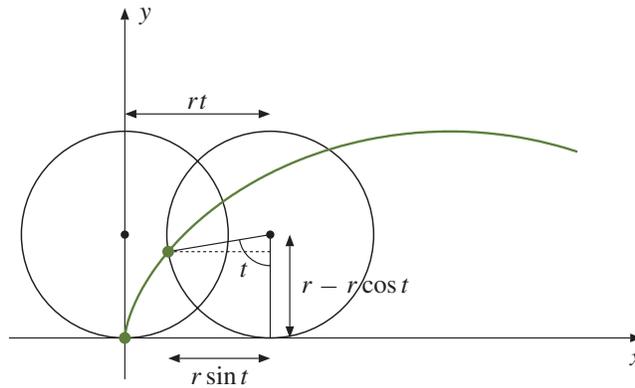
der $a(t)\mathbf{T}(t)$ er parallell med tangenten og $v(t)\mathbf{T}'(t)$ står normalt på tangenten.

Vi ser hva som skjer; baneakselerasjonen $a(t)$ måler hvor mye farten $v(t)$ endrer seg, mens $v(t)\mathbf{T}'(t)$ måler hvor mye retningen endrer seg. Det er mulig å finne et mer informativt uttrykk for leddet $v(t)\mathbf{T}'(t)$, men vi skal ikke komme nærmere inn på dette her.

La oss avslutte denne seksjonen med to eksempler som viser hvordan vi kan bruke parametriserte kurver til å beskrive fenomener i virkeligheten.

T1.2.28 Eksempel Hvilken kurve beskriver et punkt på et hjul når hjulet ruller bortover? Tenk deg av du har festet en refleksbrikke til et sykkeldekk og vil finne kurven som det lysende punktet beskriver i nattemørket.

Vi tenker oss at x -aksen er bakken som hjulet ruller på og at punktet vårt starter i origo. Etter at hjulet har dreiet seg en vinkel t , har hjulet flyttet seg en distanse rt mot høyre, der r er radien i hjulet. Koordinatene til det lysende punktet blir dermed $(rt - r \sin t, r - r \cos t)$ (se figur T1.2.20).



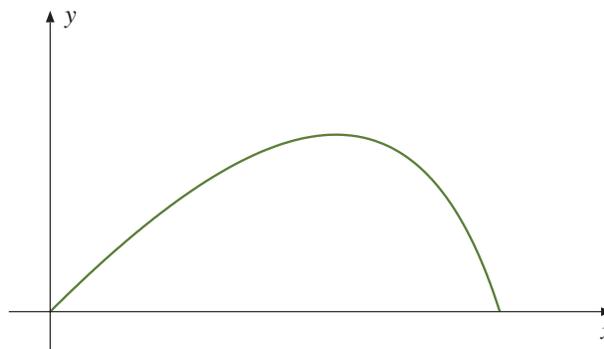
Figur T1.2.20 Et punkt på et rullende hjul

Vi har dermed parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$$

Denne kurven kalles en *sykloide*. ■

T1.2.29 Eksempel I dette eksemplet skal vi studere en stein som kastes (eller et prosjektil som skytes ut) under luftmotstand. Vi skal beskrive bevegelsen i et koordinatsystem som vist på figur T1.2.21 der x -aksen ligger vannrett og y -aksen loddrett.



Figur T1.2.21 Kast med luftmotstand

Vi trenger litt kunnskaper om fysikk. Dersom den totale kraften som virker på prosjektilet er \mathbf{F} og akselerasjonen er \mathbf{a} , så forteller Newtons annen lov oss at $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ der m er massen til steinen. Det er to krefter som virker på steinen i luften. Den ene er tyngdekraften som er gitt ved $-mg\mathbf{j}$ der g er tyngdens akselerasjon ($g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$), og der $\mathbf{j} = (0, 1)$. Den andre kraften er luftmotstanden som vi skal anta er lik $-k\mathbf{v}$ der k er en konstant og \mathbf{v} er hastigheten til steinen (i virkeligheten er luftmotstand en komplisert affære og vår formel er bare én av flere mulige tilnærminger).

Vi lar $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ være posisjonen til steinen ved tiden t . Da er $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ og $\mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t))$. Newtons lov $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ kan nå skrives

$$m\mathbf{a}(t) = -mg\mathbf{j} - k\mathbf{v}$$

Deler vi på m og ser på første- og annenkomponenten hver for seg, får vi:

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x'(t) \quad \text{og} \quad y''(t) = -g - \frac{k}{m}y'(t)$$

For å finne kurven $\mathbf{r}(t)$ må vi løse disse differensialligningene med passende begynnelsesbetingelser. Vi antar at bevegelsen starter i origo med hastighet $\mathbf{v}(0) = (u_1, u_2)$. Da blir begynnelsesbetingelsene $x(0) = 0$, $x'(0) = u_1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = u_2$. Løser vi differensialligningene med disse begynnelsesbetingelsene (gjør det!), får vi

$$x(t) = \frac{mu_1}{k} (1 - e^{-\frac{kt}{m}})$$

$$y(t) = -\frac{mg}{k} t + \left(\frac{mu_2}{k} + \frac{m^2g}{k^2} \right) (1 - e^{-\frac{kt}{m}})$$

Vi har dermed parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{mu_1}{k} (1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{mg}{k} t + \left(\frac{mu_2}{k} + \frac{m^2g}{k^2} \right) (1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \right) \mathbf{j}$$

Legger du denne formelen inn i dataprogram eller en lommeregner og velger verdier for m og k , kan du f.eks. eksperimentere med hvilken utkastvinkel som gir den største kastlengden (sett $u_1 = v_0 \cos(\alpha)$, $u_2 = v_0 \sin(\alpha)$ der v_0 er passende utgangsfart, og undersøk hvordan kastlengden varierer med vinkelen α). ■

I fysikk og beslektede fag brukes parametriserte kurver til å beskrive hvordan objekter beveger seg, for eksempel hvordan planeter, stjerner og meteoriter beveger seg i verdensrommet. Eksempelet ovenfor gir en liten følelse for hvordan man kommer frem til slike parameterfremstillinger: Ved å bruke Newtons lov $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ får vi satt opp differensialligninger som forbinder akselerasjonen $\mathbf{x}''(t) = \mathbf{a}(t)$, hastigheten $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{v}(t)$ og posisjonen $\mathbf{x}(t)$. Løser vi disse differensialligningene med passende begynnelsesbetingelser, finner vi parametriseringen.

Oppgaver

42. En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$. Finn $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$ og $a(t)$.

43. En kurve er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t \sin t)$. Finn $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$ og $a(t)$.

44. En kurve er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

a) Vis at denne kurven er ellipsen med ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

c) Vis at omkretsen til ellipsen er

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

Sett $a = 5$, $b = 3$ og finn omkretsen ved å bruke numerisk integrasjon på en lommeregner eller en datamaskin.

45. Finn buelengden til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3), \quad t \in [0, 10]$$

46. En kurve er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, \ln(\cos t))$ for $t \in [0, \pi/4]$.

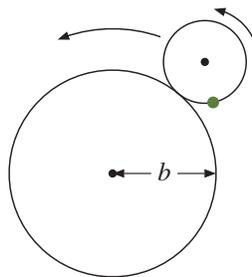
a) Finn hastigheten $\mathbf{v}(t)$ og farten $v(t)$.

b) Finn buelengden (Hint: For å integrere $\frac{1}{\cos x}$ kan det være nyttig å bruke at $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2(x)}$).

47. La $\mathbf{r}(t)$ være sykloiden i eksempel T1.2.28.
- Finn hastigheten og akselerasjonen.
 - Vis at lengden punktet gjennomløper mens hjulet dreier en gang rundt, er

$$r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt.$$

- Forklar hvorfor $\sqrt{1 - \cos t} = \frac{|\sin t|}{\sqrt{1 + \cos t}}$.
 - Regn ut integralet i b).
48. Bevis (i), (ii) og (iv) i setning T1.2.24.
49. En partikkel går i en sirkelbane med radius r om origo. Farten er konstant lik v . Partikkelen starter i punktet $(0, 1)$ ved tiden $t = 0$ og beveger seg mot urviserne.
- Vis at posisjonen ved tiden t er $\mathbf{r}(t) = (r \cos(\frac{vt}{r}), r \sin(\frac{vt}{r}))$.
 - Vis at $\mathbf{a}(t) = -(\frac{v}{r})^2 \mathbf{r}(t)$.
50. En kanonkule skytes ut med en fart v_0 . I utskytingsøyeblikket danner kulens bane en vinkel α med horisontalplanet. Kulens posisjon etter t sekunder kaller vi $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Dersom vi kan se bort fra luftmotstanden, vil $x(t) = v_0 t \cos \alpha$ og $y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$ der g er tyngdens akselerasjon.
- Finn \mathbf{v} og \mathbf{a} .
 - Hvor høyt over bakken er kulen på det høyeste?
 - Hvor langt kan kanonen skyte (vi antar at bakken er horisontal)?
51. Når er steinen i eksempel T1.2.29 i det høyeste punktet på banen? Hvor høyt er dette punktet?
52. Avstanden mellom det stedet der bakhjulet til en sykkel berører bakken, og det stedet der forhjulet berører bakken, er 1 meter. Når vi sykler, etterlater både forhjulet og bakhjulet et spor i bakken.
- Anta at sporet bakhjulet etterlater seg, er gitt ved $\mathbf{r}_1(t)$. Vis at sporet forhjulet etterlater seg, har parametrisering $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{T}_1(t)$, der $\mathbf{T}_1(t)$ er enhetstangentvektoren til $\mathbf{r}_1(t)$.
 - Anta at bakhjulet følger kurven $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sin t)$. Finn parametriseringen $\mathbf{r}_2(t)$ til kurven som forhjulet følger.
 - Bruk en lommeregner eller en datamaskin til å tegne kurvene \mathbf{r}_1 og \mathbf{r}_2 i samme koordinat-system.
 - Dersom du ser sporene etter en sykkel som har vinglet forbi, hvordan kan du avgjøre hvilken retning den har kjørt i?
53. Et hjul med radius a ruller på utsiden av en sirkel med radius b (se figuren).



Finn en parameterfremstilling for den kurven et punkt på hjulet følger. Du kan selv velge hvordan du vil legge koordinatsystemet og hvor startpunktet er.

54. (Eksamen i MAT 100A/C, 8/12-2000) I denne oppgaven er $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ en parametrisert kurve og $\mathbf{b} = (0, y)$, $y > 0$, er et punkt på den positive y -aksen.

a) Skissér kurven og finn $\mathbf{r}'(t)$. Vis at den deriverte til funksjonen

$$f(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|^2$$

kan skrives $f'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$.

b) Vi er interessert i å finne de punktene på kurven som ligger nærmest \mathbf{b} . Vis at dersom $\mathbf{r}(t_0)$ er et slik punkt, så er

$$\mathbf{r}'(t_0) \cdot (\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{b}) = 0$$

Forklar denne likningen geometrisk.

c) Finn de punktene på kurven som ligger nærmest \mathbf{b} .

55. En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, der x og y har kontinuerlige deriverte x' , y' . Anta at $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ er en voksende funksjon med kontinuerlig derivert og at $g(c) = a$, $g(d) = b$.

a) Forklar at $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(g(t))$, $c \leq t \leq d$, er en annen parametrisering av den samme kurven.

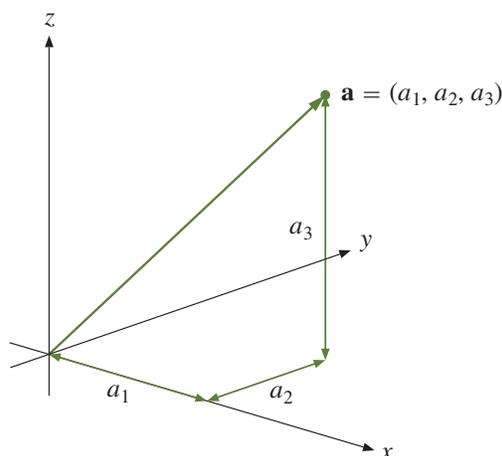
I resten av denne oppgaven skal vi vise at et par grunnleggende geometriske egenskaper til kurven er de samme uansett hvilken av de to parametriseringene vi velger.

b) La $\mathbf{a} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(g(t_0))$ være et punkt på kurven. Vi kan regne ut to tangentvektorer i punktet \mathbf{a} , nemlig $\mathbf{s}'(t_0)$ og $\mathbf{r}'(g(t_0))$. Vis at disse vektorene er parallelle (vi godtar at den ene eller begge er lik $\mathbf{0}$).

c) Vis at buelengden til kurven blir den samme uansett hvilken av de to parametriseringene vi velger.

T1.3 Vektorer i rommet

I dette seksjonen skal vi studere vektorer i rommet. Mye av det som gjelder for vektorer i planet, gjelder med samme begrunnelse for vektorer i rommet, og vi skal derfor ikke gå gjennom alle resonnerer i detalj, men konsentrere oss om det som er nytt i det tre-dimensjonale tilfellet.



Figur T1.3.1 Tre-dimensjonale koordinater

Figur T1.3.1 viser hvordan 3-tupplet (trippelet) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ fremstilles i et tre-dimensjonalt koordinatsystem — a_1 er koordinaten langs førsteaksen, a_2 er koordinaten

langs andreaksen, og a_3 er koordinaten langs tredjeaksen. Som tidligere lønner det seg noen ganger å tenke på trippet (a_1, a_2, a_3) som et punkt og noen ganger som en vektor.

Akkurat som i det to-dimensjonale tilfellet har enhetsvektorene langs aksene egne navn. Vi skriver

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

I enkelte bøker vil du isteden finne notasjonen

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_y = (0, 1, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$$

Legg merke til at enhver vektor kan uttrykkes ved hjelp av \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} på en naturlig måte:

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Vi skal noen ganger ha bruk for denne skrivemåten.

Geometrisk tolkning av regneoperasjonene

Addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med et tall har nøyaktig den samme tolkningen som i planet — addisjon og subtraksjon kan oppfattes som sammensetning av piler, og multiplikasjon med tallet s svarer til å forlenge vektoren med en faktor $|s|$ (og snu retningen hvis s er negativ).

Også skalarproduktet oppfører seg som før. Skalarproduktet av $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er definert ved:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Lengden til vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ er gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

og avstanden $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mellom punktene $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er gitt ved

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Vi har følgende resultater som bevises på samme måte som i planet.

T1.3.1 Setning Hvis \mathbf{a} og \mathbf{b} er to vektorer i rommet, gjelder:

- (a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
- (b) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
- (c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$
- (d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$ der v er vinkelen mellom vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b}
- (e) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
- (f) Projeksjonen \mathbf{p} av \mathbf{a} ned på \mathbf{b} er gitt ved $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$

Vi tar med et eksempel på bruken av (f):

T1.3.2 Eksempel Finn projeksjonen \mathbf{p} av vektoren $\mathbf{a} = (4, 3, -1)$ ned på vektoren $\mathbf{b} = (2, 1, -2)$. Vi får:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = \frac{(4, 3, -1) \cdot (2, 1, -2)}{2^2 + 1^2 + (-2)^2} (2, 1, -2) = \frac{13}{9} (2, 1, -2) = \left(\frac{26}{9}, \frac{13}{9}, -\frac{26}{9} \right)$$

Begrepene «parallell» og «ortogonal» er definert som i det to-dimensjonale tilfellet. To ikke-null vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} er *parallelle* dersom det finnes et tall s slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b}$. De to vektorene er *ortogonale* dersom vinkelen mellom dem er 90° . Det følger fra punkt (d) i setningen ovenfor at \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale hvis og bare hvis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Også parametrisering av linjer foregår på samme måte i rommet som i planet. Linjen gjennom punktet \mathbf{a} parallell med vektoren \mathbf{b} har som før parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Her er et eksempel:

T1.3.3 Eksempel Finn parametriseringen til linjen som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (3, -4, 2)$ og $\mathbf{c} = (-1, 3, 1)$. Denne linjen er parallell med vektoren

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-1, 3, 1) - (3, -4, 2) = (-4, 7, -1)$$

Dermed får vi

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (3 - 4t, -4 + 7t, 2 - t)$$

Oppgaver

1. Finn projeksjonen av $(3, -2, 7)$ ned på $(1, -1, 2)$.
2. Finn lengden av projeksjonen av $(1, 0, -1)$ ned på $(2, 1, 1)$.
3. Finn vinkelen mellom vektorene $(1, 2, 3)$ og $(-1, 0, 1)$.
4. Skriv $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ som en sum av to vektorer \mathbf{b} og \mathbf{c} der \mathbf{b} er parallell med $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$ og \mathbf{c} står normalt på \mathbf{d} .
5. Finn en parametrisering av linjen som går gjennom punktet $(-1, -1, 2)$ og er parallell med $(2, 3, 1)$.
6. Finn en parametrisering av linjen som går gjennom punktene $(7, -3, 2)$ og $(-1, -1, 5)$.
7. Finn to vektorer som begge står normalt på $(3, 2, -1)$ og som ikke er parallelle.
8. En linje går gjennom punktene $(1, 0, 2)$ og $(0, 2, -1)$. Finn det punktet på linjen som ligger nærmest $(2, 3, -1)$.
9. Bevis setning T1.3.1.

10. To fly er i det samme området. Ved tiden $t = 0$ er det ene flyet i punktet $(0, 0, 2000)$ og flyr med en fart på 150m/s parallelt med vektoren $(2, 2, 1)$. Det andre flyet er ved tiden $t = 0$ i punktet $(5000, -1000, 4000)$ og 20 sekunder senere i punktet $(4400, 2000, 4000)$. Flyet følger en rett linje og holder konstant hastighet.

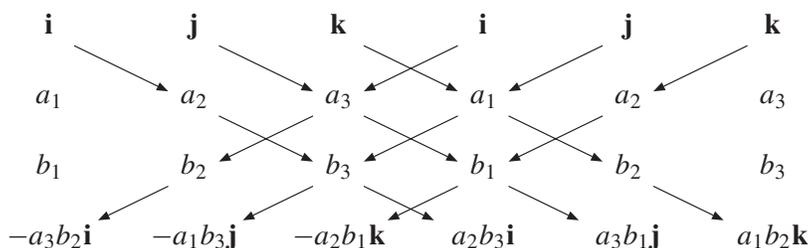
- Vil kursene til de to flyene skjære hverandre?
- Vil flyene kolliderer?

Vektorproduktet

I tre dimensjoner finnes det en regneoperasjon som ikke eksisterer i to dimensjoner, nemlig vektorproduktet (eller kryssproduktet som det også kalles). Vektorproduktet mellom to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er definert ved:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Denne formelen kan være vanskelig å huske, men det finnes en del huskereglar. Én slik huskeregel er vist i skjemaet nedenfor. Vi multipliserer langs pilene og gir resultatet positiv verdi dersom pilene går fra venstre mot høyre og negativ verdi dersom de går motsatt vei. Vi skal se på en annen huskeregel for vektorproduktet litt senere i dette kapitlet (og kan du en tredje, kan du trygt bruke den).



La oss regne ut et vektorprodukt:

T1.3.4 Eksempel Finn vektorproduktet av $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$ og $\mathbf{b} = (4, -2, 5)$. Vi får:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= ((-1) \cdot 5 - 2 \cdot (-2))\mathbf{i} + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5)\mathbf{j} + (3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4)\mathbf{k} \\ &= (-1, -7, -2)\end{aligned}$$

La oss gjenkalle hva som skjer dersom vi regner ut $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ istedenfor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \times \mathbf{a} &= (b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1a_2 - b_2a_1) \\ &= -(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= -\mathbf{a} \times \mathbf{b}\end{aligned}$$

For vektorproduktet gjelder altså ikke den gamle regelen om at faktorenes orden er likegyldig, men vi har i det minste en regel som ligner ganske mye. Vi sier at vektorproduktet er *anti-kommutativt*.

Her er en liste over de grunnleggende egenskapene til kryssproduktet:

T1.3.5 Setning For vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} i rommet gjelder:

- (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ og $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- (c) $\mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ og $(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ der $s \in \mathbb{R}$
- (d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står ortogonalt på både \mathbf{a} og \mathbf{b}
- (e) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ (*Lagranges identitet*)

Bevis: Punkt (a) har vi allerede bevist og de andre bevisene er av samme type — vi skriver vektorene på koordinatform, regner ut og ser at det stemmer: Vi tar (c), (d) og (e) som eksempler:

(c) Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, så er $s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, sa_3)$. Vi får:

$$\begin{aligned} (s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= ((sa_2)b_3 - (sa_3)b_2, (sa_3)b_1 - (sa_1)b_3, (sa_1)b_2 - (sa_2)b_1) \\ &= s(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= s(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Den andre likheten i (c) går på samme måte.

(d) For å vise at \mathbf{a} står ortogonalt på $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, må vi vise at $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. Vi får:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En helt tilsvarende regning viser at \mathbf{b} står ortogonalt på $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(e) Vi skriver $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og regner ut begge sider (du er ikke forpliktet til å føle at dette er spesielt festlig):

$$\begin{aligned} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 \\ &\quad - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 \\ &\quad + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 \\ &\quad - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 \\ &\quad - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3 \end{aligned}$$

Bortsett fra rekkefølgen på leddene er dette det samme uttrykket som vi fikk ovenfor. Dermed er (e) bevist. ■

BEMERKNING: Legg merke til at det ikke finnes noen assosiativ lov i listen ovenfor. Generelt er $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Som et eksempel lar vi $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$ og $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$. Da er

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = ((1, 1, 0) \times (1, 0, 0)) \times (0, 0, 1) = (0, 0, -1) \times (0, 0, 1) = \mathbf{0}$$

mens

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (1, 1, 0) \times ((1, 0, 0) \times (0, 0, 1)) = (1, 1, 0) \times (0, -1, 0) = (0, 0, -1)$$

At $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ betyr at uttrykket $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ikke gir noen mening — vi må ha med parenteser for å presisere hvilken rekkefølge produktene skal utføres i.

Akkurat som skalarproduktet har vektorproduktet en geometrisk tolkning som er viktig i anvendelser. Vi tar utgangspunkt i punkt (e) i setningen ovenfor:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

Siden vi allerede vet at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos v$, der v er vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} , så er

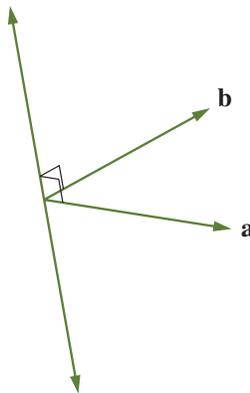
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 v = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 v$$

der vi har benyttet at $1 - \cos^2 v = \sin^2 v$. Altså er

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin v$$

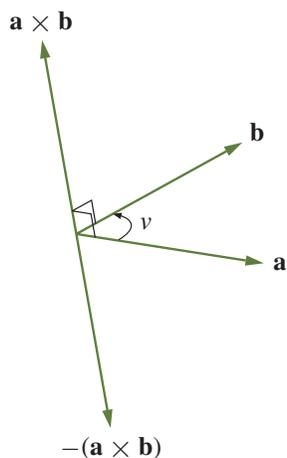
(husk at siden $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$, er $\sin v$ aldri negativ). Dermed vet vi hvor lang vektoren $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er. Legg spesielt merke til at $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\sin v = 0$, dvs. dersom \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle.

Fra punkt (d) i setning T1.3.5 vet vi også noe om retningen til $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, nemlig at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står normalt på både \mathbf{a} og \mathbf{b} . Nå finnes det to motsatt rettede vektorer som har lengde $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin v$ og står normalt på både \mathbf{a} og \mathbf{b} (se figur T1.3.2).



Figur T1.3.2 To vektorer som står normalt på både \mathbf{a} og \mathbf{b}

For å vite hvilken av disse to vektorene som er $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, bruker vi *høyrehåndsregelen*: Vi legger høyre hånd med fingrene fra \mathbf{a} mot \mathbf{b} mens vi spriker med tommelen. Da er $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ den av de to normalvektorene som peker i tommelens retning (se figur T1.3.3 der den krumme pilen viser den retningen fingrene peker).



Figur T1.3.3 Vektorene $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ og $-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

La oss oppsummere det vi har kommet frem til:

T1.3.6 Setning La \mathbf{a} og \mathbf{b} være to vektorer i rommet og kall vinkelen mellom dem v . Da har vektorproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ lengde $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin v$ og står normalt på både \mathbf{a} og \mathbf{b} . Retningen til $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er gitt ved høyrehåndsregelen.

Bevis: Vi har bevist alt bortsett fra høyrehåndsregelen. Beviset vi skal gi for denne regelen kan se litt umatematisk og skissemessig (og vanskelig!) ut, men det kan uten store endringer bygges ut til et fullverdig bevis.

Vi skal først bevise høyrehåndsregelen for to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ som ligger i xy -planet. I dette tilfellet vil $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ være parallell med z -aksen. Hvis høyrehåndsregelen holder, skal $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ peke i samme retning som \mathbf{k} dersom paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt orientert, og i samme retning som $-\mathbf{k}$ dersom (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er negativt orientert (sjekk dette!). Regner vi ut kryssproduktet får vi:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Vi ser at $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Det betyr at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ peker i samme retning som \mathbf{k} dersom determinanten $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ er positiv, og i samme retning som $-\mathbf{k}$ dersom determinanten er negativ. Siden fortegnet til denne determinanten gjenspeiler orienteringen til paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , betyr dette at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ peker i samme retning som \mathbf{k} dersom paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) er positivt orientert, og i samme retning som $-\mathbf{k}$ dersom dette paret er negativt orientert. Men det er jo akkurat hva høyrehåndsregelen forutsa, og følgelig gjelder høyrehåndsregelen når \mathbf{a} og \mathbf{b} ligger i xy -planet.

Vi er nå rede til å se på det generelle tilfellet $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Velg et par av vektorer $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ i xy -planet som er en «kopi» av paret \mathbf{a}, \mathbf{b} . Med dette mener jeg at \mathbf{a}_0 er like lang som \mathbf{a} , \mathbf{b}_0 er like lang som \mathbf{b} , og at vinkelen fra \mathbf{a}_0 til \mathbf{b}_0 er lik vinkelen fra \mathbf{a} til \mathbf{b} . La $\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0$. Siden vektorene \mathbf{a}_0 og \mathbf{b}_0 ligger i xy -planet, gjelder høyrehåndsregelen for $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ og \mathbf{c}_0 .

La oss nå tenke på vektortriplet $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0)$ som en materiell gjenstand, f.eks. tre sammensveide biter av ståltråd. Vi flytter nå denne gjenstanden med en kontinuerlig bevegelse, uten å deformere den på noen måte, slik at \mathbf{a}_0 ender opp som \mathbf{a} , og \mathbf{b}_0 ender opp som \mathbf{b} . La $\mathbf{a}(t)$ være posisjonen til \mathbf{a}_0 etter t sekunder av denne bevegelsen, og la $\mathbf{b}(t)$ og $\mathbf{c}(t)$ være de tilsvarende posisjonene til \mathbf{b}_0 og \mathbf{c}_0 . Hvis bevegelsen tar T sekunder, er dermed $\mathbf{a} = \mathbf{a}(T)$ og $\mathbf{b} = \mathbf{b}(T)$.

Dersom $\mathbf{c}(T) = \mathbf{a}(T) \times \mathbf{b}(T)$, er høyrehåndsregelen oppfylt for trippet $\mathbf{a}(T) = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}(T) = \mathbf{b}$, $\mathbf{c}(T) = \mathbf{c}$. Vi skal derfor anta at $\mathbf{c}(T) = -\mathbf{a}(T) \times \mathbf{b}(T)$ (den eneste andre muligheten) og vise at dette fører til en selvmotsigelse. La t_0 være det første tidspunktet der $\mathbf{c}(t)$ skifter fra å være lik $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ til å være lik $-\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ (formelt er $t_0 = \inf\{t : \mathbf{c}(t) = -\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)\}$). Siden $\mathbf{c}(t)$ beveger seg kontinuerlig, betyr dette at $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ må gjøre et sprang ved tidspunktet t_0 . Men det er umulig siden $\mathbf{a}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ gjør det (tenk på det algebraiske uttrykket for vektorproduktet). Dermed har vi fått vår selvmotsigelse, og beviset er fullført. ■

Vi skal nå se på noen av de tingene vektorproduktet kan brukes til. Først et enkelt eksempel.

T1.3.7 Eksempel Finn en vektor som står ortogonalt på både $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, -2)$. Vi regner rett og slett ut vektorproduktet:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -2, 3) \times (4, -1, -2) = (7, 14, 7)$$

Legg merke til at siden $(7, 14, 7) = 7(1, 2, 1)$, kan vi forenkle løsningen til $(1, 2, 1)$. ■

Det neste vi skal se på, er hvordan hvordan vektorproduktet kan brukes til å regne ut arealer.

T1.3.8 Setning Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} er lik $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Arealet til trekanten utspent av \mathbf{a} og \mathbf{b} er $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Bevis: Fra forrige seksjon vet vi at arealet til et parallellogram er produktet av de to sidene ganget med sinus til den mellomliggende vinkelen. For vårt parallellogram blir dette $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \nu$, som vi vet er lik $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Siden arealet av trekanten er halvparten av arealet til parallellogrammet, får vi også formelen for arealet av trekanten. ■

T1.3.9 Eksempel Finn arealet til trekanten med hjørner i punktene $\mathbf{a} = (2, -7, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 2)$ og $\mathbf{c} = (2, 2, 2)$. Denne trekanten har samme areal som den utspent av vektorene $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ og $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (hvorfor?). Siden $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (0, 9, -1)$ og $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-4, 10, -1)$, får vi:

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (0, 9, -1) \times (-4, 10, -1) = (1, 4, 36)$$

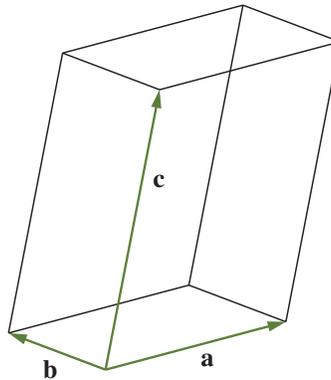
Dermed er arealet til trekanten lik

$$\frac{1}{2}|(1, 4, 36)| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 4^2 + 36^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1313}$$

■

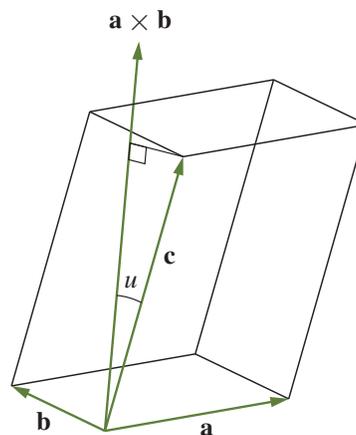
Eksemplet ovenfor viser noe av styrken ved å bruke vektorregning til å regne ut geometriske størrelser; det spiller ikke noen rolle hvor komplisert punktene ligger i forhold til hverandre — vi bare kopler inn den generelle formelen og ut faller svaret. Hadde vi prøvd å finne arealet med tradisjonelle geometriske metoder, hadde vi fort druknet i finurlige tegninger og kompliserte beregninger. Ulempen ved å bruke vektorregning er at vi ofte mister kontakten med det geometriske bildet — regningen viser oss at noe er riktig, men vi skjønner ikke riktig hvorfor.

Vektorproduktet kan også brukes til å regne ut volumer. Tre vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} i rommet definerer på en naturlig måte et romlegeme, et *parallelepiped* som vist på figur T1.3.4.



Figur T1.3.4 Parallelepipedet utspent av \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c}

Fra skolen vet vi at volumet til et parallelepiped er arealet av grunnflaten ganget med høyden. Sier vi at grunnflaten er parallelogrammet utspent av \mathbf{a} og \mathbf{b} , vet vi at arealet til grunnflaten er $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. På figur T1.3.5 har vi kalt vinkelen mellom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ og den tredje vektoren \mathbf{c} for u .



Figur T1.3.5 Volumet til et parallelepiped

Siden $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står normalt på grunnflaten, blir høyden h lik $|\mathbf{c}| \cos u$ (vi må ha med tallverdien rundt cosinus i tilfelle u er større en 90°). Volumet til parallelepipedet er derfor $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos u$. Men dette uttrykket er jo lik $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ (husk den geometriske beskrivelsen av skalarproduktet). Dermed har vi vist:

T1.3.10 Setning Volumet til parallelepipedet utspent av vektorene \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} er $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

BEMERKNING: Når vi skal regne ut volumet til parallelepipedet utspent av \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} , spiller selvfølgelig ikke rekkefølgen av de tre vektorene noen rolle. Volumet kan derfor skrives som både $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$, $|(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}|$, $|(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}|$, $|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}|$, $|(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}|$ og $|(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}|$. Disse seks uttrykkene må derfor være like. Hvis du orker, kan du sjekke dette ved direkte utregning.

T1.3.11 Eksempel Finn volumet til parallelepipedet som utspennes av vektorene $(4, 0, 3)$, $(-1, 2, -3)$ og $(0, 2, 1)$. Ifølge setningen er dette volumet gitt ved $|((4, 0, 3) \times (-1, 2, -3)) \cdot (0, 2, 1)|$. Vi regner først ut

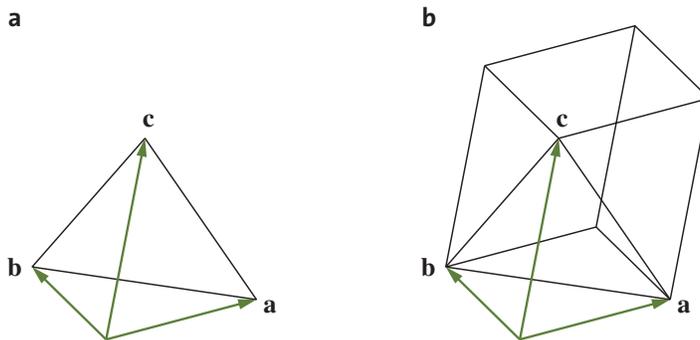
$$(4, 0, 3) \times (-1, 2, -3) = (-6, 9, 8)$$

Deretter tar vi

$$|(-6, 9, 8) \cdot (0, 2, 1)| = |0 + 18 + 8| = 26$$

Volumet er altså 26. ■

Tre vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} utspenner også en pyramide (se figur T1.3.6a). For å finne volumet til denne pyramiden husker vi at volumet til en generell pyramide er $\frac{1}{3}gh$, der h er høyden og g er arealet til grunnflaten.



Figur T1.3.6 Pyramiden og parallelepipedet utspent av \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c}

Sammenligner vi pyramiden utspent av \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} med parallelepipedet utspent av de samme vektorene (figur T1.3.6b), ser vi at høydene er like, men at grunnflaten til pyramiden er halvparten av grunnflaten til parallelepipedet. Det betyr at volumet til pyramiden må være en seksdel av volumet til parallelepipedet. Dermed har vi:

T1.3.12 Korollar Volumet av pyramiden utspent av de tre vektorene \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} er $\frac{1}{6}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

T1.3.13 Eksempel Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $\mathbf{a} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (1, 4, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 4, 7)$ og $\mathbf{d} = (3, 0, 5)$. Denne pyramiden har samme volum

som pyramiden utspent av vektorene $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ og $\mathbf{d} - \mathbf{a}$ (forklar hvorfor!). Siden

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2, 2, 4), \quad \mathbf{c} - \mathbf{a} = (1, 2, 10), \quad \mathbf{d} - \mathbf{a} = (4, -2, 8)$$

får vi:

$$\begin{aligned} \text{Volum} &= \frac{1}{6} |((2, 2, 4) \times (1, 2, 10)) \cdot (4, -2, 8)| = \frac{1}{6} |(12, -16, 2) \cdot (4, -2, 8)| \\ &= \frac{96}{6} = 16 \end{aligned}$$

Oppgaver

11. Regn ut $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ når

a) $\mathbf{a} = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 7)$ b) $\mathbf{a} = (4, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (-6, 1, 0)$

12. Finn arealet til parallelogrammet utspent av $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ og $\mathbf{b} = (4, 0, -2)$.

13. En trekant har hjørner i punktene $(0, -1, 2)$, $(2, -1, 4)$ og $(3, 0, 4)$. Finn arealet.

14. Finn en vektor som står normalt på både $(2, 0, -3)$ og $(-1, 3, 4)$.

15. Regn ut $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$.

16. Finn volumet til parallelepipedet utspent av $(3, -2, -2)$, $(0, 0, 4)$ og $(-3, 2, 1)$.

17. En pyramide har hjørner i punktene $(2, -1, 2)$, $(0, 5, -3)$, $(2, 4, 6)$ og $(3, -2, 4)$. Finn volumet.

18. Anta at alle hjørnene i et parallelepiped har heltallige koeffisienter. Vis at volumet er et helt tall.

19. Bevis setning T1.3.5(b).

Determinanter, volumer og orientering

Gitt ni tall $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, definerer vi en 3×3 -determinant ved

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

der 2×2 -determinantene på høyre side regnes ut på vanlig måte. Legg merke til hvordan disse 2×2 -determinantene fremkommer fra den opprinnelige determinanten — for å finne den 2×2 -determinanten som ganges med a_1 , stryker vi den linjen og den søylen som går gjennom a_1 (se figur 7), for å finne den 2×2 -determinanten som ganges med a_2 , stryker vi den linjen og den søylen som går gjennom a_2 , osv. Legg også merke til at fortegnene til leddene på høyre side veksler mellom pluss og minus.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Figur T1.3.7 2×2 -determinanten som skal ganges med a_1

La oss regne ut en 3×3 -determinant.

T1.3.14 Eksempel Regn ut

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2((-4) \cdot 2 - 0 \cdot 1) - 3(5 \cdot 2 - 0 \cdot (-3)) \\ &\quad + (-1)(5 \cdot 1 - (-4)(-3)) \\ &= 2(-8) - 3 \cdot 10 + (-1)(-7) \\ &= -16 - 30 + 7 = -39 \end{aligned}$$

■

Det er en nær sammenheng mellom 3×3 -determinanter og kryssproduktet. Som et første eksempel har vi følgende huskeregel for kryssproduktet (den forutsetter at du husker hvordan man regner ut 3×3 -determinanter):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Siden vi bare har definert determinanten når elementene a_1, a_2 osv. er tall, gir det første skrittet i denne utregningen egentlig ikke mening, men resultatet er likevel en grei huskeregel.

Vi har tidligere sett at 2×2 -determinanter kan brukes til å regne ut arealer og til å bestemme orienteringen til vektorpar (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . På tilsvarende måte kan vi bruke 3×3 -determinanter til å regne ut volumer og til å bestemme orienteringen til vektortripler $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Før vi begynner, kan det være greit å bli enig om notasjonen. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, skriver vi

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Vi observerer så at

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \end{aligned}$$

Sammenholder vi dette med setning T1.3.10 og korollar T1.3.12. får vi:

T1.3.15 Setning Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ er $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$. Volumet av pyramiden utspent av $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ er $\frac{1}{6} |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

Legg merke til at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ hvis volumet til parallellepipedet er 0. Det skjer hvis og bare hvis vektorene \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} ligger i samme plan gjennom origo.

Hva så med orienteringen? Først må vi definere når et trippel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt og negativt orientert: To punkter \mathbf{a} og \mathbf{b} definerer sammen med origo et plan (vi skal komme tilbake til plan i større detalj i neste avsnitt). Dette planet deler rommet i to halvdelar. Dersom \mathbf{c} ligger på samme side av planet som kryssproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, sier vi at trippellet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er *positivt orientert*. Dersom \mathbf{c} ligger på den andre siden av planet, sier vi at trippellet er *negativt orientert*. Bruker vi den geometriske tolkningen av skalarproduktet, ser vi at trippellet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt orientert hvis og bare hvis $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ er positiv (for da er vinkelen mellom \mathbf{c} og $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mindre enn 90°). Det er lett (men ikke særlig spennende) å sjekke at $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (det er ikke noe mystisk i dette — både $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ og $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ er lik volumet til parallellepipedet utspent av \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} , så alt vi sjekker er at fortegnet er det samme). Dette betyr at $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt orientert hvis og bare hvis $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positiv. Vi har altså den samme forbindelsen mellom positiv orientering og positiv determinanter som i det to-dimensjonale tilfellet.

Oppgaver

20. Regn ut determinantene:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

21. Finn volumet til parallellepipedet utspent av $(-1, 0, 2)$, $(3, -1, 3)$ og $(4, 0, -1)$.

22. Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $(2, 2, 2)$, $(-1, 2, 3)$, $(3, 4, 2)$ og $(7, 2, 2)$.

23. Avgjør om trippellet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt eller negativt orientert når $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 4)$ og $\mathbf{c} = (7, -1, 2)$.

24. Vis at

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

dvs. at determinanten er den samme om vi bytter om søyler og linjer.

25. Vis at dersom \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} er ortogonale, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$.

26. I denne oppgaven er \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} og \mathbf{d} tredimensjonale vektorer.

a) Vis at dersom to av vektorene \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} er like, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$

b) Vis at for alle vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} og alle skalarer s, t gjelder

$$\det(s\mathbf{a} + t\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = s \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + t \det(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

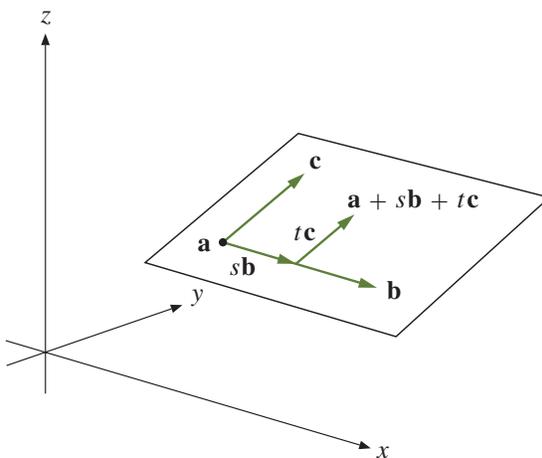
c) Vi sier at en vektor \mathbf{a} er en *lineærkombinasjon* av vektorene \mathbf{b} , \mathbf{c} dersom det finnes skalarer s, t slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$. Bruk a) og b) til å vise at dersom \mathbf{a} er en lineærkombinasjon av \mathbf{b} og \mathbf{c} , så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

d) Gi en geometrisk forklaring på resultatet i c).

27. Vis at dersom $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt (hhv. negativt) orientert, så er $(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ negativt (hhv. positivt orientert). Hva skjer med determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ når vi bytter om de to nederste linjene? Hva skjer dersom vi bytter om to andre linjer?

Plan

Intuitivt er et plan en ubegrenset plan flate i rommet. Naturlige eksempler er xy -planet (som består av alle punkter $(x, y, 0)$ med sistekomponent lik 0) og xz -planet (som består av alle punkter med annenkomponent lik 0). Det første planet er vannrett, det andre er loddrett. Tre punkter $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ som ikke ligger på samme rette linje, definerer alltid et plan i rommet. Det er lettest å forestille seg dette planet ved å tenke seg at man har en flyttbar, plan flate (f.eks. en enorm bordplate) som man lar hvile på de tre punktene.



Figur T1.3.8 Planet gjennom \mathbf{a} utspent av \mathbf{b} og \mathbf{c}

Gitt et punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og to ikke-parallele vektorer $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, danner alle punkter på formen $\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$, der $s, t \in \mathbb{R}$, et plan som vi skal kalle *planet gjennom \mathbf{a} utspent av \mathbf{b} og \mathbf{c}* . Dette planet består av alle de punktene du kan komme til når du starter i \mathbf{a} og først går et stykke parallelt med \mathbf{b} og så snur og går et stykke parallelt med \mathbf{c} (se figur 8). Vi skal bruke skrivemåten

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$$

og kalle dette en *parameterfremstilling* av planet vårt.

T1.3.16 Eksempel Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{d} = (2, 3, -1)$ og $\mathbf{e} = (0, -2, 1)$. Sjekk deretter om punktet $(0, 7, 1)$ ligger i dette planet.

Vi lar $\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$ og $\mathbf{c} = \mathbf{e} - \mathbf{a}$. Da vil planet som går gjennom \mathbf{a} og er utspent av \mathbf{b} og \mathbf{c} , være det planet vi jakter på (hvorfor?). Siden

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = (2, 3, -1) - (-1, 0, 2) = (3, 3, -3)$$

og

$$\mathbf{c} = \mathbf{e} - \mathbf{a} = (0, -2, 1) - (-1, 0, 2) = (1, -2, -1)$$

får vi:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(s, t) &= \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = (-1, 0, 2) + s(3, 3, -3) + t(1, -2, -1) \\ &= (-1 + 3s + t, 3s - 2t, 2 - 3s - t)\end{aligned}$$

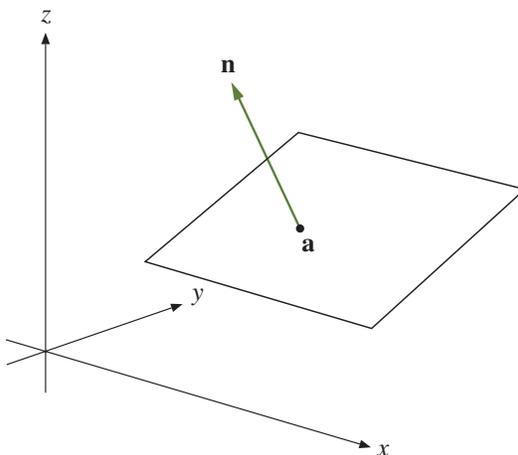
som er parameterfremstillingen.

Skal punktet $(0, 7, 1)$ ligge i planet, må det finnes tall s og t slik at $\mathbf{r}(s, t) = (0, 7, 1)$, dvs.,

$$-1 + 3s + t = 0 \quad \text{og} \quad 3s - 2t = 7 \quad \text{og} \quad 2 - 3s - t = 1$$

Løser vi de to første ligningene, får vi $s = 1, t = -2$. Setter vi disse to tallene inn i den tredje ligningen, ser vi at de stemmer. Det betyr at punktet ligger i planet (hadde parets $s = 1, t = -2$ ikke passet i den siste ligningen, ville punktet ikke ha ligget i planet). ■

Det er en annen naturlig måte å beskrive et plan på. Vi oppgir et punkt \mathbf{a} som planet skal gå gjennom, og en vektor \mathbf{n} som står normalt på planet (se figur T1.3.9). Vi kaller \mathbf{n} for en *normalvektor* til planet.



Figur T1.3.9 Planet gjennom \mathbf{a} normalt på \mathbf{n}

Dersom vi har et plan gjennom \mathbf{a} utspent av \mathbf{b} og \mathbf{c} , er det lett å finne en normalvektor; vi setter simpelthen $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Av og til ønsker vi å gå den andre veien — vi kjenner en normalvektor \mathbf{n} og ønsker å finne to vektorer \mathbf{b} og \mathbf{c} som utspenner planet. Det betyr at vi må finne to vektorer \mathbf{b} og \mathbf{c} som ikke er parallelle, og som begge står normalt på \mathbf{n} . Dersom $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, vil en vektor $\mathbf{x} = (x, y, z)$ stå normalt på \mathbf{n} dersom $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_1x + n_2y + n_3z = 0$. Det er ikke vanskelig å finne løsninger av denne ligningen (gi pene verdier til to av variablene x, y og z og løs ligningen for den siste variabelen). Her er et eksempel:

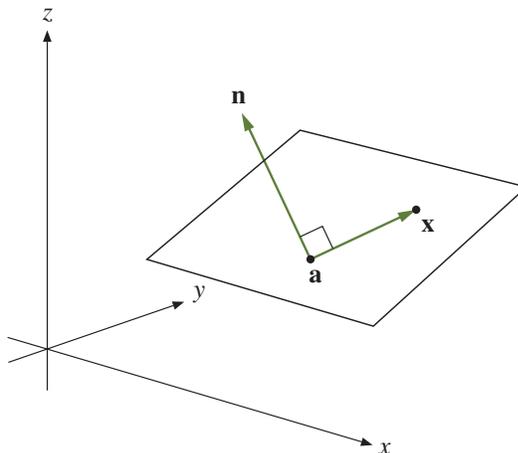
T1.3.17 Eksempel Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktet $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ og står normalt på vektoren $\mathbf{n} = (-4, 3, -1)$. For å finne vektorer $\mathbf{x} = (x, y, z)$ som står normalt på \mathbf{n} , løser vi ligningen

$$-4x + 3y - z = 0$$

Setter vi $x = 1$ og $y = 0$, ser vi at vi må ha $z = -4$. En løsning er derfor $\mathbf{b} = (1, 0, -4)$. Setter vi isteden $x = 0$ og $y = 1$, ser vi at vi må ha $z = 3$. En annen løsning er dermed $\mathbf{c} = (0, 1, 3)$. Nå kan vi finne en parameterfremstilling (mange andre er mulig):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s, t) &= \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = (1, -2, 3) + s(1, 0, -4) + t(0, 1, 3) \\ &= (1 + s, -2 + t, 3 - 4s + 3t) \end{aligned}$$

Som vi ser av dette eksemplet, krever det litt arbeid å finne parameterfremstillingen til et plan når vi kjenner en normalvektor \mathbf{n} og et punkt \mathbf{a} i planet. Det er en annen måte å beskrive et plan på som er vel så anvendelig i dette tilfellet: Vi begynner med å observere at de punktene som ligger i planet vårt, er nøyaktig de punktene $\mathbf{x} = (x, y, z)$ slik at $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ står normalt på vektoren \mathbf{n} , dvs. nøyaktig de punktene \mathbf{x} slik at $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ (se figur T1.3.10).



Figur T1.3.10 \mathbf{x} ligger i planet gjennom \mathbf{a} normalt på \mathbf{n}

Dersom $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ og $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, kan ligningen ovenfor skrives

$$0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = n_1x + n_2y + n_3z - n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$$

eller med andre ord

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3$$

Dette kaller vi *ligningen* til planet.

T1.3.18 Eksempel Finn ligningen til planet som går gjennom $\mathbf{a} = (-3, 1, 2)$ og står normalt på $\mathbf{n} = (-4, 2, -1)$. Undersøk om punktet $(-2, 4, 3)$ ligger i dette planet.

Vi skal finne alle vektorer $\mathbf{x} = (x, y, z)$ slik at $0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$, dvs.

$$\begin{aligned} 0 &= (-4, 2, -1) \cdot (x - (-3), y - 1, z - 2) \\ &= (-4)(x + 3) + 2(y - 1) - 1(z - 2) \\ &= -4x + 2y - z - 12 \end{aligned}$$

Altså blir ligningen

$$-4x + 2y - z = 12$$

For å undersøke om punktet $(-2, 4, 3)$ ligger i planet, sjekker vi om det passer i ligningen. Setter vi inn på venstre side, får vi:

$$-4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 - 3 = 13 \neq 12$$

som viser at punktet ikke ligger i planet. ■

Vi kan snu prosedyren ovenfor på hodet. Gitt en ligning

$$ax + by + cz = d$$

vil alle løsningene (x, y, z) danne et plan med normalvektor (a, b, c) . For å se hvilket plan det er snakk om, behøver vi bare finne én løsning (x_0, y_0, z_0) av ligningen $ax + by + cz = d$. La oss se på et eksempel.

T1.3.19 Eksempel Gi en geometrisk beskrivelse av løsningene til ligningen

$$-2x + y - 3z = 5$$

Dette er et plan med normalvektor $(-2, 1, -3)$. Velger vi $x = 1$ og $z = 0$, må vi ha $y = 7$. Vi har altså et plan gjennom $(1, 7, 0)$ med normalvektor $(-2, 1, 3)$. (Som en test kan du bruke metoden i forrige eksempel til å finne ligningen til planet gjennom $(1, 7, 0)$ normalt på $(-2, 1, 3)$ og se at du kommer tilbake til samme ligning.) ■

Til slutt i dette avsnittet skal vi se på et spørsmål som ofte dukker opp: Gitt et punkt \mathbf{x} og et plan P med ligning

$$ax + by + cz = d$$

Hva er avstanden fra punktet \mathbf{x} til planet P ? La oss først bli enige om at vi med dette mener avstanden fra \mathbf{x} til det nærmeste punktet i planet P . Dette punktet finner vi ved å starte i \mathbf{x} og følge normalen til planet inntil vi treffer planet. La oss formulere dette matematisk: Å starte i \mathbf{x} og gå i retning normalt på planet, må bety å følge linjen gjennom \mathbf{x} parallell med normalvektoren $\mathbf{n} = (a, b, c)$, altså linjen med parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{n}$. Dersom \mathbf{x} har koordinatene (x_0, y_0, z_0) , kan denne parameterfremstillingen skrives

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{n} = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Vi er interessert i det punktet der denne linjen skjærer planet P . Koordinatene til dette punktet må passe i ligningen til P , dvs. vi må ha:

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) = d$$

Løser vi denne ligningen for t , får vi

$$t = \frac{d - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}$$

Avstanden vi er interessert i, er avstanden mellom skjæringspunktet $\mathbf{x} + t\mathbf{n}$ og det opprinnelige punktet \mathbf{x} . Denne avstanden blir

$$|(\mathbf{x} + t\mathbf{n}) - \mathbf{x}| = |t\mathbf{n}| = |t||\mathbf{n}| = \frac{|d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|}{|\mathbf{n}|^2} |\mathbf{n}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d|}{|\mathbf{n}|}$$

Bruker vi at $\mathbf{n} = (a, b, c)$ og $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0)$, ser vi at

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vi har dermed vist følgende resultat:

T1.3.20 Setning Avstanden fra punktet $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0)$ til planet med ligning $ax + by + cz = d$ er

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

der $\mathbf{n} = (a, b, c)$ er normalvektoren.

Legg merke til at vi lett kan finne det punktet i planet som ligger nærmest \mathbf{x} . Setter vi uttrykket $t = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}$ inn i parameterfremstillingen, ser vi at dette punktet er gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + t\mathbf{n} &= (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) \\ &= \left(x_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}a, y_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}b, z_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}c \right) \end{aligned}$$

T1.3.21 Eksempel Finn avstanden fra punktet $(3, 2, -4)$ til planet med ligning $-2x + y - 5z = 2$. Setter vi inn i formelen, ser vi at avstanden blir

$$\frac{|(-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-5) \cdot (-4) - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{14}{\sqrt{30}}$$

Oppgaver

28. Finn en parameterfremstilling for planet gjennom $(2, 1, 2)$ utspent av $(1, 2, 3)$ og $(-2, 3, 1)$. Avgjør om punktet $(-1, -2, -1)$ ligger i dette planet.
29. Finn en parameterfremstilling for planet gjennom $(3, 0, -2)$ utspent av $(-1, 3, 2)$ og $(-5, 0, 1)$. Avgjør om punktet $(-6, -3, -2)$ ligger i dette planet.
30. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktene $(3, -1, 2)$, $(4, 1, 1)$ og $(-2, -1, 1)$.
31. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktene $(0, 3, 1)$, $(2, -3, 1)$ og $(-2, 1, 1)$. Avgjør om punktet $(1, 2, 1)$ ligger i dette planet.
32. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom $(-1, 2, 2)$ og står normalt på $(2, 1, 2)$.
33. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom $(3, 0, 3)$ og står normalt på $(1, 3, 1)$.
34. Finn en ligning for planet som går gjennom $(3, 1, -1)$ og står normalt på $(4, -1, 1)$.
35. Undersøk om punktene $(1, -1, 1)$ og $(2, -1, 4)$ ligger i planet $x - 3y + 2z = 6$.
36. Finn en normalvektor til planet $2x - 3y + z = 4$. Finn også et punkt som ligger i planet.
37. Finn en ligning for planet som går gjennom $(0, 1, -2)$ og står normalt på $(3, 1, 2)$.
38. Finn en ligning for planet som har parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = (-2 + 3s - t, 1 + s - 2t, 2 + s + 5t)$.

39. Finn avstanden fra punktet $(2, -1, 2)$ til planet $2x - y + 3z = 4$.
40. Finn avstanden fra punktet $(3, 4, 0)$ til planet $-x + 2y + z = 2$.
41. Finn avstanden fra punktet $(1, 1, 1)$ til planet som går gjennom $(1, 0, 3)$ og står normalt på $(6, -2, 3)$.
42. Finn avstanden fra punktet $(2, 2, 3)$ til planet med parameterfremstilling $\mathbf{r}(s, t) = (-1 + s + t, 2 + s - t, 2 + 3s - 2t)$.
43. Planene $x - y + z = 2$ og $2x + y - z = 4$ skjærer hverandre i en rett linje. Finn en parameterfremstilling for denne linjen.
44. K er kulen med sentrum i origo og radius 3. Finn formelen for planet som tangerer K i punktet $(2, 2, 1)$.
45. Et plan består av alle punkter som ligger like langt fra punktet $(2, 4, 2)$ som fra $(-2, 0, 8)$. Finn ligningen til planet.
46. Planet P har ligningen $x + y + z = 1$. Punktene (a, b, c) og (a', b', c') er speilbilder av hverandre om planet P . Finn a', b' og c' uttrykt ved a, b og c .
47. (Eksamen i MA 104, 29/5-1995) La P være planet som går gjennom punktet $(1, 0, 1)$ og som er parallelt med vektorene $(1, 1, 0)$ og $(0, 1, 1)$.
- Finn en ligning for P .
 - La l_1 være linjen som går gjennom origo og punktet $(1, 0, 1)$, og la l_2 være linjen i P som står normalt på l_1 . Finn en parameterfremstilling for l_2 .
 - Finn avstanden fra l_2 til y -aksen (dvs. den korteste avstanden fra et punkt på l_2 til et punkt på y -aksen).
48. (Eksamen i MA 104, 14/5-1988). La planet P være gitt av ligningen

$$2x + 3y - 2z = 7$$

La l være linjen gitt ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 3t, 2t)$$

- Bestem skjæringspunktet mellom P og l og finn den minste vinkelen θ vi kan ha mellom l og en linje i P som skjærer l .
 - Bestem avstanden fra P til origo.
49. (Eksamen i MA 104, 30/5-1984) La P_s være planet som går gjennom de tre punktene $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ og $(1, 2, s)$, der s er et reelt tall.
- Finn ligningen til P_s .
 - For hvilken verdi av s går P_s også gjennom punktet $Q = (2, 3, 4)$? For denne verdien av s skal man finne den vinkelen som P_s danner med planet som har ligningen $2x - y - z = 0$. (Vinkelen mellom to plan er det samme som vinkelen mellom normalvektorene deres).
 - Finn avstanden fra punktet $Q = (2, 3, 4)$ til planet med ligning $2x - y - z = 0$.
 - Hvilket plan er det P_s nærmer seg når s går mot uendelig?

Parametriserte kurver

En *parametrisert kurve* i rommet er et uttrykk

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

der x , y og z er kontinuerlige funksjoner. Ofte lønner det seg å tenke på $\mathbf{r}(t)$ som posisjonen til en gjenstand ved tiden t .

T1.3.22 Eksempel Vi setter

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Denne kurven ser ut som en spiralfjær. Hadde vi bare hatt de to første koordinatene, ville kurven ha beskrevet en sirkulær bevegelse i planet, men den tredje koordinaten trekker kurven oppover i en spiralbevegelse. Prøv å finne ut hvordan kurven ser ut og tegn en skisse av den. ■

Parametriserte kurver i rommet oppfører seg omtrent som de parametriserte kurvene i planet som vi studerte i forrige avsnitt. Vi skal derfor gå raskt gjennom de grunnleggende definisjonene og resultatene uten så mange forklaringer og bevis.

T1.3.23 Definisjon Anta at funksjonene x , y og z har kontinuerlige deriverte. *Buelengden* av den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ fra a til b er

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

T1.3.24 Eksempel La oss bruke formelen ovenfor til å regne ut lengden til en omdreining av spiralen i eksempel T1.3.22. Vi har

$$x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t, \quad z'(t) = 1$$

Dette gir

$$\begin{aligned} L(0, 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

T1.3.25 Definisjon Anta at funksjonene x , y og z er deriverbare. Den *deriverte* til den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ved tiden t er

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

I situasjoner der $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen til en gjenstand ved tiden t , kaller vi $\mathbf{v}(t)$ for *hastigheten* til gjenstanden.

Som i det to-dimensjonale tilfellet definerer vi *farten* $v(t)$ til å være den deriverte av buelengdefunksjonen $s(t) = L(a, t)$. Vi har $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ som før.

Regnereglene for derivasjon er akkurat som i det to-dimensjonale tilfellet, men vi får med en regel til for den deriverte av vektorproduktet (punkt (iv) nedenfor):

T1.3.26 Setning Dersom $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}_2(t)$ er to deriverbare parametriserte kurver, gjelder:

(i) $(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) + \mathbf{r}'_2(t)$

(ii) $(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) - \mathbf{r}'_2(t)$

(iii) $(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}'_2(t)$

(iv) $(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}'_2(t)$

(v) Dersom $\mathbf{r}(t)$ er en deriverbar parametrisert kurve og $u(t)$ er en deriverbar funksjon, er $(u(t)\mathbf{r}(t))' = u'(t)\mathbf{r}(t) + u(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

Den *dobbeltderiverte* $\mathbf{a}(t)$ er definert ved

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

Dersom $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen ved tiden t , kaller vi $\mathbf{a}(t)$ for *akselerasjonen*. Med *baneakselerasjonen* $a(t)$ mener vi den deriverte av farten $v(t)$.

T1.3.27 Eksempel Vi regner ut hastighet, fart, akselerasjon og baneakselerasjon for kurven i eksempel T1.3.22:

$$\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

Dette gir $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Siden $v(t)$ er konstant, blir $a(t) = v'(t) = 0$. Videre er

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$



Dersom $v(t) \neq 0$, definerer vi *enhetstangentvektoren* ved $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$. Ved å regne på samme måte som i det to-dimensjonale tilfellet, får vi:

T1.3.28 Setning Dersom $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, kan akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ dekomponeres i to ortogonale vektorer

$$\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

der $a(t)\mathbf{T}(t)$ er parallell med tangenten og $v(t)\mathbf{T}'(t)$ står normalt på tangenten.

En viktig forskjell på to og tre dimensjoner er at det i tre dimensjoner finnes mange flere normalvektorer. Gitt en vektor \mathbf{c} i planet, finnes det essensielt sett bare én normalretning (mer presist: alle normalvektorer til \mathbf{c} i planet er parallelle). I rommet finnes det derimot et helt plan av vektorer som står normalt på en gitt vektor \mathbf{c} . Når vi snakker om en normalvektor i rommet, er det derfor viktig å vite hvilken normalvektor vi mener. Dersom $\mathbf{r}(t)$ er en parametrisert kurve i rommet, kaller vi $\mathbf{T}'(t)$ for *hovednormalen* til $\mathbf{r}(t)$. Tangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ og hovednormalen $\mathbf{T}'(t)$ utspenner et plan gjennom punktet $\mathbf{r}(t)$. Dette planet kalles *smygplanet* til kurven i $\mathbf{r}(t)$. Dette er planet som smyger seg tettes opp til kurven i punktet $\mathbf{r}(t)$.

Oppgaver

50. Finn hastigheten og akselerasjonen når $\mathbf{r}(t) = (t, e^{-t}, \sin t)$.
51. Finn hastigheten og akselerasjonen når $\mathbf{r}(t) = (\ln t, t^2, \cos t)$.
52. Vi har $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t)$.
- Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.
 - Finn buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$.
 - Vis at kurven ligger på en kuleflate med sentrum i origo.
 - Vis at kurven ligger i planet $y - z = 0$.
 - Hva slags kurve fremstiller \mathbf{r} ?
53. Vi har $\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$.
- Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.
 - Vis at buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$ er $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2} dt$. Bruk numerisk integrasjon til å beregne dette integralet.
 - Løs integralet i b) ved regning. Bruk substitusjonen $t = \frac{e^u - e^{-u}}{\sqrt{2}}$.
54. En partikkel beveger seg i et kraftfelt der kraften hele tiden er rettet mot eller fra origo (dette gjelder blant annet partikler i et gravitasjonsfelt eller et elektrisk felt der massen eller ladningen er konsentrert i origo). Ifølge Newtons annen lov er $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, så akselerasjonen er også rettet mot eller fra origo. Det betyr at akselerasjonen ved tiden t er gitt ved $\mathbf{a}(t) = k(t)\mathbf{r}(t)$ der $k(t)$ er en skalar størrelse.
- Vis at $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{0}$.
 - Forklar hvorfor $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{c}$ der \mathbf{c} er en konstant vektor (uavhengig av t).
 - Vis at partikkelen hele tiden beveger seg i planet gjennom punktene $\mathbf{0}$, $\mathbf{r}(0)$ og $\mathbf{v}(0)$.

55. (Eksamen i MA 105, 24/5-1991) En vei er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{9}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t}{9}\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 7$$

(alle avstander er målt i kilometer). En bil som kjører langs veien har et bensinforbruk som avhenger av hvor bratt veien er — den bruker $\frac{1}{15} + \frac{1}{2}\frac{dz}{ds}$ liter per kilometer (s er buelengden). Finn det totale bensinforbruket.

T1.4 Geometri i høyere dimensjoner

Vi begynte dette kapitlet med å studere n -tupler for et vilkårlig naturlig tall n . Deretter så vi at når $n = 2$ eller $n = 3$, kan vi tolke disse n -tuplene som geometriske objekter (vektorer og punkter) i planet og rommet. Denne geometriske tolkningen tillater oss å tenke på 2- og 3-tupler på en ny måte som gir opphav til nye problemstillinger og nye løsningsmetoder. Det er fristende å forsøke å trekke med seg denne geometriske tenkemåten til det generelle tilfellet.

Dette kan virke som en uoverkommelig oppgave — hvis 2-tupler representerer 2-dimensjonale objekter i planet, og 3-tupler representerer 3-dimensjonale objekter i rommet, så burde 4-tupler representere 4-dimensjonale objekter i et slags 4-dimensjonalt rom? Og, enda verre, 5-tupler burde representere 5-dimensjonale objekter i et 5-dimensjonalt rom, 6-tupler 6-dimensjonale objekter i et 6-dimensjonalt rom osv? Hvem av oss kan med hånden på hjertet si at de har noen særlig geometrisk intuisjon for det som skjer i 4-, 5- og 6-dimensjonale rom?

Heldigvis behøver vi ikke å ha en slik intuisjon på forhånd, men kan bygge den opp gradvis. Hensikten med denne seksjonen er å gi en liten forsmak på hvordan dette gjøres. Ideen er enkel: vi overfører geometriske begreper fra planet og rommet til det generelle tilfellet ved å bruke de algebraiske beskrivelsene av geometriske egenskaper. Her er et eksempel: At to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale, er i utgangspunktet en geometrisk egenskap. Denne egenskapen kan vi beskrive algebraisk ved $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vi bruker nå denne algebraiske beskrivelsen til å *definere* at to n -tupler \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. På denne måten får vi innført det geometriske begrepet ortogonalitet i høyere dimensjoner uten å måtte støtte oss til noen geometrisk intuisjon. Når begrepet først er innført på denne måten, kan vi undersøke i hvilken grad det svarer til våre (geometriske) forestillinger om hva ortogonalitet er. På den måten bygger vi etterhvert opp en intuisjon om hva ortogonalitet av n -tupler er, og denne intuisjonen tar fort en geometrisk form.

Som allerede antydnet, skal vi ikke gjøre så altfor mye ut av dette prosjektet i dette kapitlet, men en liten smakebit kan være nyttig. La oss begynne med litt terminologi: Mengden \mathbb{R}^n av alle n -tupler kalles det *n -dimensjonale euklidiske rommet*, og et n -tupplel kalles også en *n -dimensjonal vektor* eller et *n -dimensjonalt punkt* (som i 2 og 3 dimensjoner lønner det seg noen ganger å tenke på et n -tupplel som en vektor og andre ganger som et punkt).

Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ er en to-dimensjonal vektor, er lengden gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Tilsvarende er lengden til en tre-dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

For en n -dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ er det derfor naturlig å definere *lengden* (eller *normen* som den også kalles) ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

I seksjon T1.1 definerte vi skalarproduktet av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ til å være

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Vi har den vanlige sammenhengen mellom lengden og skalarproduktet

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \text{eller med andre ord} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Vi har allerede definert to n -tupler \mathbf{a} og \mathbf{b} til å være *ortogonale* (eller *stå normalt på hverandre*) dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ved hjelp av denne definisjonen kan vi formulere en n -dimensjonal versjon av et meget berømt resultat.

T1.4.1 Pythagoras' setning for n -tupler Dersom \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale, så er

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

Bevis: Dette er bare et enkelt regnestykke (husk regnereglene for n -tupler fra seksjon T1.1):

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2 \cdot 0 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

■

Vi husker fra to og tre dimensjoner at $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Dette resultatet er en umiddelbar konsekvens av den geometriske tolkningen av skalarproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$ (husk at $|\cos v| \leq 1$). Vi skal nå vise det tilsvarende resultatet for n -dimensjonale vektorer, men denne gangen må vi gå frem på en annen måte siden vi ikke har noen geometrisk tolkning av skalarproduktet i n dimensjoner.

T1.4.2 Schwarz' ulikhet For alle n -dimensjonale vektorer gjelder

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Bevis: Dette er et triks. Vi observerer først at hvis $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, så er påstanden i setningen opplagt riktig. Vi kan derfor anta at $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ i det som følger. Hvis vektorene våre har koordinater $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, observerer vi først at for ethvert reelt tall x er

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$$

siden et kvadrat aldri kan være negativt. Hvis vi multipliserer ut alle kvadratene og samler ledd av samme type, får vi

$$0 \leq |\mathbf{a}|^2 x^2 + 2x \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

Fullfører vi kvadratet på høyre side, ser vi at

$$0 \leq |\mathbf{a}|^2 x^2 + 2x \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = \left(|\mathbf{a}|x + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \right)^2 + |\mathbf{b}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2}$$

Velger vi nå $x = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}$, får vi ulikheten

$$0 \leq |\mathbf{b}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2}$$

Følgelig er $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$ og setningen følger. ■

Med utgangspunkt i Schwarz' ulikhet kan vi nå definere vinkelen mellom to n -dimensjonale vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} slik at vår kjære formel $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos v$ fortsatt gjelder:

T1.4.3 Definisjon Med vinkelen mellom to n -dimensjonale vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} mener vi den vinkelen $v \in [0^\circ, 180^\circ]$ slik at $\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$.

Legg merke til at siden Schwarz' ulikhet garanterer at $-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \leq 1$, så finnes det alltid en slik vinkel v som definisjonen forutsetter. Vi ser også at vi får $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos v$.

Hva er så vitsen med et slikt abstrakt og merkelig vinkelbegrep? Kan disse vinklene brukes til noe, og oppfører de seg som de vinklene vi er vant til fra planet og rommet? Dette er fornuftige spørsmål som bare erfaring kan gi svar på. Erfaringen sier at disse vinklene fungerer utmerket, og at de i det store og hele har de samme egenskapene som vinkler i 2 og 3 dimensjoner. La oss ta med et eksempel på hvordan man finner en vinkel:

T1.4.4 Eksempel Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (2, -1, 0, 1, 1)$ og $\mathbf{b} = (0, 1, 3, -2, 0)$. Vi har

$$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{(2, -1, 0, 1, 1) \cdot (0, 1, 3, -2, 0)}{|(2, -1, 0, 1, 1)| |(0, 1, 3, -2, 0)|} = \frac{-3}{\sqrt{7} \sqrt{14}} = \frac{-3\sqrt{2}}{14}$$

Bruker vi en lommeregner, finner vi at

$$\frac{-3\sqrt{2}}{14} \approx -0.3030.$$

Dette gir $v \approx \arccos(-0.3030) \approx 107.6^\circ$. ■

Et viktig resultat i planet og rommet er trekantulikheten som sier at $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Ved hjelp av Schwarz' ulikhet skal vi nå vise at denne ulikheten også gjelder i n dimensjoner.

T1.4.5 Trekantulikheten For alle n -dimensjonale vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} gjelder

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Bevis: Vi har

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

der vi har brukt at ifølge Schwarz' ulikhet er $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. ■

Geometrisk sier trekantulikheten at lengden til den ene siden i en trekant alltid er mindre enn summen av de to andre sidene. Resultatet ovenfor forteller oss at dette også gjelder i høyere dimensjoner. Faktisk spiller trekantulikheten en nøkkelrolle i de fleste forsøk på å generalisere avstandsbegrepet til nye sammenhenger.

Parametriserte linjer og kurver er også enkle å generalisere til n dimensjoner. En *parametrisert linje* i \mathbb{R}^n består av alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

der \mathbf{a} og \mathbf{b} er to faste vektorer i \mathbb{R}^n og der t gjennomløper \mathbb{R} . En *parametrisert kurve* i \mathbb{R}^n består av alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

der x_1, x_2, \dots, x_n er kontinuerlige funksjoner. *Buelengden* til en slik funksjon fra a til b er definert ved

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$$

forutsatt at funksjonene x_1, x_2, \dots, x_n er deriverbare. Den deriverte og annenderiverte til kurven $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ er som ventet

$$\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$$

og

$$\mathbf{r}''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \dots, x_n''(t))$$

Vi skriver ofte $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ og kaller disse størrelsene for hastigheten og akselerasjonen.

Hva kan en parametrisert kurve i n dimensjoner brukes til? Her er et lite eksempel: Anta at vi er interessert i n vareslag og at $x_i(t)$ er prisen til det i -te vareslaget ved tiden t . Da gir $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ en samlet fremstilling av prisutviklingen. Den deriverte funksjonen $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$ gir en samlet fremstilling av hvor mye prisene stiger og synker.

Plan kan også generaliseres til det n -dimensjonale tilfellet, men her er det flere muligheter. Gitt et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ og k vektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$, sier vi at alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t_1, t_2, \dots, t_k) = \mathbf{a} + t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \dots + t_k\mathbf{b}_k$$

der $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, danner et k -dimensjonalt plan i \mathbb{R}^n . Legg merke til at et endimensjonalt plan ikke er noe annet enn en parametrisert linje. Dersom $k = n - 1$, kalles planet ovenfor et *hyperplan*. Hyperplan kan også fremstilles på en annen måte: Gitt et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ og en vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$. Da vil mengden av alle vektorer \mathbf{x} slik at $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ står normalt på \mathbf{n} , være et hyperplan. Vi kaller dette *hyperplanet gjennom \mathbf{a} normalt på \mathbf{n}* .

Vi ser at begrepet *plan* er mer komplisert (eller i hvert fall mer mangesidig) i n dimensjoner enn i tre. Dette er et ganske vanlig fenomen når vi generaliserer tredimensjonale fenomener til høyere dimensjoner — begreper som faller sammen i tre dimensjoner, kan ha forskjellig innhold i høyere dimensjoner.

Som en siste smakebit på hvordan geometriske sammenhenger kan generaliseres til n dimensjoner, skal vi ta en titt på hvordan vi kan generalisere begrepene determinant, areal og orientering. Gitt fire vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ i \mathbb{R}^4 , definerer vi 4×4 -determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ ved

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \\ &+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Sammenligner du denne definisjonen med definisjonen av 3×3 -determinanter, vil du oppdage det generelle mønsteret som gjør at vi kan gå videre og definere 5×5 -determinanter, 6×6 -determinanter, osv.

Vi har tidligere sett at *tallverdien* til 2×2 -determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gir oss arealet utspent av vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} , mens *fortegnet* til determinanten forteller oss om orienteringen til paret (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . På tilsvarende vis vet vi at tallverdien til en 3×3 -determinant $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gir oss volumet utspent av vektorene \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} , mens *fortegnet* forteller oss om orienteringen til trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Vi kan bruke disse observasjonene til å definere volum og orientering i høyere dimensjoner. Gitt n vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ definerer vi *volumet utspent av disse vektorene* til å være tallverdien til $n \times n$ -determinanten $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$. Vi sier at n -tupplet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ (legg merke til at dette er et n -tuplet av vektorer) er *positivt* (henholdsvis *negativt*) orientert dersom determinanten er positiv (henholdsvis negativ).

Slike definisjoner kan virke spekulative, og de må alltid testes før de tas i bruk. Vi må undersøke om de oppfyller våre intuitive forestillinger om hva volum og orientering skal være, og vi må sjekke om de generaliserer de formlene og resultatene vi har i to og tre dimensjoner på en naturlig og fruktbar måte. Det viser seg at definisjonene ovenfor består disse testene og at de gir en «riktig» generalisering av begrepene volum og orientering.

Vi skal runde av her. Denne siste seksjon kan virke litt løs og overfladisk, men hensikten har først og fremst vært å formidle en måte å tenke på som det kan være greit

å være klar over før man går videre med studiet av lineær algebra (som er navnet på den mer avanserte teorien for n -dimensjonale vektorer).

Oppgaver

1. Regn ut vinkelen mellom $(-1, 2, 6, 2, 4)$ og $(1, 0, 3, 1, 1)$.
2. Finn hastigheten og akselerasjonen til $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, \cos t, \ln t)$.

3. Regn ut
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Vis at for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, gjelder:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 &= |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 \end{aligned}$$

5. Et hyperplan går gjennom punktet $(-1, 0, 2, 3)$ og står normalt på $(-1, 2, 1, 3)$. Finn en ligning for de punktene (x, y, z, w) som ligger i hyperplanet.
6. Anta at \mathbf{a} og \mathbf{b} er to ikke-null vektorer i \mathbb{R}^n . Vis at $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ hvis og bare hvis \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle (dvs. $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ for en skalar k). Hint: Analyser beviset for Schwartz' ulikhet.

Fasit

Fasit til seksjon T1.1

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2, 3, 9, -5, -2)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (4, -7, -1, -5, 4)$, $s\mathbf{a} = (3, -6, 12, -15, 3)$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4$
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (7, 2, 5, -8, -5, 3)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (7, -2, 3, 4, -5, 5)$, $s\mathbf{a} = (-28, 0, -16, 8, 20, -16)$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$

Fasit til seksjon T1.2

2. Punktene ligger på en rett linje. 3. Punktene danner hjørnene i et kvadrat. 4. $\sqrt{290}$
5. Svømmeretningen bør danne 30° med den rette linjen tvers over elven. Tid $\frac{50}{\sqrt{3}}$ sekunder.
6. $\theta \approx 109.65^\circ$ 7. $10\sqrt{2}$ 8. $\theta \approx 71.57^\circ$, $\mathbf{p} = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 9. $\sqrt{5}$
10. 30° og 45° , $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 11. $(4, 3) = (2, 4) + (2, -1)$ 12. $-\frac{43}{2}$ (bruk at $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$). 13. 90° 14. Umulig pga. trekantulikheten. 15. Umulig pga. trekantulikheten; sidekanten \mathbf{a} er lenger enn summen av de to andre $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, \mathbf{b} . 19. Bruk Pythagoras' setning på den store rettvinklede trekanten. 21. $\mathbf{r}(t) = (-3 + t, -2 - 2t)$. Punktet $(-7, 6)$ ligger på linjen.
22. $\mathbf{r}(t) = (2 + t, -1 + 9t)$ 23. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (5 + 2t, -2 + t)$ (det er mange muligheter).
24. For eksempel $\mathbf{r}(t) = (3t, 2 - 2t)$ (det er mange muligheter). 25. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 26. $(\frac{18}{5}, \frac{11}{5})$
27. $2\sqrt{5}$ 28. $(\frac{153}{25}, -\frac{46}{25})$ 29. c) $(3, 4)$ 31. a) Skjæringspunkt $(15, 24)$. b) Skipene kolliderer ikke. 32. c) ca. 49° . 33. a) 14 b) 38 c) 0 34. 11 35. $\frac{23}{2}$ 36. 27 37. a) positivt
b) negativt 38. Hint: Tolk determinanten som et areal. 40. Hint: Utrykk arealet som en determinant.
41. b) Ligningssystemet har enten ingen eller uendelig mange løsninger avhengig av konstantene c_1 og c_2 . Linjene $a_1x + b_1y = c_1$ og $a_2x + b_2y = c_2$ er nemlig enten parallelle (ingen løsninger) eller sammenfallende (uendelig mange løsninger). 42. $\mathbf{v}(t) = (3t^2, 2t)$, $v(t) = t\sqrt{9t^2 + 4}$, $\mathbf{a}(t) = (6t, 2)$, $a(t) = \frac{18t^2 + 4}{\sqrt{9t^2 + 4}}$
43. $\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \sin t + t \cos t)$, $v(t) = \sqrt{2 \sin^2 t + t \sin 2t + t^2 \cos^2 t}$, $\mathbf{a}(t) = (-\cos t, 2 \cos t - t \sin t)$,
 $a(t) = \frac{(3-t^2) \sin 2t + 2t(\cos 2t + \cos^2 t)}{2\sqrt{\sin^2 t + (\sin t + t \cos t)^2}}$ 44. b) $\mathbf{v}(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, $v(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2}$, $\mathbf{a}(t) = (-a \cos t, -b \sin t) = -\mathbf{r}(t)$, $a(t) = \frac{(a^2 - b^2) \sin 2t}{2\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$ c) $s \approx 25.53$
45. $\frac{904^{3/2} - 8}{27} \approx 1006.4$ 46. a) $\mathbf{v}(t) = (1, -\tan t)$, $v(t) = \frac{1}{\cos t}$ b) $\frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2} + 1)$

47. a) $\mathbf{v}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)$, $v(t) = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}$, $\mathbf{a}(t) = (r \sin t, r \cos t)$, $a(t) = \frac{r\sqrt{2} \sin t}{2\sqrt{1 - \cos t}}$ d) $8r$
50. a) $\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha - gt)$, $\mathbf{a}(t) = (0, -g)$ b) $\frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$ c) $\frac{v_0^2}{g}$ 51. $t = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{ku_2}{mg}\right)$,
 $y_{\max} = \frac{mu_2}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{ku_2}{mg}\right)$ 52. b) $\mathbf{r}_2(t) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}, \sin t + \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}\right)$ 53. Med origo
midt i sirkelen og med startpunkt $(b, 0)$, får vi: $x(t) = (a + b) \cos t - a \cos \left(\frac{a+b}{a}t\right)$, $y(t) = (a + b) \sin t - a \sin \left(\frac{a+b}{a}t\right)$ 54. a) $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$. Finn uttrykket for $f'(t)$ ved å derivere $f(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$ etter produktregelen. b) Geometrisk beskrivelse: Vektoren fra \mathbf{b} til $\mathbf{r}(t_0)$ står normalt på tangentvektoren $\mathbf{r}'(t_0)$. c) Dersom $y > \frac{1}{2}$, så er $\left(\pm\sqrt{y - \frac{1}{2}}, y - \frac{1}{2}\right)$ de nærmeste punktene. Dersom $y \leq \frac{1}{2}$, så er $\mathbf{0} = (0, 0)$ det nærmeste punktet.

Fasit til seksjon T1.3

1. $\left(\frac{19}{6}, -\frac{19}{6}, \frac{19}{3}\right)$ 2. $\frac{1}{\sqrt{6}}$ 3. ca. 67.8° 4. $(2, 2, 1) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$ 5. $\mathbf{r}(t) = (-1 + 2t, -1 + 3t, 2 + t)$ 6. $\mathbf{r}(t) = (7 - 8t, -3 + 2t, 2 + 3t)$ 7. Utallige muligheter, f.eks. $(1, 0, 3)$ og $(0, 1, 2)$. Sjekk dine svar ved å ta skalarproduktet med $(3, 2, -1)$. 8. $(0, 2, -1)$ 10. a) Ja, kursene til flyene krysser hverandre i punktet $(4000, 4000, 4000)$. b) Nei, flyene kolliderer ikke. De kommer til møtestedet etter henholdsvis 40 sekunder og $\frac{100}{3}$ sekunder. 11. a) $(19, 3, 5)$ b) $(-1, -6, -14)$
12. $6\sqrt{5}$ 13. $\sqrt{3}$ 14. $(9, -5, 6)$ 15. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ 16. 0 17. $\frac{7}{2}$
18. Hint: Bruk determinanten. 20. a) 84 b) 20 c) 0 21. 7 22. $\frac{5}{3}$ 23. Positivt 25. Hint: Tolk determinanten som et volum. 28. $\mathbf{r}(s, t) = (2 + s - 2t, 1 + 2s + 3t, 2 + 3s + t)$. Nei, punktet ligger ikke i planet. 29. $\mathbf{r}(s, t) = (3 - s - 5t, 3s, -2 + 2s + t)$. Punktet ligger i planet.
30. $\mathbf{r}(s, t) = (3 + s - 5t, -1 + 2s, 2 - s - t)$ 31. For eksempel $\mathbf{r}(s, t) = (2s - 2t, 3 - 6s - 2t, 1)$, men det finnes også mange andre. Punktet $(1, 2, 1)$ ligger i planet. 32. $\mathbf{r}(s, t) = (-1 + s, 2 + 2t, 2 - s - t)$
33. $\mathbf{r}(s, t) = (3 + s + 3t, -t, 3 - s)$ 34. $\mathbf{r}(s, t) = (3 + t, 1 + s + 4t, -1 + s)$ 35. Punktet $(1, -1, 1)$ ligger i planet, men punktet $(2, -1, 4)$ gjør det ikke. 36. $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$. Ett slikt punkt er $(0, 0, 4)$
37. $3x + y + 2z = -3$ 38. $7x - 16y - 5z = -40$ 39. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ 40. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 41. $\frac{8}{7}$ 42. $\frac{\sqrt{30}}{30}$
43. $\mathbf{r}(t) = (2, t, t)$ 44. $2x + 2y + z = 9$ 45. $2x + 2y - 3z = -11$ 46. $a' = \frac{1}{3}(a + 2 - 2b - 2c)$, $b' = \frac{1}{3}(b + 2 - 2a - 2c)$, $c' = \frac{1}{3}(c + 2 - 2a - 2b)$ 47. a) $x - y + z = 2$ b) $\mathbf{r}(t) = (2 - t, 0, t)$ c) $\sqrt{2}$
48. a) $\frac{7}{9}(2, 3, 2)$, $\theta = \arcsin \frac{9}{17}$ b) $\frac{7}{17}\sqrt{17}$ 49. a) $(s - 2)x + (1 - s)y + z = 0$ b) $s = 3$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $x - y = 0$ 50. $\mathbf{v}(t) = (1, -e^{-t}, \cos t)$, $\mathbf{a}(t) = (0, e^{-t}, -\sin t)$
51. $\mathbf{v}(t) = \left(\frac{1}{t}, 2t, -\sin t\right)$, $\mathbf{a}(t) = \left(-\frac{1}{t^2}, 2, -\cos t\right)$ 52. a) $\mathbf{v}(t) = (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t)$, $v(t) = 2$, $\mathbf{a}(t) = -\mathbf{r}(t)$ b) 4π c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e) En sirkel med radius 2 om origo i planet $y - z = 0$.
53. a) $\mathbf{v}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$, $v(t) = \sqrt{2 + t^2}$ b) 22.43 c) $\pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi^2 + 1})$ 55. $\frac{89}{45}$ liter.

Fasit til seksjon T1.4

1. ca. 31.8° . 2. $\mathbf{v}(t) = \left(1, 2t, -\sin t, \frac{1}{t}\right)$, $\mathbf{a}(t) = \left(0, 2, -\cos t, -\frac{1}{t^2}\right)$ 3. -8 5. $-x + 2y + z + 3w = 12$