

Maple for Kalkulus – Kom i gang

Maple er et dataprogram som gjør matematiske beregninger og tegner matematiske grafer og figurer.

Hvorfor Maple?

Det finnes mange ulike dataprogrammer som gjør matematiske beregninger for deg eller tegner grafer og figurer for deg. Du kjenner kanskje Geogebra? Maple er et program som kan gjøre mer kompliserte beregninger og tegne mer kompliserte grafer og figurer. Dette kan være til stor nytte for den som skal lære matematikk og den som skal bruke matematikk.

Hvordan er det hele lagt opp?

Til hvert delkapittel med oppgaver som skal løses ved bruk av et digitalt hjelpemiddel, er det laget noen mønsterbesvarelser med Maple. Ved å studere disse, og gjerne kopiere fremgangsmåten, kan du løse resten av oppgavene i delkapitlet. For å lette oversikten over de kommandoordene dere bruker etterhvert er de også listet opp i [denne filen](#).

Hva legger vi vekt på?

Maple er et avansert program. Det inneholder mange smarte finesser, men å utnytte disse er noe som kommer med erfaring. Vi skal legge vekt på å komme fort igang. Og det viktige for oss på dette stadiet er å få Maple til å gjennomføre de operasjonene vi ønsker ved hjelp av noen få, enkle kommandoer som vil være nok til å ha stor nytte av programmet. (Elegante og smarte varianter kan eventuelt plukkes opp via Maples egne hjelpeknapp eller å søke på nettet.)

Hvordan er opplegget?

Å lære Maple skjer ved at det demonstreres hvordan ulike oppgaver kan løses ved bruk av Maple. Det betyr at løsningsforslagene i Maple til de innledende oppgavene må studeres før dere selv løser flere oppgaver i samme sjanger. Skal du for eksempel regne digital-oppgavene i delkapittel 1.2, velger du kapittel 1 og åpner maplearket **1-2**

Losn.mw

Men før du gjør det, bør du starte med

- Filer i mappen «mapleark til øving» og deretter **2. Maple som enkel kalkulator.mw**
 - og når du har klart det som står der, kan du åpne maplearket **3. Maple som avansert kalkulator.mw**

OBS! Det er ikke nødvendig å pugge maplekommandoene. De er raske å slå opp når man trenger dem. Men det er en idé å gjøre seg kjent med hva slags type oppgaver Maple kan løse for oss.

Oppgave 5.1.18.

Maplekommandoen for integrasjon er den samme som antiderivasjon, nemlig *int* . Det nye er at vi må føye til integrasjonsgrensene. For eksempel er integralet i oppgave 5a) gitt ved

$$\text{int}\left(\sin(x), x = 0 \dots \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

(1

Enkelt, ikke sant? Først står integranden, deretter integrasjonsintervallet der de to grensene er adskilt ved to punktum.

Oppgave 5.1.18.

Maplekommandoen for integrasjon er den samme som antiderivasjon, nemlig *int* . Det nye er at vi må føye til integrasjonsgrensene. For eksempel er integralet i oppgave 5a) gitt ved

$$\left[> \text{int} \left(\sin(x), x = 0 .. \frac{\text{Pi}}{4} \right) \right]$$

Enkelt, ikke sant? Først står integranden, deretter integrasjonsintervallet der de to grensene er adskilt ved to punktum.

Oppgave 5.2.17.

Vi viser teknikken for oppgave 15 c).

For å beregne tilnærmelsen vi fant der, vil vi benytte kommandoen *evalf*. (Ellers blir det så vanskelig å sammenligne.) For å få denne kommandoen til å regne med 10 sikre sifre, kan vi skrive `, 10` på slutten av kommandoen, men det er egentlig ikke nødvendig, for skriver vi ingenting, velger Maple å bruke 10 sikre sifre.

```
>  $\frac{20}{\text{Pi}} \cdot \text{int}\left(\cos(x), x = 0 .. \frac{\text{Pi}}{2}\right)$ 
```

$\frac{20}{\pi}$

(1)

```
> evalf(%)
```

6.366197722

(2)

For å beregne summen, kan man bruke en **for**-løkke:

```
> S := 0
```

$S := 0$

(3)

```
> for n from 1 by 1 to 10 do S := S + evalf( $\cos\left(\frac{n \cdot \text{Pi}}{20}\right)$ , 10) end do
```

$S := 0.9876883406$

$S := 1.938744857$

$S := 2.829751381$

$S := 3.638768375$

$S := 4.345875156$

$S := 4.933660408$

$S := 5.387650908$

$S := 5.696667902$

$S := 5.853102367$

$S := 5.853102367$

(4)

Summen er altså $S = 5.853102367$ med den etterspurte nøyaktigheten.
 Overslaget i oppgave 15 c) var altså ikke så bra, for

$$\begin{array}{l} \text{[} > 6.366197722 - 5.853102367 \\ & \qquad \qquad \qquad 0.513095355 \end{array} \quad (5)$$

$\text{[} > \text{unassign('n')}$

Maple har også en summe-kommando (som fungerer slik temmelig likt kommandoen for beregning av bestemte integraler):

$$\begin{array}{l} \text{[} > \text{sum}\left(\cos\left(\frac{\text{Pi} \cdot n}{20}\right), n = 1 \dots 10\right) \\ \text{[} \cos\left(\frac{1}{20} \pi\right) + \cos\left(\frac{1}{10} \pi\right) + \cos\left(\frac{3}{20} \pi\right) + \cos\left(\frac{1}{5} \pi\right) + \frac{1}{2} \sqrt{2} + \cos\left(\frac{3}{10} \pi\right) + \cos\left(\frac{7}{20} \pi\right) + \cos\left(\frac{2}{5} \pi\right) \\ \text{[} \qquad \qquad \qquad + \cos\left(\frac{9}{20} \pi\right) \end{array} \quad (6)$$

Egentlig gjennomfører Maple selve summeringen. Men her har vi bedt om den eksakte summen, og da er dette det beste svaret man kan få.
 Ber vi heller om en tilnærmet verdi, får vi:

$$\begin{array}{l} \text{[} > \text{evalf}(\%) \\ & \qquad \qquad \qquad 5.853102367 \end{array} \quad (7)$$

Oppgave 5.2.18.

Jeg viser teknikken for oppgave 3:

$$\begin{array}{l} \text{[} > \text{int}\left(\cos(x) - \sin(x), x = -\frac{3 \cdot \text{Pi}}{4} \dots \frac{\text{Pi}}{4}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad 2\sqrt{2} \end{array} \quad (8)$$



Oppgave 5.2.17.

Vi viser teknikken for oppgave 15 c).

For å beregne tilnærmelsen vi fant der, vil vi benytte kommandoen *evalf*. (Ellers blir det så vanskelig å sammenligne.) For å få denne kommandoen til å regne med 10 sikre sifre, kan vi skrive `, 10` på slutten av kommandoen, men det er egentlig ikke nødvendig, for skriver vi ingenting, velger Maple å bruke 10 sikre sifre.

```
[> 20
Pi · int( cos(x), x = 0 .. Pi
2 )
=> evalf(%)
```

For å beregne summen, kan man bruke en **for**-løkke:

```
[> S := 0
=>
[> for n from 1 by 1 to 10 do S := S + evalf( cos( n·Pi
20 ), 10 ) end do
```

Summen er altså $S = 5.853102367$ med den etterspurte nøyaktigheten.

Overslaget i oppgave 15 c) var altså ikke så bra, for

```
[> 6.366197722 - 5.853102367
=>
[> unassign('n')
```

Maple har også en summe-kommando (som fungerer slik temmelig likt kommandoen for beregning av bestemte integraler):

```
[> sum( cos( Pi·n
20 ), n = 1 ..10 )
```

Egentlig gjennomfører Maple selve summeringen. Men her har vi bedt om den eksakte summen, og da er dette det beste svaret man kan få. Ber vi heller om en tilnærmet verdi, får vi:

```
[> evalf(%)
```

Oppgave 5.2.18.

Jeg viser teknikken for oppgave 3:

$$\int \left(\cos(x) - \sin(x), x = -\frac{3 \cdot \pi}{4} \dots \frac{\pi}{4} \right)$$

Oppgave 5.4.13

a)

(i)

Dette integralet er egentlig uegentlig. Men siden vi vet at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, går det bra å bruke trapesmetoden, når vi bare velger god nok presisjon under beregningen av $f(x)$ for x nær 0.

Vi skal dele intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i 8 deler. Derved er bredden av hvert delintervall $\frac{\pi}{16}$.

Her kan vi bruke en **for**-løkke, og addere leddene etterhvert.

Se nøye på konstruksjonen nedenfor, slik at du er sikker på at det blir rett.

Vi starter med å sette J lik funksjonsverdien i $x = 0$. Deretter summerer vi $2 \cdot f(x_n)$ i alleelepunktene, opp til, men naturligvis ikke med

$$x_8 = b = \frac{\pi}{2}.$$

Deretter adderer vi funksjonsverdien i $b = \frac{\pi}{2}$, for så til slutt å gange med $\Delta x = \frac{\pi}{16}$ og dividere med 2.

$$\textcolor{red}{\triangleright} \ x := 0 : d := evalf\left(\frac{\pi}{16}, 20\right) : J := 1$$
$$J \coloneqq 1$$

```

> for  $n$  from 1 by 1 to 7 do  $x := x + d : J := evalf\left(J + \frac{2 \cdot \sin(x)}{x}, 20\right)$  end do

```

$$x := 0.1963495408$$
$$J := 2.9871737022948481367$$
$$x := 0.3926990816$$
$$J := 4.9361644191291629626$$
$$x := 0.5890486224$$
$$J := 6.8224950606740875659$$
$$x := 0.7853981632$$

(1

$J := 8.6231276930854450711$

$x := 0.9817477040$

$J := 10.316983678238683042$

$x := 1.178097245$

$J := 11.885410285457314043$

$x := 1.374446786$

$J := 13.312581261306001622$

(2)

$$> J := \text{evalf}\left(\frac{\left(J + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{16}\right)}{2}, 20\right)$$

$J := 1.3694596090886274467$

(3)

som altså er verdien vi finner for integralet.

Som kontroll kan vi be Maple beregne integralet, men da må vi først bruke *unassign* på *x*:

$> \text{unassign}('x')$

$> \text{int}\left(\frac{\sin(x)}{x}, x = 0 \dots \frac{\pi}{2}\right)$

$\text{Si}\left(\frac{1}{2} \pi\right)$

(4)

$\text{Si}(x)$, som altså er definert ved $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ er en av mange spesielle funksjoner som Maple har i bakhånd. Men det behøver vi egentlig ikke vite for å finne verdien av integralet. Det er nok at Maple vet hva det betyr. Vi trenger bare gjøre slik:

$> \text{evalf}(\%, 20)$

1.3707621681544884800

(5)

Man må vel kunne si at svaret vi fikk ved trapesmetoden ble ganske bra, til tross for at vi bare hadde 8 delintervall.

(ii)

For å anslå nøyaktigheten ved hjelp av teorem 5.4.6, trenger vi å kjenne $f''(x)$:

$$> \text{diff}\left(\frac{\sin(x)}{x}, x, x\right)$$

$$-\frac{\sin(x)}{x} - \frac{2 \cos(x)}{x^2} + \frac{2 \sin(x)}{x^3} \quad (6)$$

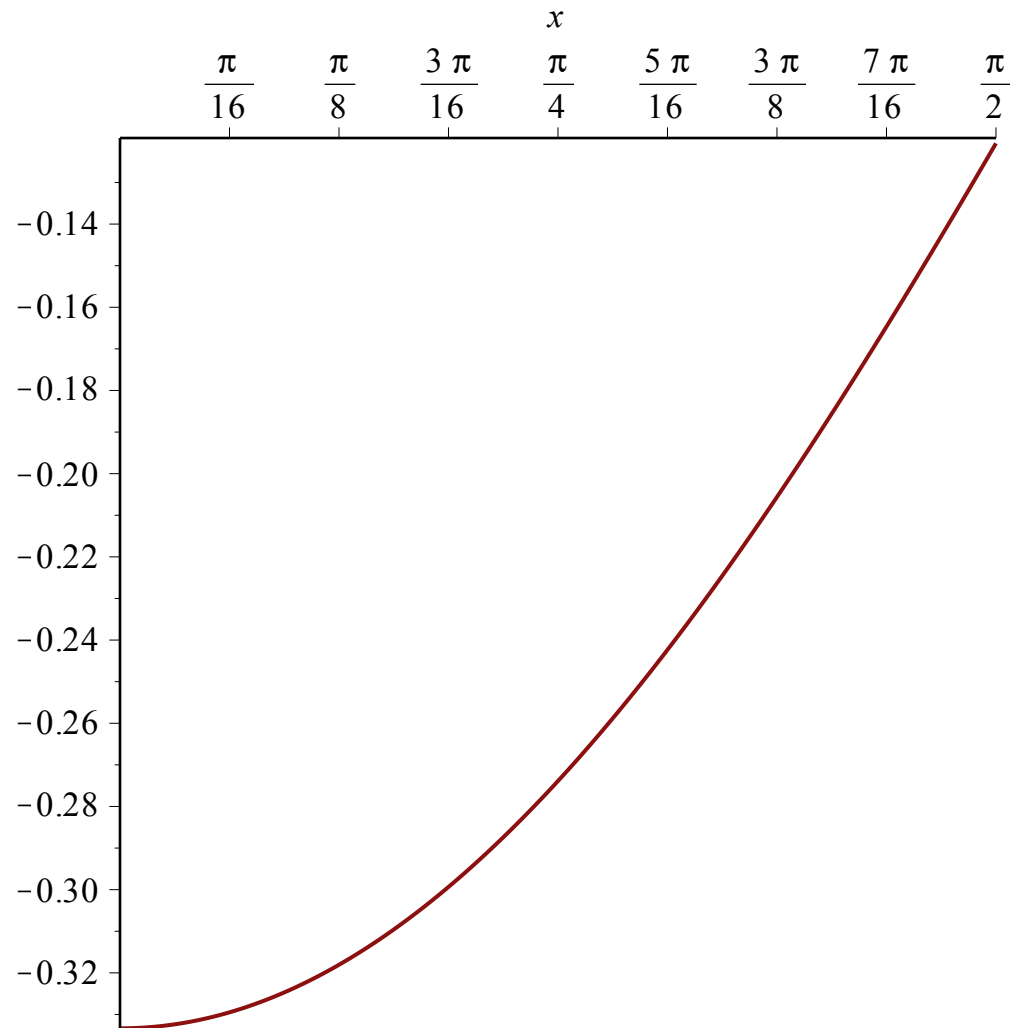
$$> \text{simplify}(\%)$$

$$\frac{-\sin(x) x^2 - 2 \cos(x) x + 2 \sin(x)}{x^3} \quad (7)$$

Det er ikke så lett å anslå maksimalverdien for absoluttverdien av dette uttrykket for x i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Kanskje grafen til $f''(x)$ kan være til hjelp:

$$> \text{plot}\left(-\frac{\sin(x) x^2 + 2 \cos(x) x - 2 \sin(x)}{x^3}, x = 0 \dots \frac{\text{Pi}}{2}\right)$$



Aha! $|f''(x)| \leq 0.34$, så $\left| T_8 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq 0.34 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \cdot 8^2}$ som er lik

$$> \text{evalf}\left(\frac{0.34 \cdot \left(\frac{\text{Pi}}{2}\right)^3}{12 \cdot (8^2)}\right)$$

0.001715842135

(8)

Derved ligger verdien av integralet i intervallet fra

$$> 1.3694596090886274467 - 0.001715842135$$

1.367743767

(9)

til

$$> 1.3694596090886274467 + 0.001715842135$$

1.371175451

(10)

Nå er det naturligvis ikke nødvendig å ta med så mange desimaler i disse intervallgrensene, men vi skriver svaret som $[1.367, 1.372]$ for å være på den sikre siden.

Oppgave 5.4.14

a)

(i)

Her skal vi beregne det samme integralet, men nå med Simpsons metode.

Ideen bak kommandoene vi gir Maple, er på sett og vis de samme, men nå tar vi med to ledd i summen i hvert trinn i **for**-løkken, ett med $4 \cdot f(x)$ og ett med $2 \cdot f(x)$.

Deretter må vi legge til de to siste leddene i summen som er ett med $4 \cdot f(x)$ og ett med bare $f(x)$.

(Dette kan naturligvis også organiseres på andre måter, men vi tar det slik nå.)

> $x := 0 : d := \text{evalf}\left(\frac{\pi}{16}, 20\right) : J := 1$

$J := 1$

(11)

> **for** n **from** 1 **to** 3 **do** $x := x + d : J := \text{evalf}\left(J + 4 \cdot \frac{\sin(x)}{x}, 20\right) : x := x + d : J := \text{evalf}\left(J + \frac{2 \cdot \sin(x)}{x}, 20\right)$ **end do**

$x := 0.1963495408$

$J := 4.9743474045896962733$

$x := 0.3926990816$

$J := 6.9233381214240110992$

$x := 0.5890486224$

$J := 10.695999404513860306$

$x := 0.7853981632$

$J := 12.496632036925217811$

$x := 0.9817477040$

$J := 15.884344007231693752$

$x := 1.178097245$

$J := 17.452770614450324753$

(12)

> $J := \text{evalf}\left(J + \frac{4 \cdot \sin(x + d)}{x + d}, 20\right)$

$J := 20.307112566375006012$

(13)

> $J := \text{evalf}\left(J + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}, 20\right)$

$J := 20.943732338742587355$

(14)

> $J := \text{evalf}\left(\frac{J \cdot d}{3}, 20\right)$

$J := 1.3707640761280144045$

(15)

Dette svaret ble adskillig bedre enn det vi fikk ved trapesmetoden.

> `unassign('x')`

(ii)

Den fjerdedederiverte til integranden er

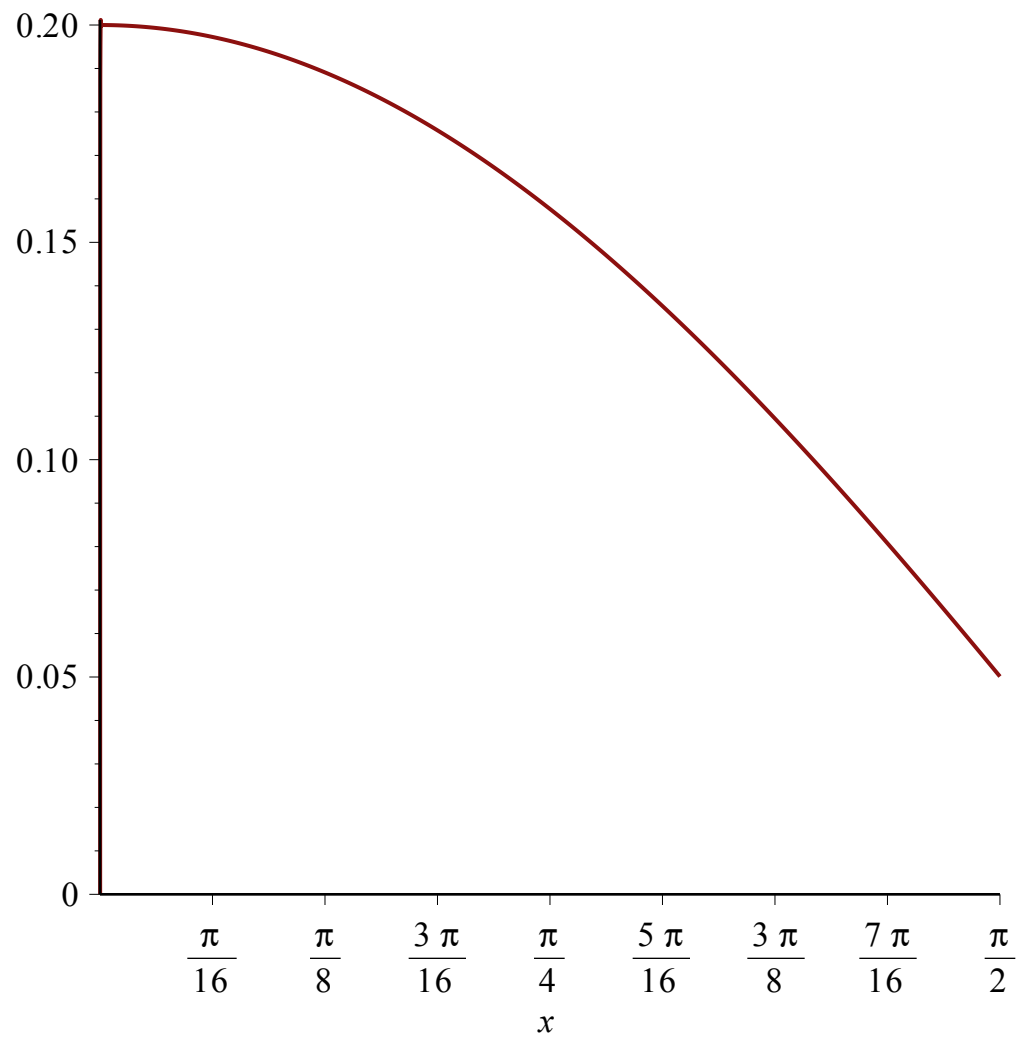
> `diff` $\left(\frac{\sin(x)}{x}, x\$4\right)$

$$\frac{\sin(x)}{x} + \frac{4 \cos(x)}{x^2} - \frac{12 \sin(x)}{x^3} - \frac{24 \cos(x)}{x^4} + \frac{24 \sin(x)}{x^5}$$

(16

For å se hvor stor den kan bli, plotter vi den på intervallet

> `plot` $\left(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{4 \cos(x)}{x^2} - \frac{12 \sin(x)}{x^3} - \frac{24 \cos(x)}{x^4} + \frac{24 \sin(x)}{x^5}, x = 0 \dots \frac{\text{Pi}}{2}\right)$



Altså setter vi $K4 = 0.2$, slik at feilskranken i teorem 5.4.6 blir

$$> \text{evalf}\left(\frac{0.2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (8^4)}\right)$$

0.000002594161013

(17)

> 1.3707640761280144045 - 0.000002594161013

1.370761482

(18)

> 1.3707640761280144045 + 0.000002594161013

1.370766670

(19)

Intervallet er derfor [1.37076148, 1.37076667]

Oppgave 5.4.15

a)

(i)

> *taylor*($\sin(x^2)$, $x=0$, 12)

$$x^2 - \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{120} x^{10} + O(x^{14})$$

(20)

> *int*($x^2 - \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{120} x^{10}$, $x=0$..*sqrt*($\frac{\pi}{2}$))

$$\frac{1}{12} \sqrt{2} \pi^{3/2} - \frac{1}{672} \sqrt{2} \pi^{7/2} + \frac{1}{84480} \sqrt{2} \pi^{11/2}$$

(21)

> *evalf*(%, 20)

0.54965717597437904286

(22)

(ii)

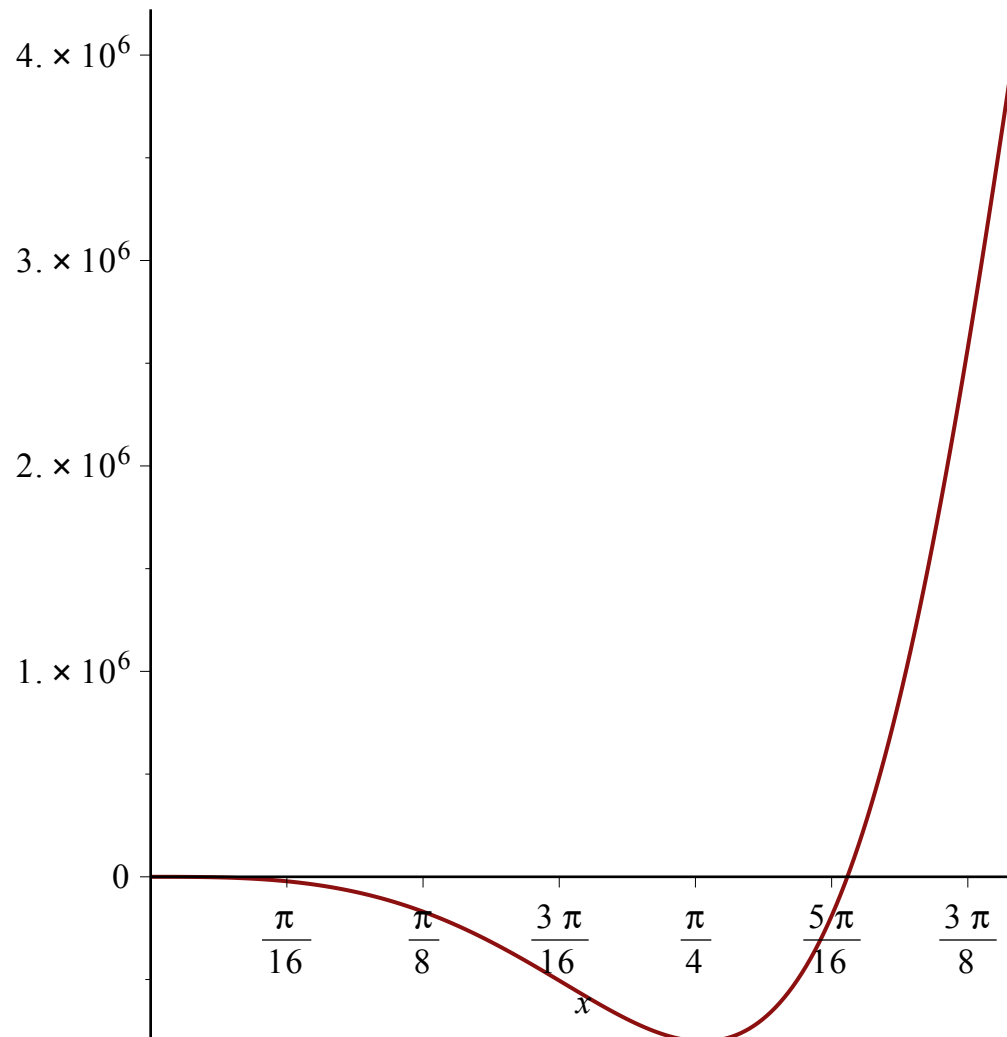
Restleddet har formen $R(x) = \frac{f^{(11)}(c)}{11!} \cdot x^{11}$ for en c mellom 0 og x .

Vi trenger derfor å beregne $f^{(11)}(x)$ og se hvor stor den kan bli i tallverdi for $0 \leq x \leq \frac{\text{Pi}}{2}$.

```
> diff(sin(x^2), x$11 )  
-2048 cos(x^2) x^11 - 56320 sin(x^2) x^9 + 506880 cos(x^2) x^7 + 1774080 sin(x^2) x^5 - 2217600 cos(x^2) x^3 - 665280 sin(x^2) x
```

(23

```
> plot(diff(sin(x^2), x$11 ), x=0 ..sqrt(Pi/2))
```



Det er klart at denne deriverte er størst i tallverdi for $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, altså

> $\text{subs}\left(x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, -2048 \cos(x^2) x^{11} - 56320 \sin(x^2) x^9 + 506880 \cos(x^2) x^7 + 1774080 \sin(x^2) x^5 - 2217600 \cos(x^2) x^3\right)$

$$\begin{aligned}
 & - 665280 \sin(x^2) x \Big) \\
 & - 32 \cos\left(\frac{1}{2} \pi\right) \sqrt{2} \pi^{11/2} - 1760 \sin\left(\frac{1}{2} \pi\right) \sqrt{2} \pi^{9/2} + 31680 \cos\left(\frac{1}{2} \pi\right) \sqrt{2} \pi^{7/2} + 221760 \sin\left(\frac{1}{2} \pi\right) \sqrt{2} \pi^{5/2} \\
 & - 554400 \cos\left(\frac{1}{2} \pi\right) \sqrt{2} \pi^{3/2} - 332640 \sin\left(\frac{1}{2} \pi\right) \sqrt{2} \sqrt{\pi}
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> evalf(%, 20)} \\
 & 4.2226746938695298662 \cdot 10^6
 \end{aligned} \tag{25}$$

Restleddet er derfor begrenset av $C x^{11}$ der C er gitt ved

$$\begin{aligned}
 & \text{> } \frac{4.2226746938695298662 \cdot 10^6}{11!} \\
 & 0.1057869041
 \end{aligned} \tag{26}$$

slik at feilen i integralet er begrenset av

$$\begin{aligned}
 & \text{> } \int \left(0.1057869041 \cdot x^{11}, x = 0 \dots \sqrt{\frac{\text{Pi}}{2}} \right) \\
 & 0.1324249823
 \end{aligned} \tag{27}$$

Integralets verdi er derfor inneholdt i intervallet med grenser

$$\begin{aligned}
 & \text{> } 0.54965717597437904286 - 0.1324249823 \\
 & 0.4172321937
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } 0.54965717597437904286 + 0.1324249823 \\
 & 0.6820821583
 \end{aligned} \tag{29}$$

| Altså i intervallet $[0.4172, 0.6821]$.

>

>

Oppgave 5.4.13

a)

(i)

Dette integralet er egentlig uegentlig. Men siden vi vet at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, går det bra å bruke trapesmetoden, når vi bare velger god nok presisjon under beregningen av $f(x)$ for x nær 0.

Vi skal dele intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i 8 deler. Derved er bredden av hvert delintervall $\frac{\pi}{16}$.

Her kan vi bruke en **for**-løkke, og addere leddene etterhvert.

Se nøye på konstruksjonen nedenfor, slik at du er sikker på at det blir rett.

Vi starter med å sette J lik funksjonsverdien i $x = 0$. Deretter summerer vi $2 \cdot f(x_n)$ i alle delepunktene, opp til, men naturligvis ikke med

$$x_8 = b = \frac{\pi}{2}.$$

Deretter adderer vi funksjonsverdien i $b = \frac{\pi}{2}$, for så til slutt å gange med $\Delta x = \frac{\pi}{16}$ og dividere med 2.

```
[> x := 0 : d := evalf( ( pi / 16 , 20 ) ) : J := 1
=
> for n from 1 by 1 to 7 do x := x + d : J := evalf( J + ( 2 * sin( x ) / x , 20 ) ) end do
=
> J := evalf( ( ( ( J + ( sin( ( pi / 2 ) ) / ( pi / 2 ) ) ) * ( pi / 16 ) ) / 2 , 20 ) )
=
```

som altså er verdien vi finner for integralet.

Som kontroll kan vi be Maple beregne integralet, men da må vi først bruke `unassign` på x :

```
> unassign('x')
```

```
> int( (sin(x)/x), x = 0 .. Pi/2 )
```

$\text{Si}(x)$, som altså er definert ved $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ er en av mange spesielle funksjoner som Maple har i bakhånd. Men det behøver vi egentlig ikke vite for å finne verdien av integralet. Det er nok at Maple vet hva det betyr. Vi trenger bare gjøre slik:

```
> evalf(%, 20)
```

Man må vel kunne si at svaret vi fikk ved trapesmetoden ble ganske bra, til tross for at vi bare hadde 8 delintervall.

(ii)

For å anslå nøyaktigheten ved hjelp av teorem 5.4.6, trenger vi å kjenne $f''(x)$:

```
> diff( (sin(x)/x), x, x )
```

```
> simplify(%)
```

Det er ikke så lett å anslå maksimalverdien for absoluttverdien av dette uttrykket for x i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Kanskje grafen til $f''(x)$ kan være til hjelp:

```
> plot( - (sin(x) x^2 + 2 cos(x) x - 2 sin(x)) / x^3, x = 0 .. Pi/2 )
```

Aha! $|f''(x)| \leq 0.34$, så $\left| T_8 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq 0.34 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \cdot 8^2}$ som er lik

> evalf $\left(\frac{0.34 \cdot \left(\frac{\text{Pi}}{2}\right)^3}{12 \cdot (8^2)}\right)$

Derved ligger verdien av integralet i intervallet fra

> 1.3694596090886274467 – 0.001715842135

til

> 1.3694596090886274467 + 0.001715842135

Nå er det naturligvis ikke nødvendig å ta med så mange desimaler i disse intervallgrensene, men vi skriver svaret som $[1.367, 1.372]$ for å være på den sikre siden.

Oppgave 5.4.14

a)

(i)

Her skal vi beregne det samme integralet, men nå med Simpsons metode.

Ideen bak kommandoene vi gir Maple, er på sett og vis de samme, men nå tar vi med to ledd i summen i hvert trinn i **for**-løkken, ett med $4 \cdot f(x)$ og ett med $2 \cdot f(x)$.

Deretter må vi legge til de to siste leddene i summen som er ett med $4 \cdot f(x)$ og ett med bare $f(x)$.

(Dette kan naturligvis også organiseres på andre måter, men vi tar det slik nå.)

```
> x := 0 : d := evalf( (pi/16, 20) ) : J := 1
```

```
> for n from 1 to 3 do x := x + d : J := evalf( J + 4 * sin(x)/x, 20 ) : x := x + d : J := evalf( J + 2 * sin(x)/x, 20 ) end do
```

```
> J := evalf( J + 4 * sin(x + d)/(x + d), 20 )
```

```
> J := evalf( J + sin(pi/2)/(pi/2), 20 )
```

```
> J := evalf( J * d/3, 20 )
```

Dette svaret ble adskillig bedre enn det vi fikk ved trapesmetoden.

```
> unassign('x')
```

(ii)

Den fjerdedederiverte til integranden er

```
> diff( sin(x)/x, x$4 )
```

For å se hvor stor den kan bli, plotter vi den på intervallet

```
> plot( sin(x)/x + 4*cos(x)/x^2 - 12*sin(x)/x^3 - 24*cos(x)/x^4 + 24*sin(x)/x^5, x = 0 .. Pi/2 )
```

Altså setter vi $K4 = 0.2$, slik at feilskranken i teorem 5.4.6 blir

$$> \text{evalf}\left(\frac{0.2 \cdot \left(\frac{\text{Pi}}{2}\right)^5}{180 \cdot (8^4)}\right)$$

$$> 1.3707640761280144045 - 0.000002594161013$$

$$> 1.3707640761280144045 + 0.000002594161013$$

Intervall er derfor $[1.37076148, 1.37076667]$

Oppgave 5.4.15

a)

(i)

$$> \text{taylor}(\sin(x^2), x=0, 12)$$

$$> \text{int}\left(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{10}, x=0 \dots \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$> \text{evalf}(\%, 20)$$

(ii)

Restleddet har formen $R(x) = \frac{f^{(11)}(c)}{11!} \cdot x^{11}$ for en c mellom 0 og x .

Vi trenger derfor å beregne $f^{(11)}(x)$ og se hvor stor den kan bli i tallverdi for

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

```
> diff(sin(x^2), x$11 )
```

```
> plot(diff(sin(x^2), x$11 ), x = 0 ..sqrt(Pi/2))
```

Det er klart at denne deriverte er størst i tallverdi for $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, altså

```
> subs(x=sqrt(Pi/2), -2048*cos(x^2)*x^11 - 56320*sin(x^2)*x^9 + 506880*cos(x^2)*x^7 + 1774080*sin(x^2)*x^5 - 2217600*cos(x^2)*x^3 - 665280*sin(x^2)*x)
```

```
> evalf(%, 20)
```

Restleddet er derfor begrenset av $C x^{11}$ der C er gitt ved

```
> 4.2226746938695298662 * 10^6 / 11!
```

slik at feilen i integralet er begrenset av

```
> int(0.1057869041 * x^11, x = 0 ..sqrt(Pi/2))
```

Integralets verdi er derfor inneholdt i intervallet med grenser

```
> 0.54965717597437904286 - 0.1324249823
```

```
> 0.54965717597437904286 + 0.1324249823
```

| Altså i intervallet $[0.4172, 0.6821]$.

>

>

Oppgave 5.5.12

b)

Substitusjonen $\sqrt{x} = t$ gir $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$ slik at $\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{\cos(t^2)}{t} \cdot 2t dt = 2 \cos(t^2) dt$.

Når x går fra 0 til 1, går t også fra 0 til 1.

Integralet vi skal beregne ved hjelp av trapesmetoden er derfor $\int_0^1 \cos(t^2) dt$.

Skrittlengden blir $\Delta t = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$.

```
> t := 0 : d := evalf(1/6) : J := cos(0^2)
```

```
J := 1
```

(1)

```
> for n from 1 to 5 do t := t + d : J := evalf(J + 2*cos(t^2)) end do
```

```
t := 0.1666666667
```

```
J := 2.999228445
```

```
t := 0.3333333334
```

```
J := 4.986895462
```

```
t := 0.5000000001
```

```
J := 6.924720305
```

```
t := 0.6666666668
```

```
J := 8.730419644
```

```
t := 0.8333333335
```

```
J := 10.26723835
```

(2)

```
> J := evalf(J + 2*cos(1^2))
```

```
J := 11.34784296
```

(3)

```
> J := evalf(2 * (J*d)/2)
```

$J := 1.891307160$

(4)

Dette er altså verdien vi får for integralet. Vi kontrollerer ved å la Maple beregne integralet direkte.

```
> int(cos(x)/sqrt(x), x = 0 .. 1)
```

$\text{FresnelC}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right) \sqrt{2} \sqrt{\pi}$

(5)

```
> evalf(%)
```

1.809048476

(6)

Legg merke til den smarte konstruksjonen med prosenttegnet. Prosenttegnet betyr at Maple skal sette inn det svaret han fant ved den forrige operasjonen han gjennomførte.

Her var „beregningen” av integralet det siste maple gjorde. Altså gir denne *evalf*-kommandoen verdien av integralet som et avrundet desimaltall.

Etter beregningen av integralet ved trapesmetoden, oppfattes nå t som et tall og ikke som en variabel. Derfor bruker vi som vanlig *unassign* for å beholde friheten til å bruke t til hva vi måtte ønske:

```
> unassign('t')
```

a) Hint: Problemet er at integrasjonsintervallet er uendelig langt. Den enkleste substitusjonen som fikser den saken er $x = \frac{1}{t}$.

Problemet er at vi bare får et nytt uegentlig integral. Men det kan fikses ved gjenbruk av ideen fra a).

Oppgave 5.5.12

b)

Substitusjonen $\sqrt{x} = t$ gir $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$ slik at $\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{\cos(t^2)}{t} \cdot 2t dt = 2 \cos(t^2) dt$.

Når x går fra 0 til 1, går t også fra 0 til 1.

Integralet vi skal beregne ved hjelp av trapesmetoden er derfor $\int_0^1 \cos(t^2) dt$.

Skrittlengden blir $\Delta t = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$.

```
> t := 0 : d := evalf(1/6) : J := cos(0^2)
> for n from 1 to 5 do t := t + d : J := evalf(J + 2*cos(t^2)) end do
> J := evalf(J + 2*cos(1^2))
> J := evalf(2 * J * d)
```

Dette er altså verdien vi får for integralet. Vi kontrollerer ved å la Maple beregne integralet direkte.

```
> int(cos(x)/sqrt(x), x = 0..1)
> evalf(%)
```

Legg merke til den smarte konstruksjonen med prosenttegnet. Prosenttegnet betyr at Maple skal sette inn det svaret han fant ved den forrige operasjonen han gjennomførte.

Her var „beregningen“ av integralet det siste maple gjorde. Altså gir denne *evalf*-kommandoen verdien av integralet som et avrundet desimaltall.

Etter beregningen av integralet ved trapesmetoden, oppfattes nå t som et tall og ikke som en variabel. Derfor bruker vi som vanlig *unassign* for å beholde friheten til å bruke t til hva vi måtte ønske:

`|> unassign('t')`

a) Hint: Problemet er at integrasjonsintervallet er uendelig langt. Den enkleste substitusjonen som fikser den saken er $x = \frac{1}{t}$.
Problemet er at vi bare får et nytt uegentlig integral. Men det kan fikses ved gjenbruk av ideen fra a).

Oppgave 6.2.15

a)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Buelengden er derfor

```
> int(sqrt(1 + 4*x^2), x = 0..2)
```

$$\sqrt{17} - \frac{1}{4} \ln(-4 + \sqrt{17})$$

(1)

eller hvis du heller vil ha det på desimalform

```
> evalf(%)
```

$$4.646783762$$

(2)

Oppgave 6.2.16

b)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx$$

(i) Rotasjon om x -aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\text{Pi}} 2 \pi 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) ds = 4\pi \int_{x=0}^{x=\text{Pi}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx$

$$\begin{aligned} &> \text{int}\left(4 \cdot \text{Pi} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \text{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 0 .. \text{Pi}\right) \\ &4 \pi \sqrt{2} + 4 \pi \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &> \text{simplify}(\%) \\ &4 \pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\%) \\ &28.84719890 \end{aligned} \quad (5)$$

(ii) Rotasjon om y – aksen:

Radien i rotasjonen ved x er x . Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\text{Pi}} 2 \pi x ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\text{Pi}} x \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx$

$$\begin{aligned} &> \text{int}\left(2 \cdot \text{Pi} \cdot x \cdot \text{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 0 .. \text{Pi}\right) \\ &\int_0^{\pi} 2 \pi x \sqrt{1 + \cos\left(\frac{1}{2} x\right)^2} dx \end{aligned} \quad (6)$$

Ojsann. Dette betyr at Maple ikke klarer å beregne integralet eksakt. Men vi fortsetter trøstig iveri:

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\%) \\ &35.10981336 \end{aligned} \quad (7)$$

(iii) Rotasjon om akse $x = 2$:

Radien i rotasjonen ved x er $2 - x$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\pi} 2\pi |2 - x| ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\pi} (2 - x) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx$ der vi må huske at

$|x - 2| = x - 2$ for $x \geq 2$ og $|x - 2| = 2 - x$ for $x \leq 2$. Dette gjør at vi må dele integralet i to deler:

$$\begin{aligned} &> \int_0^2 2\pi (2 - x) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx + \int_2^\pi 2\pi (x - 2) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx \\ &\quad \int_0^2 2\pi (2 - x) \sqrt{1 + \cos\left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx + \int_2^\pi 2\pi (x - 2) \sqrt{1 + \cos\left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx \end{aligned} \quad (8)$$

> evalf(%)

21.29156748

(9)

c)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

(i) Rotasjon om x -aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 3 \cdot |\ln x| = 3 \ln x$ for $\sqrt{7} \leq x \leq 4$. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\pi 3 \ln x ds = 6\pi$

$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} \ln x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} &> \text{int}\left(6 \cdot \text{Pi} \cdot \ln(x) \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}, x = \sqrt{7} \dots 4.0\right) \\ &\int_{\sqrt{7}}^{4.0} 6 \pi \ln(x) \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &> \text{simplify}(\%) \\ &18.84955592 \left(\int_{\sqrt{7}}^{4.0} \ln(x) \sqrt{\frac{x^2 + 9}{x^2}} dx \right) \end{aligned} \quad (11)$$

> evalf(%)

Nei, dette gikk ikke. Maple klarte ikke integralet. Da får vi be Maple om å beregne det numerisk ved å skrive $\sqrt{7}$ som et desimaltall:

$$18.84955592 \left(\int_{\sqrt{7.}}^{4.0} \ln(x) \sqrt{\frac{x^2 + 9.}{x^2}} dx \right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &> \text{int}\left(6 \cdot \text{Pi} \cdot \ln(x) \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}, x = 2.645751311 \dots 4.0\right) \\ &41.16745980 \end{aligned} \quad (13)$$

(ii) Rotasjon om y – aksen:

Radien i rotasjonen ved x er x . Arealet blir derfor
$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2 \pi x ds = 2\pi \int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

```
> int(2*Pi*x*sqrt(1 + 9/x^2), x = sqrt(7)..4)
```

Warning, unable to determine if 0 is between sqrt(7) and 4; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$\int_{\sqrt{7}}^4 2\pi x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

(14)

Hmmm. Skriv heller $\sqrt{7}$ som desimaltall, så går det bedre:

```
> int(2*Pi*x*sqrt(1 + 9/x^2), x = evalf(sqrt(7))..4)
```

38.15846359

(15)

(iii) Rotasjon om akse $x = 2$:

Radien i rotasjonen ved x er $|x - 2| = x - 2$ fordi $x \geq 2$ på integrasjonsintervallet. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\pi |2 - x| ds = 2\pi$

$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} (x - 2) \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

```
> int(2*Pi*(x - 2)*sqrt(1 + 9/x^2), x = sqrt(7)..4)
```

$$-4\pi\sqrt{7} + 18\pi\ln(3) - 9\pi\ln(\sqrt{7} + 4) + 16\pi - 12\pi\operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{4}\right) + 12\pi\operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{5}\right)$$

(16)

```
> simplify(%)
```

$$\pi \left(12\operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{5}\right) - 4\sqrt{7} - 9\ln(\sqrt{7} + 4) - 12\operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{4}\right) + 18\ln(3) + 16 \right)$$

(17)

```
> evalf(%)
```

(18)



15.04358394

(18

Oppgave 6.2.15

a)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Buelengden er derfor

```
> int(sqrt(1 + 4*x^2), x = 0 .. 2)
```

eller hvis du heller vil ha det på desimalform

```
> evalf(%)
```

Oppgave 6.2.16

b)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx$$

(i) Rotasjon om x -aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\text{Pi}} 2\pi \cdot 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) ds = 4\pi \int_{x=0}^{x=\text{Pi}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} dx$

$$> \text{int}\left(4 \cdot \text{Pi} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \text{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 0 .. \text{Pi}\right)$$

$\text{> simplify}(\%)$

$\text{> evalf}(\%)$

(ii) Rotasjon om y – akse:

Radien i rotasjonen ved x er x . Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\text{Pi}} 2 \pi x \, ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\text{Pi}} x \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \, dx$

$$> \text{int}\left(2 \cdot \text{Pi} \cdot x \cdot \text{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 0 .. \text{Pi}\right)$$

Ojsann. Dette betyr at Maple ikke klarer å beregne integralet eksakt. Men vi fortsetter trøstig iveri:

$\text{> evalf}(\%)$

(iii) Rotasjon om akse $x = 2$:

Radien i rotasjonen ved x er $2 - x$. Arealet blir derfor $\int_{x=0}^{x=\text{Pi}} 2 \pi |2 - x| \, ds = 2\pi \int_{x=0}^{x=\text{Pi}} (2 - x) \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \, dx$ der vi må huske at

$|x - 2| = x - 2$ for $x \geq 2$ og $|x - 2| = 2 - x$ for $x \leq 2$. Dette gjør at vi må dele integralet i to deler:

$$> \text{int}\left(2 \cdot \text{Pi} \cdot (2 - x) \cdot \text{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 0 .. 2\right) + \text{int}\left(2 \cdot \text{Pi} \cdot (x - 2) \cdot \text{sqrt}\left(1 + \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right), x = 2 .. \text{Pi}\right)$$

$\text{> evalf}(\%)$

c)

Buelengdedifferensialet blir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

(i) Rotasjon om x -aksen:

Radien i rotasjonen ved x er $|y| = 3 \cdot |\ln x| = 3 \ln x$ for $\sqrt{7} \leq x \leq 4$. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\pi 3 \ln x ds = 6\pi$

$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} \ln x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

```
> int(6*Pi*ln(x)*sqrt(1 + 9/x^2), x = sqrt{7} ..4.0)
```

```
> simplify(%)
```

```
> evalf(%)
```

Nei, dette gikk ikke. Maple klarte ikke integralet. Da får vi be Maple om å beregne det numerisk ved å skrive $\sqrt{7}$ som et desimaltall:

```
> int(6*Pi*ln(x)*sqrt(1 + 9/x^2), x = 2.645751311 ..4.0)
```

(ii) Rotasjon om y -aksen:

Radien i rotasjonen ved x er x . Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2\pi x ds = 2\pi \int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$

$$> \text{int}\left(2 \cdot \text{Pi} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}, x = \sqrt{7} \dots 4\right)$$

Hmmm. Skriv heller $\sqrt{7}$ som desimaltall, så går det bedre:

$$> \text{int}\left(2 \cdot \text{Pi} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}, x = \text{evalf}(\sqrt{7}) \dots 4\right)$$

(iii) Rotasjon om akse $x = 2$:

Radien i rotasjonen ved x er $|x - 2| = x - 2$ fordi $x \geq 2$ på integrasjonsintervallet. Arealet blir derfor $\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} 2 \pi |2 - x| ds = 2\pi$

$$\int_{x=\sqrt{7}}^{x=4} (x - 2) \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} dx$$

$$> \text{int}\left(2 \cdot \text{Pi} \cdot (x - 2) \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}, x = \sqrt{7} \dots 4\right)$$

> *simplify*(%)

> *evalf*(%)

Oppgave 6.3.13:

Rammen består av parabellen $x = 4y^2$ for $0 \leq x \leq a$ og linjestykket langs $x = a$ som har lengde $2|y| = 2\sqrt{\frac{a}{4}} = \sqrt{a}$.

I oppgave 9 fant vi at $a = \frac{5}{3}$.

Lengden av kurven $y = \sqrt{\frac{x}{4}}$ for $0 \leq x \leq \frac{5}{3}$ er $\int_{x=0}^{\frac{5}{3}} ds$ der $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}}\right)^2} dx$, altså

$$\begin{aligned} &> \text{int}\left(\text{sqrt}\left(1 + \frac{1}{8 \cdot x}\right), x=0..\frac{5}{3}\right) \\ &\quad -\frac{1}{32} \ln(2) - \frac{1}{16} \ln(3) + \frac{1}{16} \ln(83\sqrt{2} + 8\sqrt{215}) + \frac{1}{12} \sqrt{2} \sqrt{215} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &> \text{simplify}(\%) \\ &\quad -\frac{1}{32} \ln(2) - \frac{1}{16} \ln(3) + \frac{1}{16} \ln(83\sqrt{2} + 8\sqrt{215}) + \frac{1}{12} \sqrt{2} \sqrt{215} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\%) \\ &\quad 1.978852325 \end{aligned} \quad (3)$$

Lengden av rammen er derfor

$$\begin{aligned} &> 2 \cdot 1.978852325 + \text{sqrt}\left(\frac{5}{3}\right) \\ &\quad 3.957704650 + \frac{1}{3} \sqrt{15} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\%) \\ &\quad 5.248699099 \end{aligned} \quad (5)$$

>

Oppgave 6.3.13:

Rammen består av parabellen $x = 4y^2$ for $0 \leq x \leq a$ og linjestykket langs $x = a$ som har lengde $2|y| = 2\sqrt{\frac{a}{4}} = \sqrt{a}$.

I oppgave 9 fant vi at $a = \frac{5}{3}$.

Lengden av kurven $y = \sqrt{\frac{x}{4}}$ for $0 \leq x \leq \frac{5}{3}$ er $\int_{x=0}^{\frac{5}{3}} ds$ der $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}}\right)^2} dx$, altså

```
[> int(sqrt(1 + 1/(8*x)), x=0..5/3)
=> simplify(%)
=> evalf(%)

Lengden av rammen er defor

> 2*1.978852325 + sqrt(5/3)
=> evalf(%)
>
```

Oppgave 7.2.6

a)

```
> x := 1.0
```

$x := 1.0$

(1

```
> for n from 1 by 1 to 20 do x := sin(x) end do
```

$x := 0.8414709848$

$x := 0.7456241417$

$x := 0.6784304774$

$x := 0.6275718321$

$x := 0.5871809966$

$x := 0.5540163908$

$x := 0.5261070755$

$x := 0.5021706763$

$x := 0.4813293553$

$x := 0.4629578986$

$x := 0.4465965934$

$x := 0.4318984333$

$x := 0.4185956610$

$x := 0.4064777650$

$x := 0.3953765470$

$x := 0.3851557131$

$x := 0.3757034469$

$x := 0.3669270011$

$x := 0.3587486881$

$x := 0.3511028590$

(2

Iterasjonen ser ut til å konvergere sakte mot null som er det eneste fikspunktet for $\sin x$.

d)

Det er klart at $f(x) = 0$ hvis og bare hvis $\frac{(x^2 + 2x)}{4} = x$, altså hvis og bare hvis $x^2 - 2x = 0$. f har derfor akkurat to fikspunkter, nemlig $x = 0$ og $x = 2$.

Vi starter med midtpunktet mellom dem og ser hva som skjer:

> $x := 1.0$

$x := 1.0$

(3

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$ **end do**

$x := 0.7500000000$

$x := 0.5156250000$

$x := 0.3242797852$

$x := 0.1884292374$

$x := 0.1030910131$

$x := 0.05420244580$

$x := 0.02783569918$

$x := 0.01411155613$

$x := 0.007105562069$

$x := 0.003565403287$

$x := 0.001785879669$

$x := 0.0008937371760$

$x := 0.0004470682795$

$x := 0.0002235841073$

$x := 0.0001118045511$

```

x := 0.00005590540061
x := 0.00002795348165
x := 0.00001397693617
x := 0.000006988516924
x := 0.000003494270672

```

(4)

Iterasjonen ser ut til å konvergere mot null. Hva om vi prøver med en $x > 2$:

```
> x := 5.0
```

```
x := 5.0
```

(5)

```
> for n from 1 to 20 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

```

x := 8.750000000
x := 23.51562500
x := 150.0039673
x := 5700.299536
x := 8.126203850 106
x := 1.650880131 1013
x := 6.813513018 1025
x := 1.160598991 1051
x := 3.367475045 10101
x := 2.834972045 10202
x := 2.009266624 10404
x := 1.009288092 10808
x := 2.546656132 101615
x := 1.621364364 103230
x := 6.572056002 106459

```

```

x := 1.079798002 1012919
x := 2.914909312 1025837
x := 2.124174074 1051674
x := 1.128028874 10103348
x := 3.181122852 10206695

```

(6)

Det ser ut til å blåse opp til uendelig.
Vi prøver litt nærmere $x = 2$:

```
> x := 2.1
```

```
x := 2.1
```

(7)

```
> for n from 1 to 20 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

```

x := 2.152500000
x := 2.234564062
x := 2.365601168
x := 2.581817806
x := 2.957354699
x := 3.665164054
x := 5.190938912
x := 9.331931154
x := 26.43720034
x := 187.9499906
x := 8925.274737
x := 1.991959492 107
x := 9.919757541 1013
x := 2.460039742 1027

```

```

x := 1.512948883 1054
x := 5.722535808 10107
x := 8.186854018 10214
x := 1.675614468 10429
x := 7.019209612 10857
x := 1.231732590 101715

```

(8)

Hva om vi starter med x bittelitte granne mindre enn 2:

```
> x := 1.99999
```

```
x := 1.99999
```

(9)

```
> for n from 1 to 20 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

```

x := 1.999985000
x := 1.999977500
x := 1.999966250
x := 1.999949375
x := 1.999924063
x := 1.999886096
x := 1.999829147
x := 1.999743728
x := 1.999615608
x := 1.999423449
x := 1.999135256
x := 1.998703071
x := 1.998055027
x := 1.997083486
x := 1.995627356

```

```
x := 1.993445814
x := 1.990179460
x := 1.985293301
x := 1.977994023
x := 1.967112100
```

(10

Iterasjonen avtar. Antakelig går den mot null igjen. Vi prøver litt lenger. Ved ikke å gi x en ny startverdi, blir startverdien den verdien den allerede har, nemlig den siste verdien i listen vi nettopp fikk.

> **for** n **from** 1 **to** 20 **do** $x := \frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$ **end do**

```
x := 8.307891970 10-58
x := 4.153945985 10-58
x := 2.076972992 10-58
x := 1.038486496 10-58
x := 5.192432480 10-59
x := 2.596216240 10-59
x := 1.298108120 10-59
x := 6.490540600 10-60
x := 3.245270300 10-60
x := 1.622635150 10-60
x := 8.113175750 10-61
x := 4.056587875 10-61
x := 2.028293938 10-61
x := 1.014146969 10-61
x := 5.070734845 10-62
```

$$x := 2.535367422 \cdot 10^{-62}$$

$$x := 1.267683711 \cdot 10^{-62}$$

$$x := 6.338418555 \cdot 10^{-63}$$

$$x := 3.169209278 \cdot 10^{-63}$$

$$x := 1.584604639 \cdot 10^{-63}$$

(11

Det går nok mot null, ja.

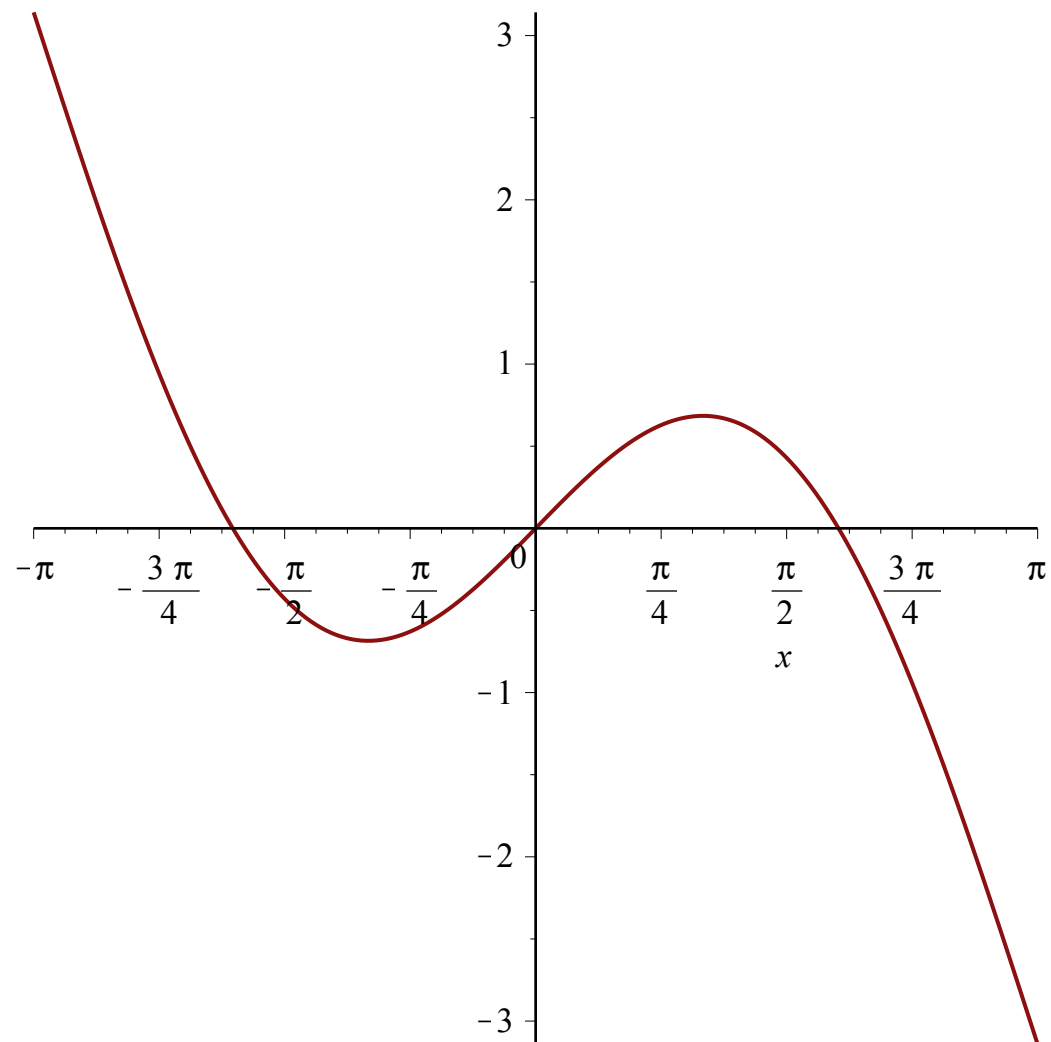
Oppgave 7.2.7.

(i)

Vi har brukt x som et tall, så det er best vi bruker *unassign* på x :

```
> unassign('x')
```

```
> plot(2·sin(x) - x, x=-Pi..Pi)
```



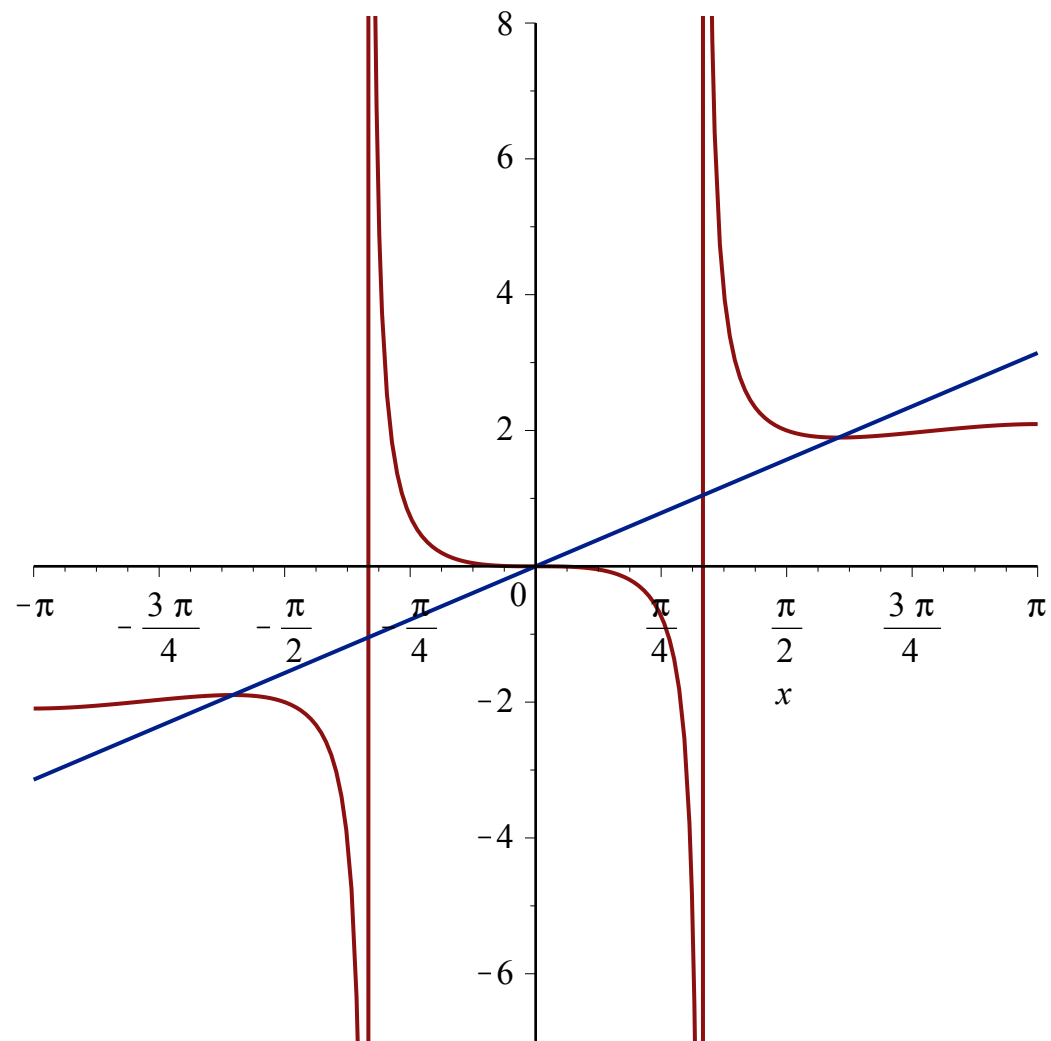
Det ser ut til at funksjonen har nullpunkter for $x = 0$ og $x \approx \pm \frac{11\pi}{16}$.

(ii)

Vi skal plotte to grafer i samme koordinatsystem, nemlig grafen til $y = x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}$ og grafen til $y = x$. Det kan vi gjøre ved bruk av kommandoen *display*

Men det finnes også en raskere måte: de to funksjonene settes i en hakeparentes, adskilt med et komma i en *plot*-kommando:

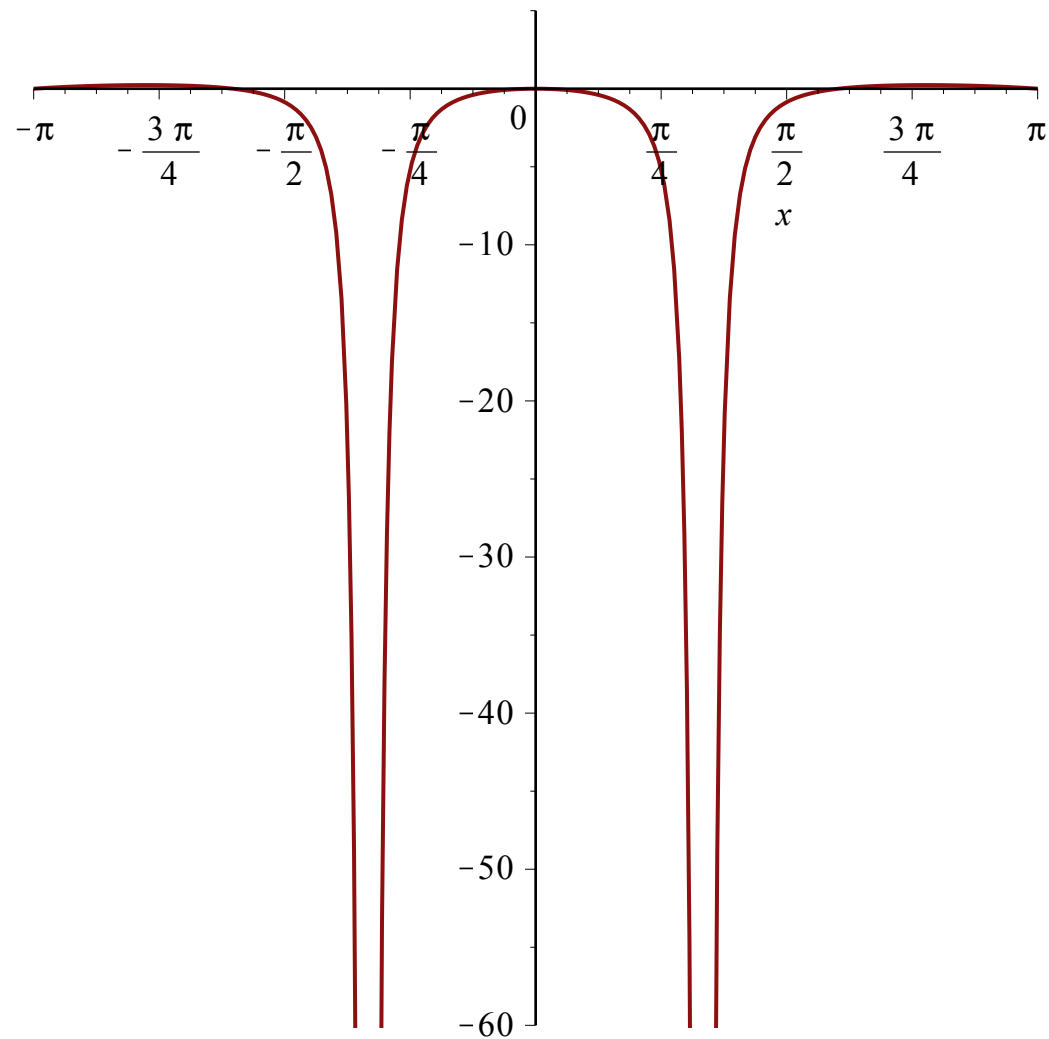
```
> plot( [ x - (2 * sin(x) - x) / (2 * cos(x) - 1), x ], x = -Pi .. Pi )
```



De tre punktene vi fant i (i) er de tre skjæringspunktene mellom de to grafene på denne figuren. Hvorfor?

(iii)

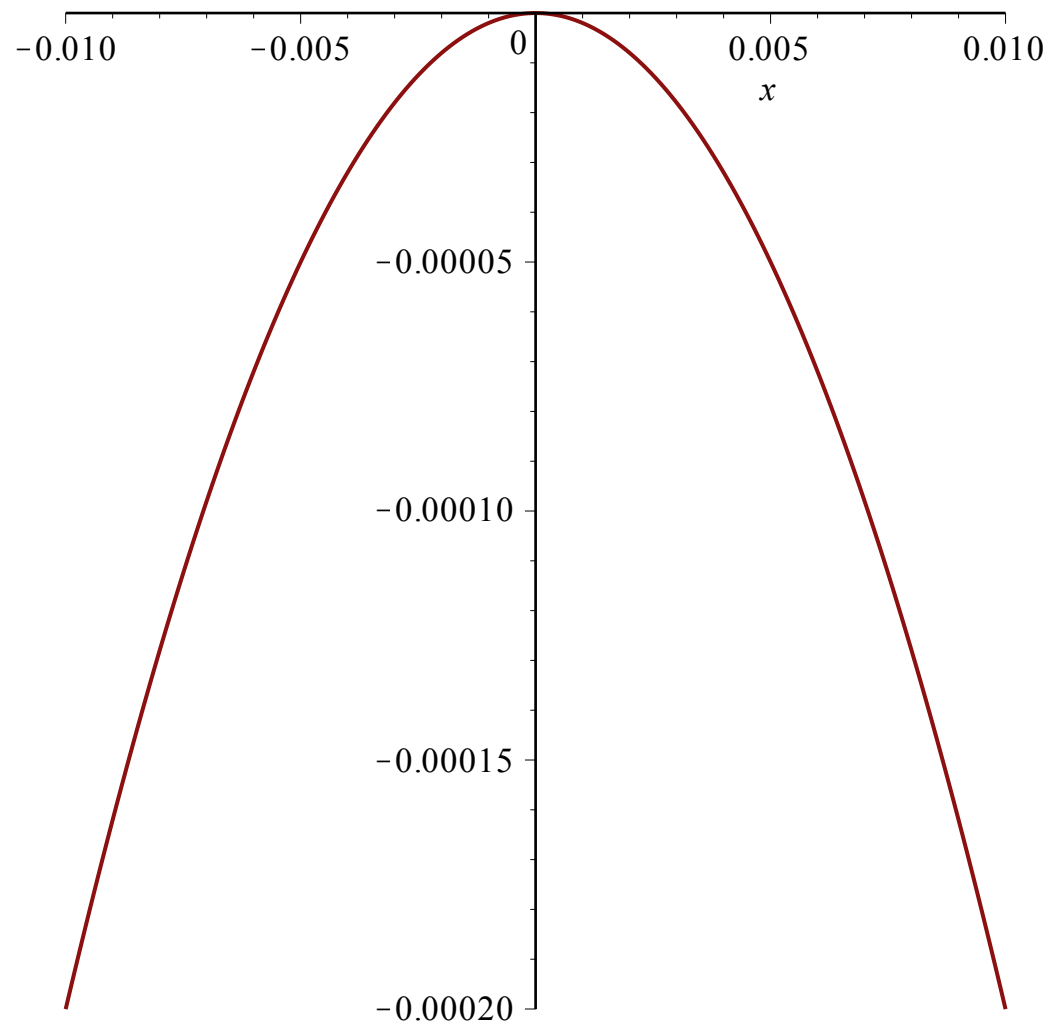
```
> plot(diff(x - (2*sin(x) - x)/(2*cos(x) - 1), x), x = -Pi..Pi)
```



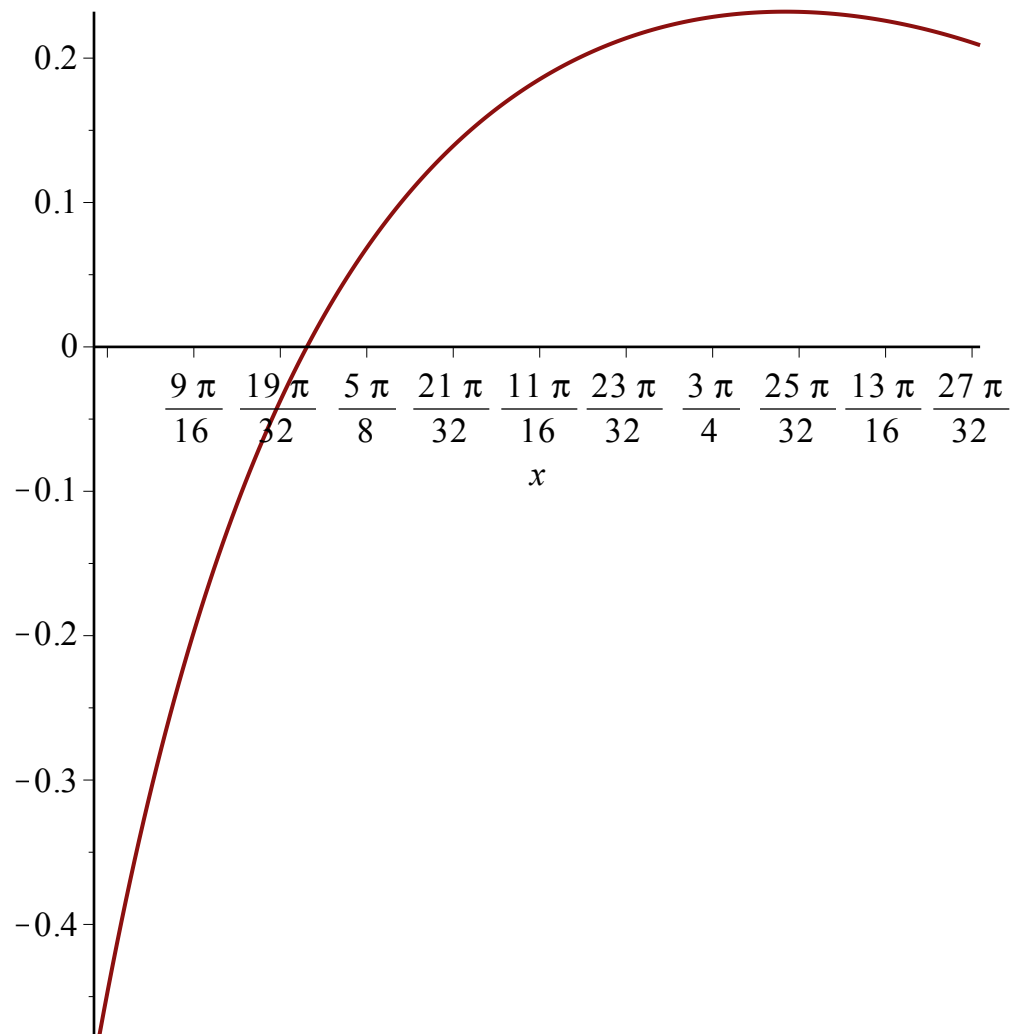
Ikke bare ser det ut til at de deriverte av $F(x)$ er lik null i de tre punktene, men den deriverte er ganske nær null i nærheten av fikspunktene også.

Men la oss plote grafen til $F'(x)$ i små omegner om fikspunktene:

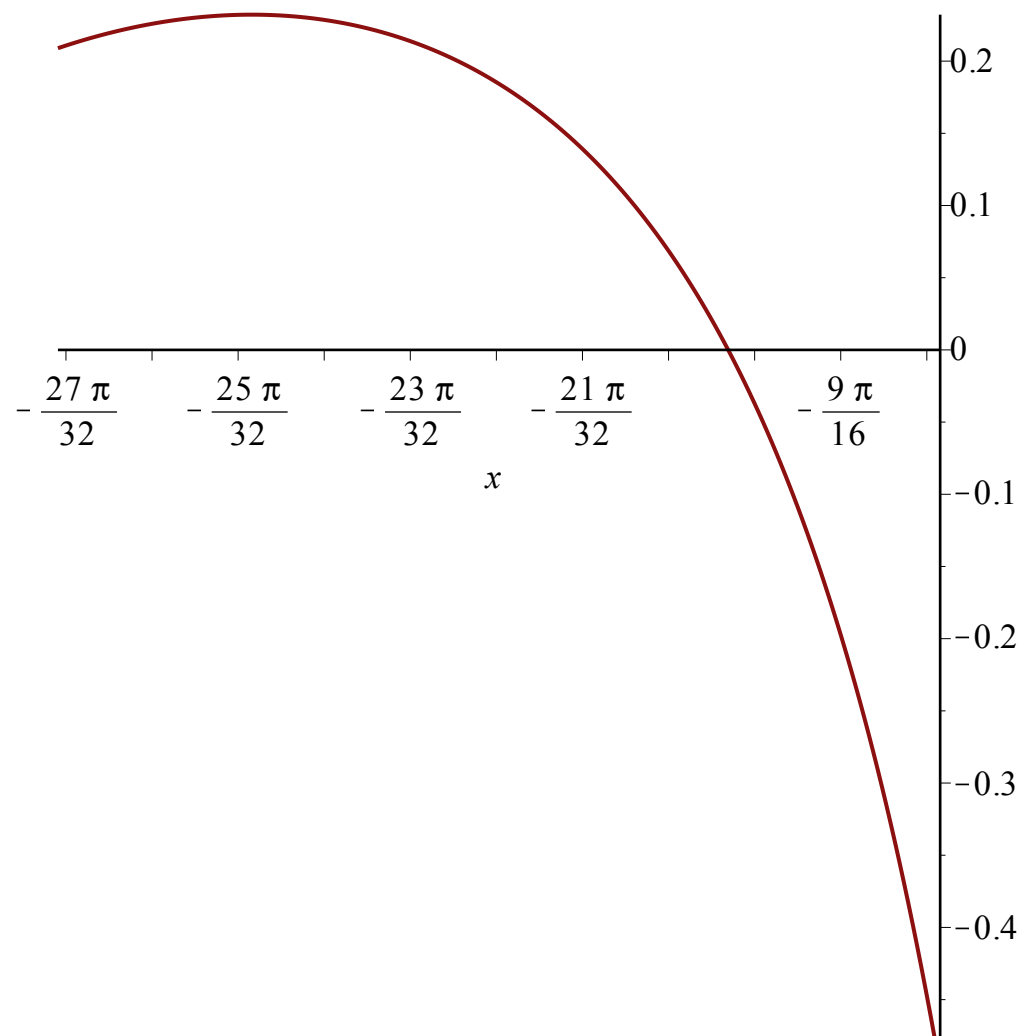
> $\text{plot}\left(\text{diff}\left(x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right), x = -0.01 \dots 0.01\right)$



> $\text{plot}\left(\text{diff}\left(x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right), x = \frac{11 \cdot \text{Pi}}{16} - 0.5 \dots \frac{11 \cdot \text{Pi}}{16} + 0.5\right)$



> $\text{plot}\left(\text{diff}\left(x - \frac{2 \cdot \sin(x) - x}{2 \cdot \cos(x) - 1}, x\right), x = -\frac{11 \cdot \pi}{16} - 0.5 \dots -\frac{11 \cdot \pi}{16} + 0.5\right)$



(iv)

$U = (\alpha - p, \alpha + p)$ være en symmetrisk omegn om fikspunktet α der $F'(x)$ er kontinuert med $|F'(x)| < 1$ for alle $x \in U$. La $x \in U$.

Siden $F'(x)$ er kontinuert i U finnes det en (positiv) konstant $K < 1$ slik at $|F'(c)| \leq K$ for alle c med avstand $\leq |x - \alpha|$ til α .

Videre følger det av sekantteoremet (side 133) at det finnes en c med avstand $\leq |x - \alpha|$ til α , slik at $\frac{(F(x) - F(\alpha))}{x - \alpha} = F'(c)$.

Det betyr at $|F(x) - F(\alpha)| = |F(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|$. Det vil si, $F(x)$ har mindre avstand til α enn x har.

Derfor må (av samme grunn) $|F \circ F(x) - \alpha| \leq K|F(x) - \alpha| \leq K^2|x - \alpha|$

og så videre. Siden $K^n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, må $F^{[n]}(x) \rightarrow \alpha$.

(v)

Vi ser først på fikspunktet nær $\frac{11 \cdot \text{Pi}}{16}$

> c := evalf($\frac{11 \cdot \text{Pi}}{16}$)

c := 2.159844950 (12)

> c := subs($x = c, x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}$)

c := 2.159844950 - $\frac{2 \sin(2.159844950) - 2.159844950}{2 \cos(2.159844950) - 1}$ (13)

> c := evalf(%)

c := 1.924471826 (14)

> c := evalf(subs($x = c, x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}$))

(Vi bruker *subs* istedenfor å sette x lik verdien. Derved slipper vi å bruke *unassign('x')* etterpå.)

c := 1.895961262 (15)

> c := evalf(subs($x = c, x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}$))

c := 1.895494393 (16)

$\alpha \approx 1.895494$ er derfor en bedre approksimasjon til dette fikspunktet. På grunn av symmetrien er også $\alpha \approx -1.895494$ en bedre

approksimasjon til fikspunktet nær $-\frac{11 \cdot \text{Pi}}{16}$.

For $\alpha = 0$ kan vi se hva som skjer om vi starter med $x = 0.5$

> $c := 0.5$

$c := 0.5$

(17)

> $c := \text{evalf}\left(\text{subs}\left(x = c, x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

$c := -0.1076168809$

(18)

> $c := \text{evalf}\left(\text{subs}\left(x = c, x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

$c := 0.0008396554$

(19)

> $c := \text{evalf}\left(\text{subs}\left(x = c, x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}\right)\right)$

$c := -3.950 \cdot 10^{-10}$

(20)

Det gikk veldig fort mot null.

Oppgave 7.2.8.

a)

(i)

> $\text{unassign}('x')$

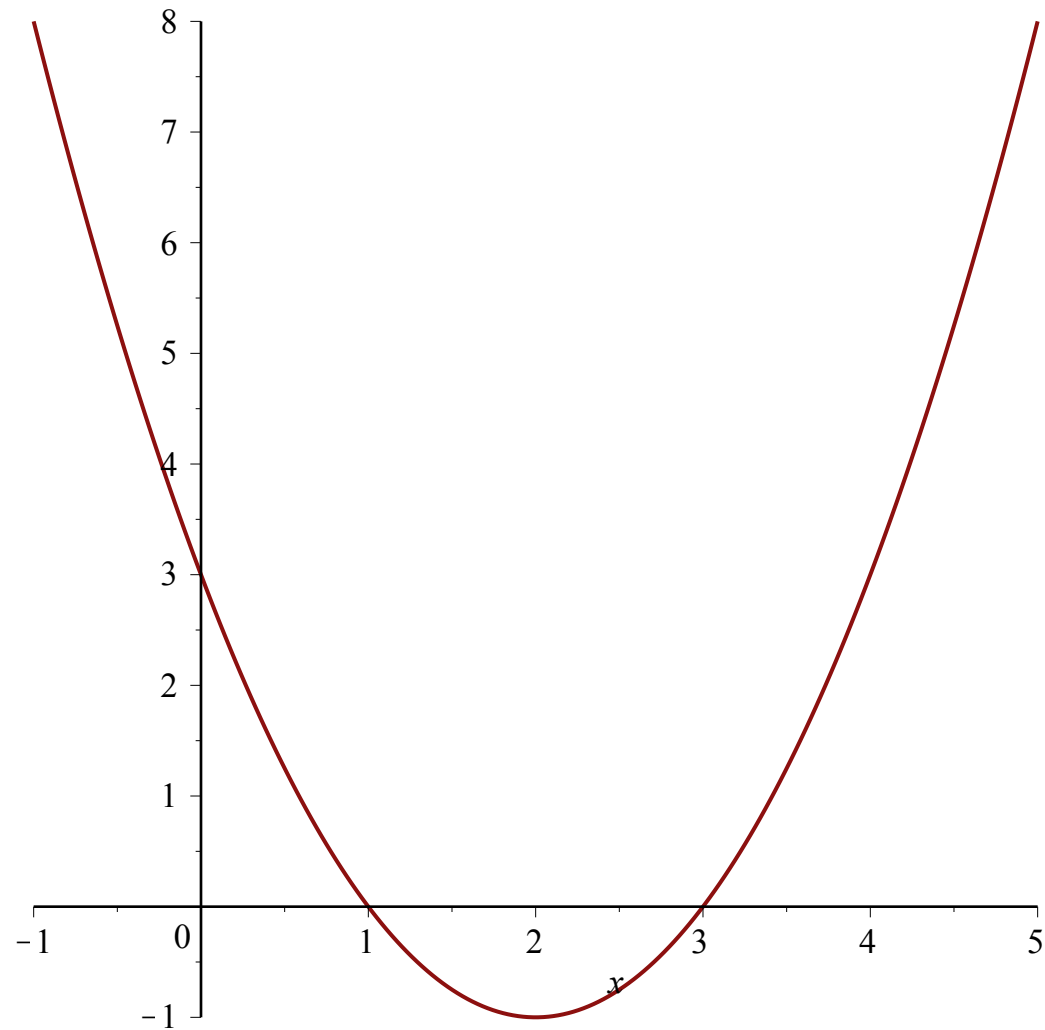
> $F := x \rightarrow x - \frac{(x^2 - 4x + 3)}{2x - 4}$

$F := x \rightarrow x - \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 4}$

(21)

(ii)

> $\text{plot}(x^2 - 4x + 3, x = -1 \dots 5)$



Det er lett å kontrollere at de to nullpunktene til f (som vi skal finne ved Newtons metode) er $x = 1$ og $x = 3$.

(iii)

> *diff*(F(x), x)

$$\frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(2x - 4)^2}$$

(22

> *solve*(% = 1, x)

$$2 - I, 2 + I$$

(23

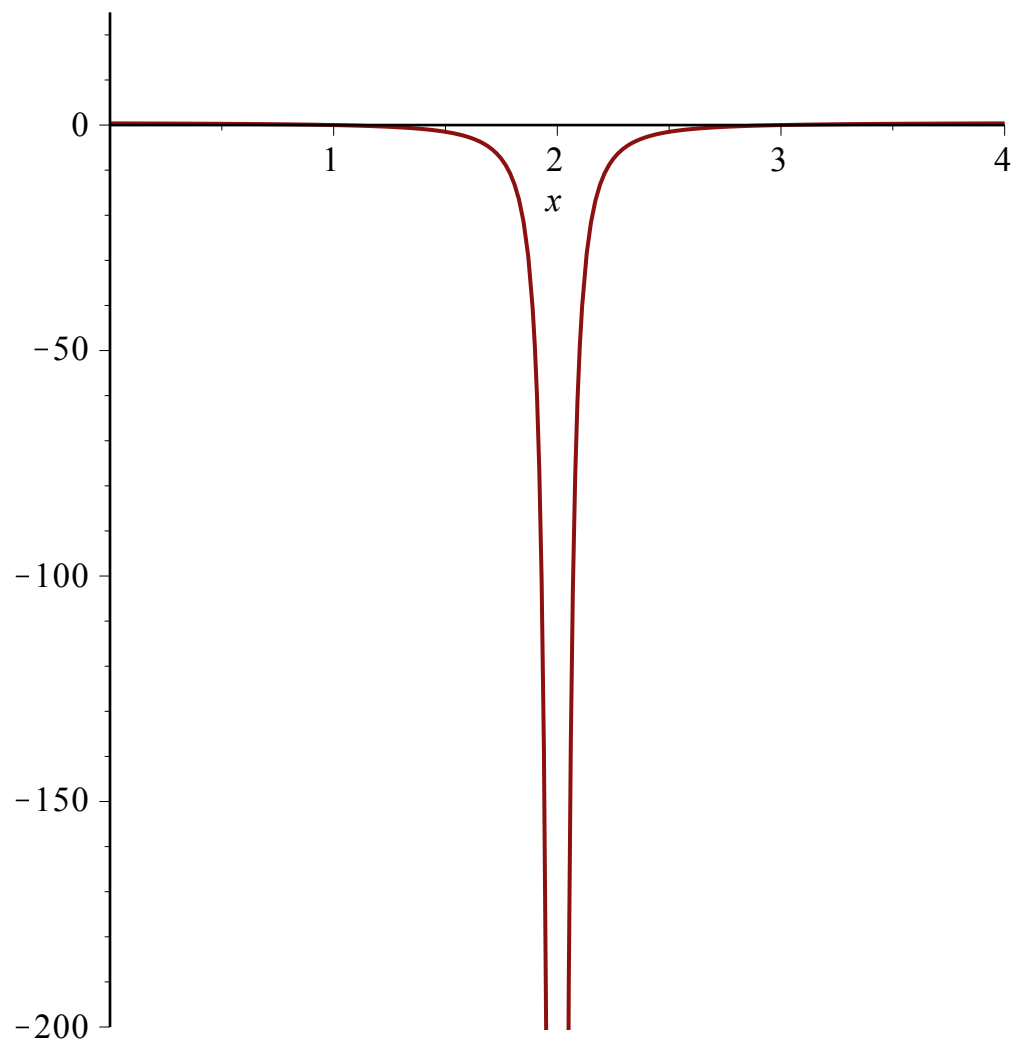
Likningen har altså bare komplekse røtter. $F'(x) = 1$ kan derfor ikke inntreffe for noen reell x .

> *solve* $\left(\frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(2x - 4)^2} = -1, x\right)$

$$2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}, 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

(24

> *plot* $\left(\frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(2x - 4)^2}, x = 0..4\right)$



Det er klart at $F'(x)$ er kontinuert for alle $x \neq 2$, og at $f(x)$ bare har de to fikspunktene 1 og 3.

Jeg foreslår derfor intervalletne $\left(-\infty, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ og $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right)$.

Som en liten kontroll ser jeg hva som skjer om jeg starter med $x = 50$: (jeg skriver 50.0 for jeg vil ikke ha eksakte svar, jeg vil ha svar på desimalform!)

```
> x := 50.
```

```
x := 50.
```

(25

```
> for n from 1 to 20 do x := x -  $\frac{(x^2 - 4x + 3)}{2x - 4}$  end do
```

```
x := 26.01041667
```

```
x := 14.02603263
```

```
x := 8.054592787
```

```
x := 5.109878329
```

```
x := 3.715717159
```

```
x := 3.149281905
```

```
x := 3.009695222
```

```
x := 3.000046548
```

```
x := 3.000000001
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

```
x := 3.000000000
```

(26

Det ser bra ut. Og starter jeg med $x = -50$, får jeg også svar som forventet:

```
> x := -50.0
```

```
x := -50.0
```

(27

```

> for n from 1 to 20 do  $x := x - \frac{(x^2 - 4x + 3)}{2x - 4}$  end do
x := -24.00961538
x := -11.02403135
x := -4.550406246
x := -1.351534266
x := 0.175047462
x := 0.8135440030
x := 0.9853488715
x := 0.9998942222
x := 0.9999999945
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000
x := 1.000000000

```

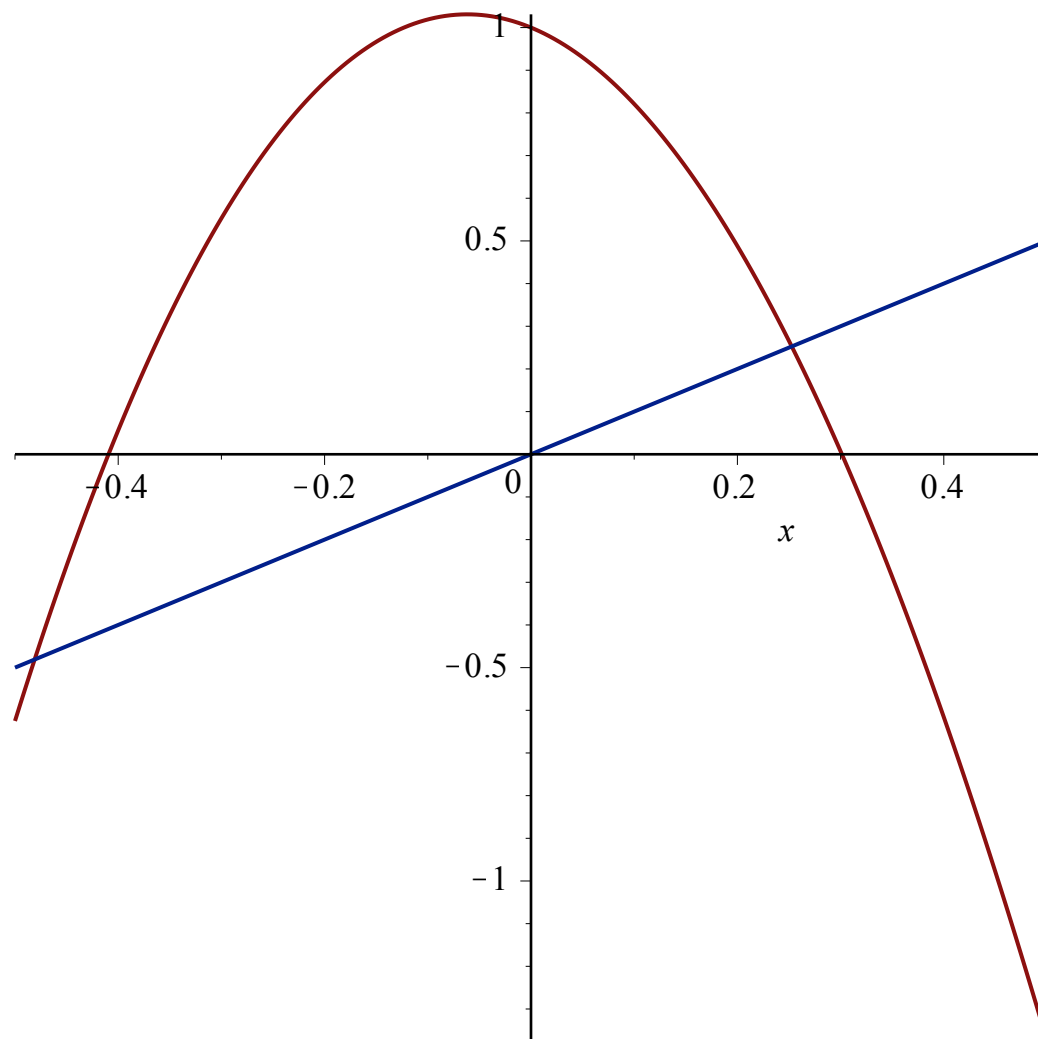
(28

Oppgave 7.2.9.

b)

```
> unassign('x')
```

```
> plot([x^3 - 8x^2 - x + 1, x], x = -1/2 .. 1/2)
```



Det er klart at $y = x$ i alle punktene på den blå linjen, og at $y = f(x)$ i alle punktene på den røde kurven. I skjæringspunktene holder begge disse to likhetene. Det vil si, $y = f(x) = x$.

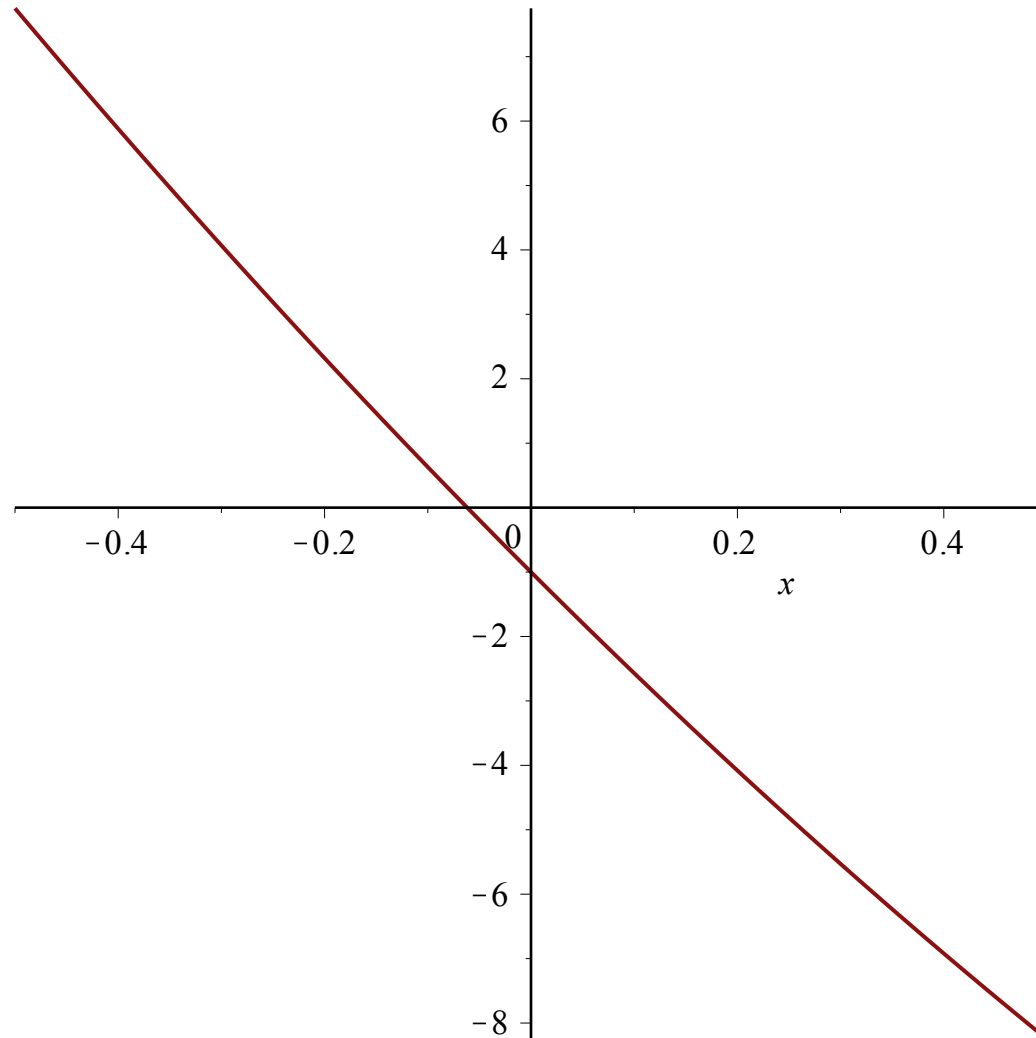
(ii)

```
> diff(x^3 - 8 x^2 - x + 1, x)
```

$$3x^2 - 16x - 1$$

(29

```
> plot(%, x = -1/2 .. 1/2)
```



```
>
```

└ Kurven viser at begge fikspunktene er frastøtende.

Oppgave 7.2.6

a)

```
> x := 1.0  
> for n from 1 by 1 to 200 do x := sin(x) end do
```

Iterasjonen ser ut til å konvergere sakte mot null som er det eneste fikspunktet for $\sin x$.

d)

Det er klart at $f(x) = 0$ hvis og bare hvis $\frac{(x^2 + 2x)}{4} = x$, altså hvis og bare hvis $x^2 - 2x = 0$. f har derfor akkurat to fikspunkter, nemlig $x = 0$ og $x = 2$.

Vi starter med midtpunktet mellom dem og ser hva som skjer:

```
> x := 1.0  
> for n from 1 to 20 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

Iterasjonen ser ut til å konvergere mot null. Hva om vi prøver med en $x > 2$:

```
> x := 5.0  
> for n from 1 to 20 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

Det ser ut til å blåse opp til uendelig.

Vi prøver litt nærmere $x = 2$:

```
> x := 2.1
```

```
> for n from 1 to 20 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

Hva om vi starter med x bittelitte granne mindre enn 2:

```
> x := 1.99999
```

```
> for n from 1 to 20 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

Iterasjonen avtar. Antakelig går den mot null igjen. Vi prøver litt lenger. Ved ikke å gi x en ny startverdi, blir startverdien den verdien den allerede har, nemlig den siste verdien i listen vi nettopp fikk.

```
> for n from 1 to 200 do x :=  $\frac{(x^2 + 2 \cdot x)}{4}$  end do
```

Det går nok mot null, ja.

Oppgave 7.2.7.

(i)

Vi har brukt x som et tall, så det er best vi bruker *unassign* på x :

```
> unassign('x')
```

```
> plot(2·sin(x) - x, x = -Pi..Pi)
```

Det ser ut til at funksjonen har nullpunkter for $x = 0$ og $x \approx \pm \frac{11\pi}{16}$.

(ii)

Vi skal plotte to grafer i samme koordinatsystem, nemlig grafen til $y = x - \frac{(2 \cdot \sin(x) - x)}{2 \cdot \cos(x) - 1}$ og grafen til $y = x$. Det kan vi gjøre ved bruk av kommandoen *display*

Men det finnes også en raskere måte: de to funksjonene settes i en hakeparentes, adskilt med et komma i en *plot*-kommando:

```
> plot( [ x - (2 * sin(x) - x) / (2 * cos(x) - 1), x ], x = -Pi .. Pi )
```

De tre punktene vi fant i (i) er de tre skjæringspunktene mellom de to grafene på denne figuren. Hvorfor?

(iii)

```
> plot( diff( x - (2 * sin(x) - x) / (2 * cos(x) - 1), x ), x = -Pi .. Pi )
```

Ikke bare ser det ut til at de deriverte av $F(x)$ er lik null i de tre punktene, men den deriverte er ganske nær null i nærheten av fikspunktene også.

Men la oss plotte grafen til $F'(x)$ i små omegner om fikspunktene:

```
> plot( diff( x - (2 * sin(x) - x) / (2 * cos(x) - 1), x ), x = -0.01 .. 0.01 )
```

```
> plot( diff( x - (2 * sin(x) - x) / (2 * cos(x) - 1), x ), x = 11 * Pi / 16 - 0.5 .. 11 * Pi / 16 + 0.5 )
```

```
> plot( diff( x - (2 * sin(x) - x) / (2 * cos(x) - 1), x ), x = 11 * Pi / 16 - 0.5 .. 11 * Pi / 16 + 0.5 )
```

(iv)

$U = (\alpha - p, \alpha + p)$ være en symmetrisk omegn om fikspunktet α der $F'(x)$ er kontinuerlig med $|F'(x)| < 1$ for alle $x \in U$. La $x \in U$.

Siden $F'(x)$ er kontinuerlig i U finnes det en (positiv) konstant $K < 1$ slik at $|F'(c)| \leq K$ for alle c med avstand $\leq |x - \alpha|$ til α .

Videre følger det av sekantteoremet (side 133) at det finnes en c med avstand $\leq |x - \alpha|$ til α , slik at $\frac{(F(x) - F(\alpha))}{x - \alpha} = F'(c)$.

Det betyr at $|F(x) - F(\alpha)| = |F(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|$. Det vil si, $F(x)$ har mindre avstand til α enn x har.

Derfor må (av samme grunn) $|F \circ F(x) - \alpha| \leq K|F(x) - \alpha| \leq K^2|x - \alpha|$

og så videre. Siden $K^n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, må $F^{[n]}(x) \rightarrow \alpha$.

(v)

Vi ser først på fikspunktet nær $\frac{11 \cdot \text{Pi}}{16}$

```
> c := evalf( (11*Pi) / 16 )
```

```
> c := subs( x = c, x - (2*sin(x) - x) / (2*cos(x) - 1) )
```

```
> c := evalf( % )
```

```
> c := evalf( subs( x = c, x - (2*sin(x) - x) / (2*cos(x) - 1) ) )
```

(Vi bruker `subs` istedenfor å sette `x` lik verdien. Derved slipper vi å bruke `unassign('x')` etterpå.)

```
> c := evalf( subs( x = c, x - (2*sin(x) - x) / (2*cos(x) - 1) ) )
```

$\alpha \approx 1.895494$ er derfor en bedre approksimasjon til dette fikspunktet. På grunn av symmetrien er også $\alpha \approx -1.895494$ en bedre approksimasjon til fikspunktet nær $-\frac{11 \cdot \text{Pi}}{16}$.

For $\alpha = 0$ kan vi se hva som skjer om vi starter med $x = 0.5$

```
> c := 0.5
```

```

> c := evalf( subs( x = c, x - (2*sin(x) - x) / (2*cos(x) - 1) ) )
=
> c := evalf( subs( x = c, x - (2*sin(x) - x) / (2*cos(x) - 1) ) )
=
> c := evalf( subs( x = c, x - (2*sin(x) - x) / (2*cos(x) - 1) ) )
=

```

Det gikk veldig fort mot null.

Oppgave 7.2.8.

a)

(i)

```

> unassign('x')
=

```

```

> F := x -> x - (x^2 - 4*x + 3) / (2*x - 4)
=

```

(ii)

```

> plot(x^2 - 4*x + 3, x = -1 .. 5)
=

```

Det er lett å kontrollere at de to nullpunktene til f (som vi skal finne ved Newtons metode) er $x = 1$ og $x = 3$.

(iii)

```

> diff(F(x), x)
=
> solve(% = 1, x)
=

```

└─ Likningen har altså bare komplekse røtter. $F'(x) = 1$ kan derfor ikke inntreffe for noen reell x .

```
> solve( ( 2 (x^2 - 4 x + 3) ) / (2 x - 4)^2 = -1, x )
```

```
> plot( ( 2 (x^2 - 4 x + 3) ) / (2 x - 4)^2, x = 0..4 )
```

Det er klart at $F'(x)$ er kontinuerlig for alle $x \neq 2$, og at $f(x)$ bare har de to fikspunktene 1 og 3.

Jeg foreslår derfor intervalletne $\left(-\infty, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ og $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right)$.

Som en liten kontroll ser jeg hva som skjer om jeg starter med $x = 50$: (jeg skriver 50.0 for jeg vil ikke ha eksakte svar, jeg vil ha svar på desimalform!)

```
> x := 50.
```

```
> for n from 1 to 20 do x := x - (x^2 - 4 x + 3) / (2 x - 4) end do
```

Det ser bra ut. Og starter jeg med $x = -50$, får jeg også svar som forventet:

```
> x := -50.0
```

```
> for n from 1 to 20 do x := x - (x^2 - 4 x + 3) / (2 x - 4) end do
```

Oppgave 7.2.9.

b)

```
> unassign('x')
```

```
> plot([x^3 - 8 x^2 - x + 1, x], x = - 1/2 .. 1/2)
```

Det er klart at $y = x$ i alle punktene på den blå linjen, og at $y = f(x)$ i alle punktene på den røde kurven. I skjæringspunktene holder begge disse to likhetene. Det vil si, $y = f(x) = x$.

(ii)

```
> diff(x^3 - 8 x^2 - x + 1, x)
```

```
> plot(%, x = - 1/2 .. 1/2)
```

Kurven viser at begge fikspunktene er frastøtende.

Oppgave 7.4.12

Kommandoen `taylor` gir starten på taylorrekken om et gitt punkt til en gitt funksjon.

A.

$$\begin{aligned} &> \text{taylor}\left(\frac{1}{1-x}, x=0, 20\right) \\ &1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + O(x^{20}) \end{aligned} \quad (1)$$

Tallet 20 er en angivelse av hvor mange ledd vi vil ha med av rekken. Legg merke til at det betyr at leddet av grad 20 er det første leddet som ikke kommer med.

Vi har også et annet alternativ, nemlig kommandoen `series`.

B.

$$\begin{aligned} &> \text{taylor}(\exp(x), x=0, 20) \\ &1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10} \\ &+ \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{479001600}x^{12} + \frac{1}{6227020800}x^{13} + \frac{1}{87178291200}x^{14} + \frac{1}{1307674368000}x^{15} \\ &+ \frac{1}{20922789888000}x^{16} + \frac{1}{355687428096000}x^{17} + \frac{1}{6402373705728000}x^{18} + \frac{1}{121645100408832000}x^{19} + O(x^{20}) \end{aligned} \quad (2)$$

C.

$$\begin{aligned} &> \text{taylor}(\sin(x), x=0, 20) \\ &x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15} \\ &+ \frac{1}{355687428096000}x^{17} - \frac{1}{121645100408832000}x^{19} + O(x^{21}) \end{aligned} \quad (3)$$



Oppgave 7.4.12

Kommandoen `taylor` gir starten på taylorrekken om et gitt punkt til en gitt funksjon.

A.

```
[> taylor(1/(1-x), x=0, 20)
```

Tallet 20 er en angivelse av hvor mange ledd vi vil ha med av rekken. Legg merke til at det betyr at leddet av grad 20 er det første leddet som ikke kommer med.

Vi har også et annet alternativ, nemlig kommandoen `series`.

B.

```
[> taylor(exp(x), x=0, 20)
```

C.

```
[> taylor(sin(x), x=0, 20)
```

```
[>
```

Oppgave 7.5.14

a)

$$> \text{sum}\left(\frac{1}{n^2}, n = 1 \dots \text{infinity}\right)$$

$$\frac{1}{6} \pi^2 \quad (1)$$

Hvis du heller vil bruke symbolet ∞ istedenfor å skrive *infinity*, finner du det i skuffen Common Symbols i venstre marg

$$> \text{sum}\left(\frac{1}{n^2}, n = 1 \dots \infty\right)$$

$$\frac{1}{6} \pi^2 \quad (2)$$

d)

$$> \text{sum}\left(\frac{n \cdot x^n}{n + 1}, n = 0 \dots \infty\right)$$

$$\frac{1}{2} x \left(-\frac{2}{x(x-1)} + \frac{2 \ln(-x+1)}{x^2} \right) \quad (3)$$

$$> \text{simplify}(\%)$$

$$\frac{\ln(-x+1) x - \ln(-x+1) - x}{x(x-1)} \quad (4)$$

>

Oppgave 7.5.14

a)

$$\text{> sum}\left(\frac{1}{n^2}, n = 1 \dots \text{infinity}\right)$$

Hvis du heller vil bruke symbolet ∞ istedenfor å skrive *infinity*, finner du det i skuffen Common Symbols i venstre marg

$$\text{> sum}\left(\frac{1}{n^2}, n = 1 \dots \infty\right)$$

d)

$$\text{> sum}\left(\frac{n \cdot x^n}{n + 1}, n = 0 \dots \infty\right)$$

$$\text{> simplify}(\%)$$

>

Oppgave 7.6.14.

a)

Det er ikke godt å vite hvor mange av de første leddene som blir null, så jeg starter med å tenke $y(x)$ som en delsum av en ukjent potensrekke. Spesielt skal Maple forstå at $y(x)$ er en funksjon, så jeg definerer $y(x)$ som en funksjon:

$$\begin{aligned} > y := x \rightarrow a[0] + a[1] \cdot x + a[2] \cdot x^2 + a[3] \cdot x^3 + a[4] \cdot x^4 + a[5] \cdot x^5 + a[6] \cdot x^6 + a[7] \cdot x^7 + a[8] \cdot x^8 + a[9] \cdot x^9 + a[10] \cdot x^{10} \\ & \quad y := x \rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9 + a_{10} x^{10} \end{aligned} \quad (1)$$

Uttryket på venstre side av differensiallikningen er derved

$$\begin{aligned} > diff(y(x), x, x) + x \cdot diff(y(x), x) + x^2 \cdot y(x) \\ & 90 x^8 a_{10} + 72 x^7 a_9 + 56 x^6 a_8 + 42 x^5 a_7 + 30 x^4 a_6 + 20 x^3 a_5 + 12 x^2 a_4 + 6 x a_3 + 2 a_2 + x (10 x^9 a_{10} + 9 x^8 a_9 + 8 x^7 a_8 \\ & \quad + 7 x^6 a_7 + 6 x^5 a_6 + 5 x^4 a_5 + 4 x^3 a_4 + 3 x^2 a_3 + 2 x a_2 + a_1) + x^2 (x^{10} a_{10} + x^9 a_9 + x^8 a_8 + x^7 a_7 + x^6 a_6 + x^5 a_5 \\ & \quad + x^4 a_4 + x^3 a_3 + x^2 a_2 + x a_1 + a_0) \end{aligned} \quad (2)$$

Dette er et polynom av grad 10. Vi vil gjerne ha leddene sortert etter grad.

Det gjør vi enklest ved å "utvikle polynomet i en potensrekke om origo", enten ved å bruke kommandoen *taylor*, eller like gjerne kommandoen *series* :

$$\begin{aligned} > series(\%, x = 0, 12) \\ & 2 a_2 + (6 a_3 + a_1) x + (12 a_4 + 2 a_2 + a_0) x^2 + (20 a_5 + 3 a_3 + a_1) x^3 + (30 a_6 + 4 a_4 + a_2) x^4 + (42 a_7 + 5 a_5 + a_3) x^5 \\ & \quad + (56 a_8 + 6 a_6 + a_4) x^6 + (72 a_9 + 7 a_7 + a_5) x^7 + (90 a_{10} + 8 a_8 + a_6) x^8 + (9 a_9 + a_7) x^9 + (10 a_{10} + a_8) x^{10} \\ & \quad + a_9 x^{11} + O(x^{12}) \end{aligned} \quad (3)$$

Dette skal sammenlignes ledd for ledd med rekkeutviklingen av $f(x)$ om origo

$$> \text{series} \left(\frac{(1-x)}{1+x^2}, x=0, 12 \right)$$

$$1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + x^7 + x^8 - x^9 - x^{10} + x^{11} + O(x^{12})$$

(4)

Så er det selve sammenligningen. Vi starter med leddet av grad null, og jobber oss oppover til vi har nok:

$$x^0: \quad 2a_2 = 1 \quad \text{gir at} \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$x^1: \quad 6a_3 + a_1 = -1 \quad \text{gir at} \quad a_3 = -\frac{1}{6} - \frac{a_1}{6},$$

$$x^2: \quad 12a_4 + a_0 + 2a_2 = 12a_4 + a_0 + 1 = -1 \quad \text{gir at} \quad a_4 = -\frac{(2+a_0)}{12}$$

$$x^3: \quad 20a_5 + a_1 + 3a_3 = 20a_5 + a_1 + 3\left(-\frac{1}{6} - \frac{a_1}{6}\right) = 1 \quad \text{gir at} \quad a_5 = \frac{\left(1 - a_1 + \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2}\right)}{20} = \frac{(3-a_1)}{40}$$

Derved har vi det vi trenger. a_0 og a_1 er vilkårlige konstanter, la oss kalle dem C og D . Da har vi at de fem første leddene av den generelle løsningen er

$$y(x) = C + Dx + \frac{1}{2}x^2 - \frac{(1+D)}{6}x^3 - \frac{(2+C)}{12}x^4 + \frac{(3-D)}{40}x^5 = C\left(1 - \frac{x^4}{12}\right) + D\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40}\right) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{40}.$$

Oppgave 7.6.14.

a)

Det er ikke godt å vite hvor mange av de første leddene som blir null, så jeg starter med å tenke $y(x)$ som en delsum av en ukjent potensrekke. Spesielt skal Maple forstå at $y(x)$ er en funksjon, så jeg definerer $y(x)$ som en funksjon:

```
> y := x → a[0] + a[1]·x + a[2]·x2 + a[3]·x3 + a[4]·x4 + a[5]·x5 + a[6]·x6 + a[7]·x7 + a[8]·x8 + a[9]·x9 + a[10]·x10
```

Uttryket på venstre side av differensiallikningen er derved

```
> diff(y(x), x, x) + x·diff(y(x), x) + x2·y(x)
```

Dette er et polynom av grad 10. Vi vil gjerne ha leddene sortert etter grad.

Det gjør vi enklest ved å "utvikle polynomet i en potensrekke om origo", enten ved å bruke kommandoen *taylor*, eller like gjerne kommandoen *series* :

```
> series(%, x = 0, 12)
```

Dette skal sammenlignes ledd for ledd med rekkeutviklingen av $f(x)$ om origo

```
> series( (1 - x) / (1 + x2), x = 0, 12 )
```

```
>
```

Så er det selve sammenligningen. Vi starter med leddet av grad null, og jobber oss oppover til vi har nok:

$$x^0: \quad 2a_2 = 1 \quad \text{gir at} \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$x^1: \quad 6a_3 + a_1 = -1 \quad \text{gir at} \quad a_3 = -\frac{1}{6} - \frac{a(1)}{6},$$

$$x^2 : \quad 12 a_4 + a_0 + 2 a_2 = 12 a_4 + a_0 + 1 = -1 \quad \text{gir at} \quad a_4 = -\frac{(2 + a_0)}{12}$$

$$x^3 : \quad 20 a_5 + a_1 + 3 a_3 = 20 a_5 + a_1 + 3 \left(-\frac{1}{6} - \frac{a_1}{6} \right) = 1 \quad \text{gir at} \quad a_5 = \frac{\left(1 - a_1 + \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2} \right)}{20} = \frac{(3 - a_1)}{40}$$

Derved har vi det vi trenger. a_0 og a_1 er vilkårlige konstanter, la oss kalle dem C og D . Da har vi at de fem første leddene av den generelle løsningen er

$$y(x) = C + D x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{(1 + D)}{6} x^3 - \frac{(2 + C)}{12} x^4 + \frac{(3 - D)}{40} x^5 = C \left(1 - \frac{x^4}{12} \right) + D \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} \right) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{3 x^5}{40}.$$

For å regne med vektorer, henter vi inn Maples spesielle kommandoer for vektorregning:

```
> with(LinearAlgebra)
[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CARE,
CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace,
CompanionMatrix, CompressedSparseForm, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation,
CrossProduct, DARE, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct,
EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, FromCompressedSparseForm,
FromSplitForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape,
GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix,
HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix,
JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUDecomposition, LeastSquares, LinearSolve, LyapunovSolve, Map, Map2,
MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower,
MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize,
NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, ProjectionMatrix, QRDecomposition, RandomMatrix,
RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace,
ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, SplitForm, StronglyConnectedBlocks,
SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, SylvesterSolve, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm,
UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix,
ZeroVector, Zip]
```

(1)

Oppgave 8.1.24.

a)

```
> <17.3, π, 19> + <-17, -3.7, e>
```

$$\begin{bmatrix} 0.3 \\ \pi - 3.7 \\ 19 + e \end{bmatrix}$$

(2)

Legg merke til hvordan vi skriver inn vektorer, og hvordan vi regner med dem

Maple skriver svaret som en vektor på høykant. Vektoren er altså den samme som $\langle 0.3, \pi - 3.7, 19 + e \rangle$

Legg også merke til at Maple ikke regner med desimaltall selv om noen av leddene er skrevet inn som desimaltall

Vil man heller ha desimaltall, får vi til det på vanlig måte, for eksempel

> evalf(%, 30)

$$\begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.55840734641020676153735661672 \\ 21.7182818284590452353602874714 \end{bmatrix}$$

(3)

eller, hvis vi er fornøyd med Maples 10 sikre sifre:

> evalf(%)

$$\begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.5584073464 \\ 21.71828183 \end{bmatrix}$$

(4)

> $\langle 17.3, \pi, 19 \rangle - \langle -17, -3.7, e \rangle$

$$\begin{bmatrix} 34.3 \\ \pi + 3.7 \\ 19 - e \end{bmatrix}$$

(5)

> evalf(%)

$$\begin{bmatrix} 34.3 \\ 6.841592654 \\ 16.28171817 \end{bmatrix}$$

(6)

> $\langle 17.3, \pi, 19 \rangle \cdot \langle -17, -3.7, e \rangle$

Error, (in rtable/Product) invalid arguments

Æsj da. Vi fikk feilemlding. Så enkelt var det altså ikke å beregne skalare vektorprodukter.

Det vi skal skrive er

```
> DotProduct(⟨17.3, π, 19⟩, ⟨-17, -3.7, e⟩)
```

```
-294.1 - 3.7 π + 19 e
```

(7)

```
> evalf(%)
```

```
-254.0765381
```

(8)

b)

Det finnes ingen slik konstant c fordi de to vektorene ikke er parallelle.

```
>
```

For å regne med vektorer, henter vi inn Maples spesielle kommandoer for vektorregning:

```
> with(LinearAlgebra)
```

Oppgave 8.1.24.

a)

```
> <17.3, π, 19> + <-17, -3.7, e>
```

Legg merke til hvordan vi skriver inn vektorer, og hvordan vi regner med dem

Maple skriver svaret som en vektor på høykant. Vektoren er altså den samme som $\langle 0.3, \pi - 3.7, 19 + e \rangle$

Legg også merke til at Maple ikke regner med desimaltall selv om noen av leddene er skrevet inn som desimaltall

Vil man heller ha desimaltall, får vi til det på vanlig måte, for eksempel

```
> evalf(%, 30)
```

eller, hvis vi er fornøyd med Maples 10 sikre sifre:

```
> evalf(%)
```

```
> <17.3, π, 19> - <-17, -3.7, e>
```

```
> evalf(%)
```

```
> <17.3, π, 19> · <-17, -3.7, e>
```

Æsj da. Vi fikk feilemlding. Så enkelt var det altså ikke å beregne skalare vektorprodukter.

Det vi skal skrive er

```
> DotProduct(<17.3, π, 19>, <-17, -3.7, e>)
```

```
> evalf(%)
```

b)

Det finnes ingen slik konstant c fordi de to vektorene ikke er parallelle.



Som i kapittel 8.1 må vi hente inn Maplekommandoer for lineær algebra:

```
> with(LinearAlgebra)
[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CARE,
CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace,
CompanionMatrix, CompressedSparseForm, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation,
CrossProduct, DARE, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct,
EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, FromCompressedSparseForm,
FromSplitForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape,
GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix,
HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix,
JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUdecomposition, LeastSquares, LinearSolve, LyapunovSolve, Map, Map2,
MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower,
MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize,
NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, ProjectionMatrix, QRdecomposition, RandomMatrix,
RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace,
ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, SplitForm, StronglyConnectedBlocks,
SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, SylvesterSolve, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm,
UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix,
ZeroVector, Zip]
```

(1

Oppgave 8.2.13.

a)

Vi vet hvordan vektorer skrives, nemlig med parenteser $\langle \dots \rangle$ for søylevektorer og $[\dots]$ for linjevektorer. Men i denne oppgaven trenger vi å skrive inn og beregne determinanter. Det gjør vi ved først å skrive inn matrisen til determinanten, altså ved å gi de tre linjene som vektorer:

```
> M := Matrix([ [π, 13.7, 64], [38, -17, 56.8], [3, -2, e] ])
```

$$M := \begin{bmatrix} \pi & 13.7 & 64 \\ 38 & -17 & 56.8 \\ 3 & -2 & e \end{bmatrix} \quad (2)$$

Legg merke til at det står en klammeparentes rundt de tre linjevektorene. Det er for å fortelle Maple at vi skal ha en vektor av linjevektorer. For å beregne determinanten til denne matrisen, skriver vi

> *Determinant*(M)

$$-17 \pi e + 113.6 \pi - 520.6 e + 734.48 \quad (3)$$

Hvis du heller vil ha svaret på desimalform, bruker vi *evalf* som vanlig, men husk å erstatte e med $\exp(1)$:

> *evalf*(%)

$$-574.0070751 e + 1091.364926 \quad (4)$$

Som vi ser, må vi faktisk erstatte e med $\exp(1)$ for å få et tallsvar:

> *evalf*(-574.0070751 $\exp(1)$ + 1091.364926)

$$-468.948075 \quad (5)$$

Oppgave 8.2.14.

a)

For å beregne skalprodukt, brukte vi kommandoen *DotProduct*. Ikke så overraskende da, at kryssproduktet skrives *CrossProduct*. Vi kan skrive inn vektorene som søylevektorer:

> *CrossProduct*($\langle 4, 19, 7 \rangle$, $\langle 2.1, 19, 58 \rangle$)

$$\begin{bmatrix} 969 \\ -217.3 \\ 36.1 \end{bmatrix}$$

(6

Da får vi svaret som en søylevektor.
Eller vi kan skrive inn vektorene som linjevektorer.
Da får vi svaret som en linjevektor:

> *CrossProduct*($[4, 19, 7]$, $[2.1, 19, 58]$)

$$\begin{bmatrix} 969 & -217.3 & 36.1 \end{bmatrix}$$

(7

>

Som i kapittel 8.1 må vi hente inn Maplekommandoer for lineær algebra:

```
> with(LinearAlgebra)
```

Oppgave 8.2.13.

a)

Vi vet hvordan vektorer skrives, nemlig med parenteser $\langle \dots \rangle$ for søylevektorer og $[\dots]$ for linjevektorer. Men i denne oppgaven trenger vi å skrive inn og beregne determinanter. Det gjør vi ved først å skrive inn matrisen til determinanten, altså ved å gi de tre linjene som vektorer:

```
> M := Matrix([ [π, 13.7, 64], [38, -17, 56.8], [3, -2, e] ])
```

Legg merke til at det står en klammeparentes rundt de tre linjevektorene. Det er for å fortelle Maple at vi skal ha en vektor av linjevektorer. For å beregne determinanten til denne matrisen, skriver vi

```
> Determinant(M)
```

Hvis du heller vil ha svaret på desimalform, bruker vi *evalf* som vanlig, men husk å erstatte e med $\exp(1)$:

```
> evalf(%)
```

Som vi ser, må vi faktisk erstatte e med $\exp(1)$ for å få et tallsvar:

```
> evalf(-574.0070751 exp(1) + 1091.364926)
```

Oppgave 8.2.14.

a)

For å beregne skalprodukt, brukte vi kommandoen *DotProduct*.
Ikke så overraskende da, at kryssproduktet skrives *CrossProduct*.
Vi kan skrive inn vektorene som søylevektorer:

```
> CrossProduct(⟨4, 19, 7⟩, ⟨2.1, 19, 58⟩)
```

```
=
```

Da får vi svaret som en søylevektor.
Eller vi kan skrive inn vektorene som linjevektorer.
Da får vi svaret som en linjevektor:

```
> CrossProduct([4, 19, 7], [2.1, 19, 58])
```

```
>
```

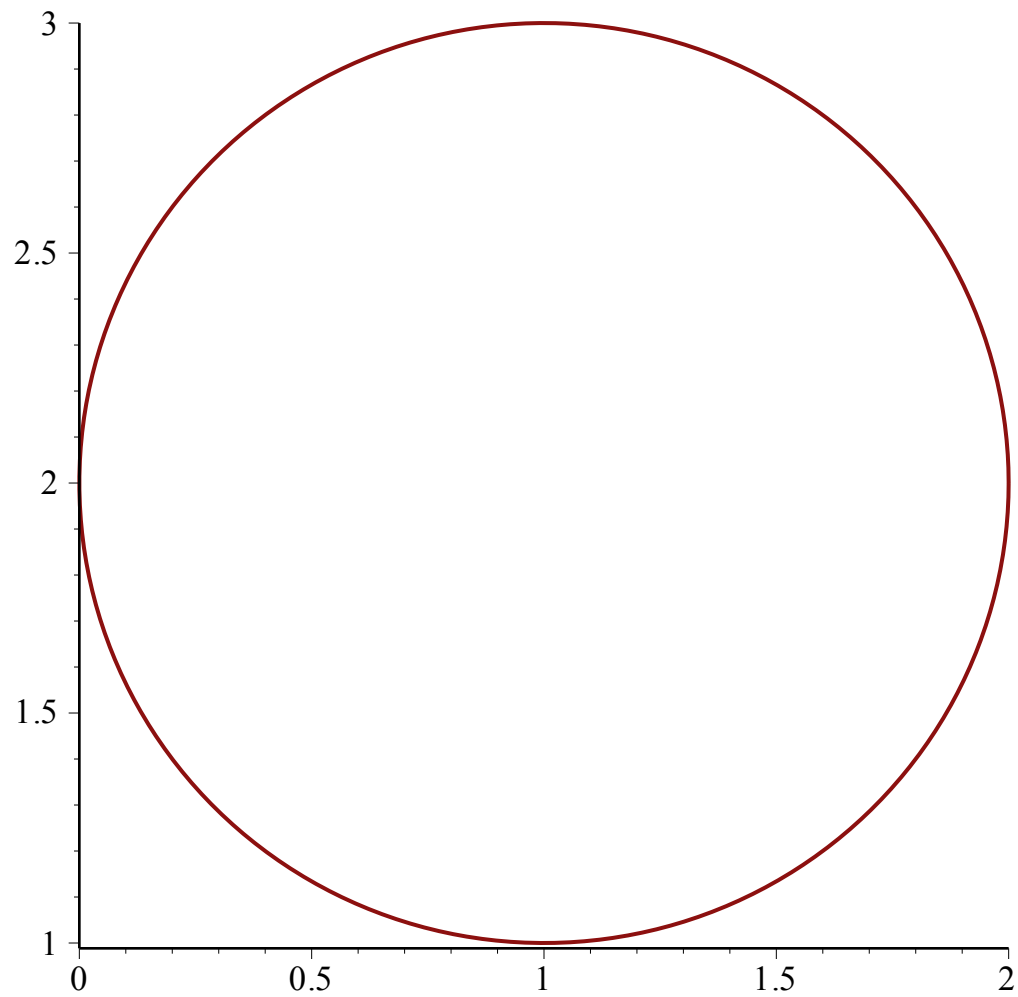
Oppgave 8.3.16.

a)

Å plote er kurve i planet, kan vi gjøre med kommandoen *plot*, også når kurven er gitt på parameterform.

Legg merke til hakeparentesen (en krølleparentes fungerer like godt)! Den sørger for at Maple skjønner at dette er en parametrisert kurve.

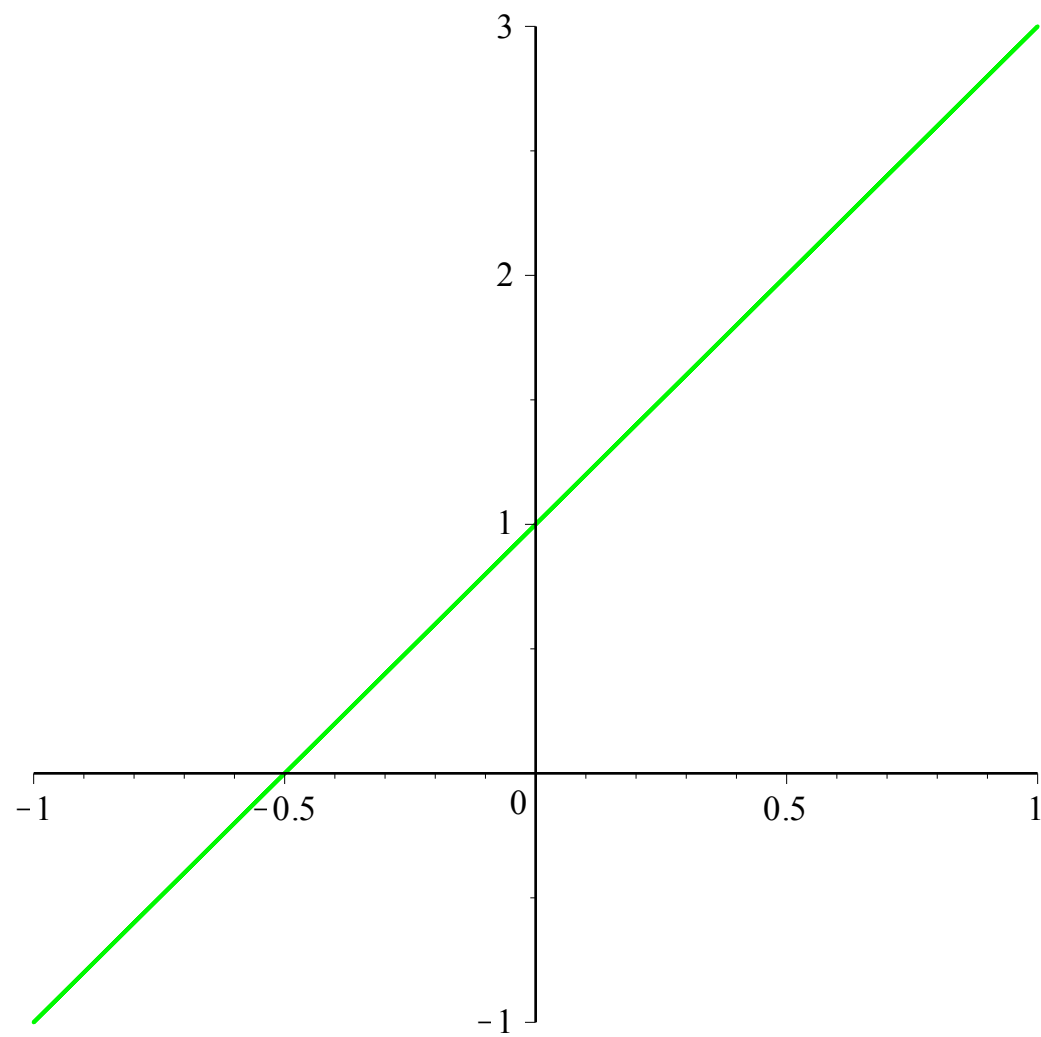
```
> plot([1 + cos(t), 2 + sin(t), t = 0 .. 2·Pi])
```



Skjønner du hvorfor kurven ble en sirkel med sentrum i $(1, 2)$ og radius 1?

b)

```
> plot([sin(t), 1 + 2·sin(t), t = 0 .. 2·Pi], color = green)
```



Skjønner du hvorfor kurven ble et rett linjestykke?

c)

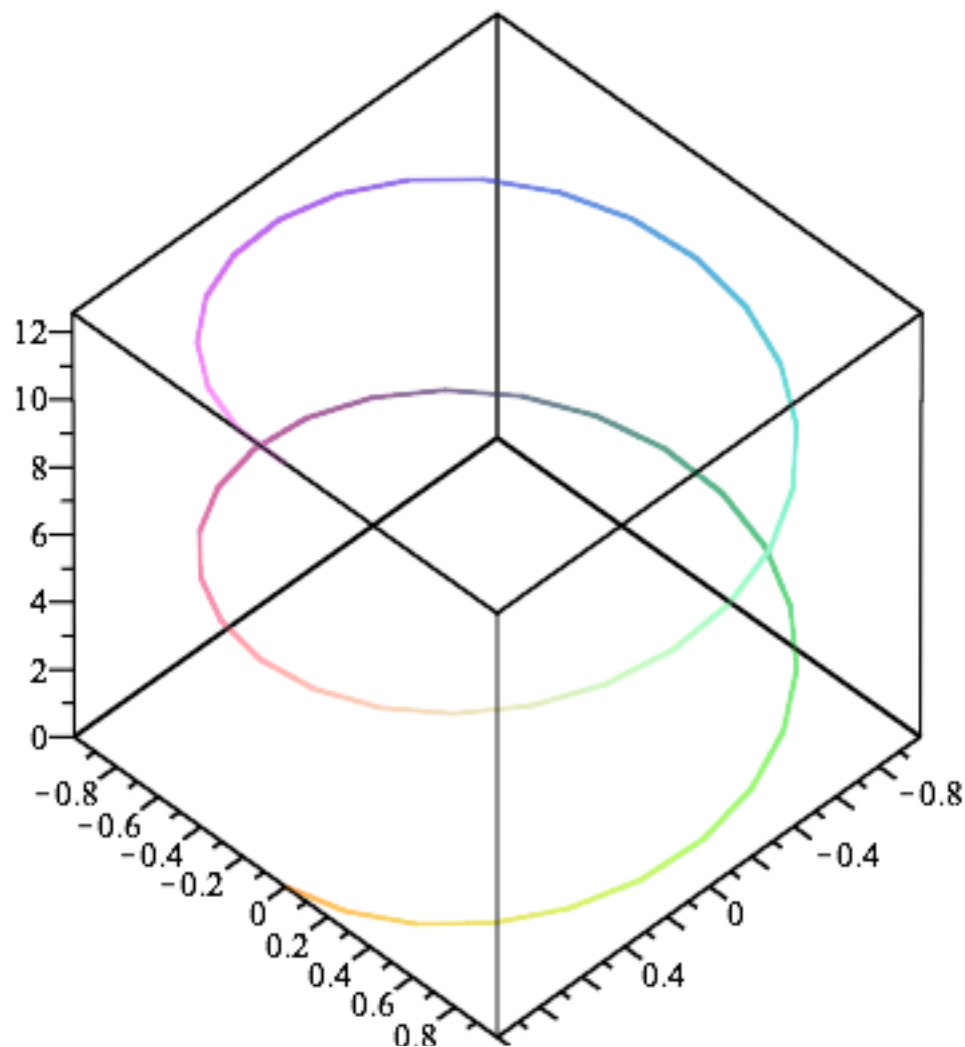
Å tegne en kurve i rommet, krever adskillig mer fra Maple.
Først og fremst må vi laste inn plottekommandoene til Maple:

```
> with(plots)  
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,  
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,  
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,  
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,  
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,  
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

(1

På denne listen over kommandoer Maple nå har adgang til, finner vi *spacecurve*. Den skal vi bruke.
Legg merke til klammeparentesen! (Her fungerer det ikke med krølleparentes.)

```
> spacecurve([cos(t), sin(t), t, t = 0..4·Pi])
```



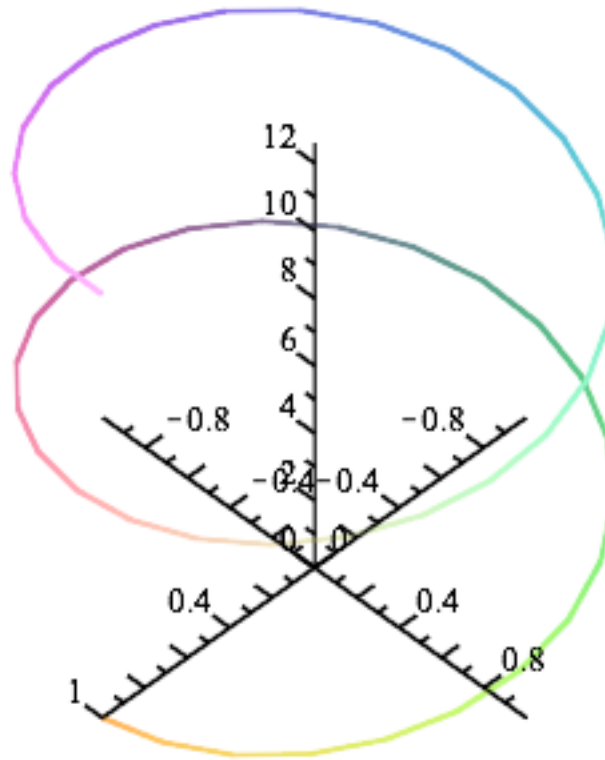
Den ga altså helixen i vakre farger.

Fargene er regnbuefargene, valgt slik at de starter med gult når parameteren t er i venstre ende av variasjonsintervallet, og øker på når t øker, til fiolett når t er i høyre ende av variasjonsintervallet.

Dette er til stor hjelp når vi trenger å vite hvor vi er på kurven for ulike verdier av parameteren.

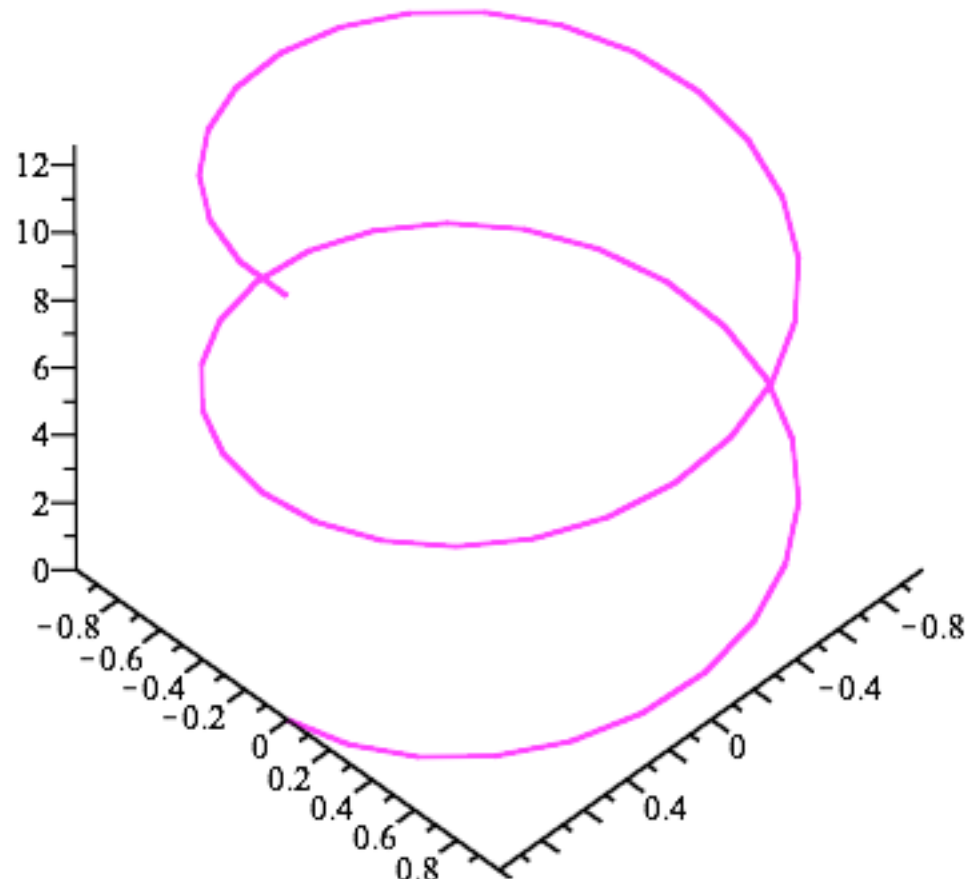
Men vi vil gjerne ha koordinatsystemet tegnet inn også. Det må vi spesifisere selv:

> `spacecurve([cos(t), sin(t), t], t = 0 .. 4·Pi, axes = normal)`



Vi kan også få aksene tegnet litt utenfor selve kurven, og velge en annen farge om vi vil:

> `spacecurve([cos(t), sin(t), t], t = 0 .. 4·Pi, axes = framed, color = magenta)`



Det kan ofte være nyttig å vri og snu på figuren for å se hvordan det ser ut fra andre synsvinkler.

Og det er lett:

Plasser cursoren på bildet

Da får cursoren form som en liten rund pil.

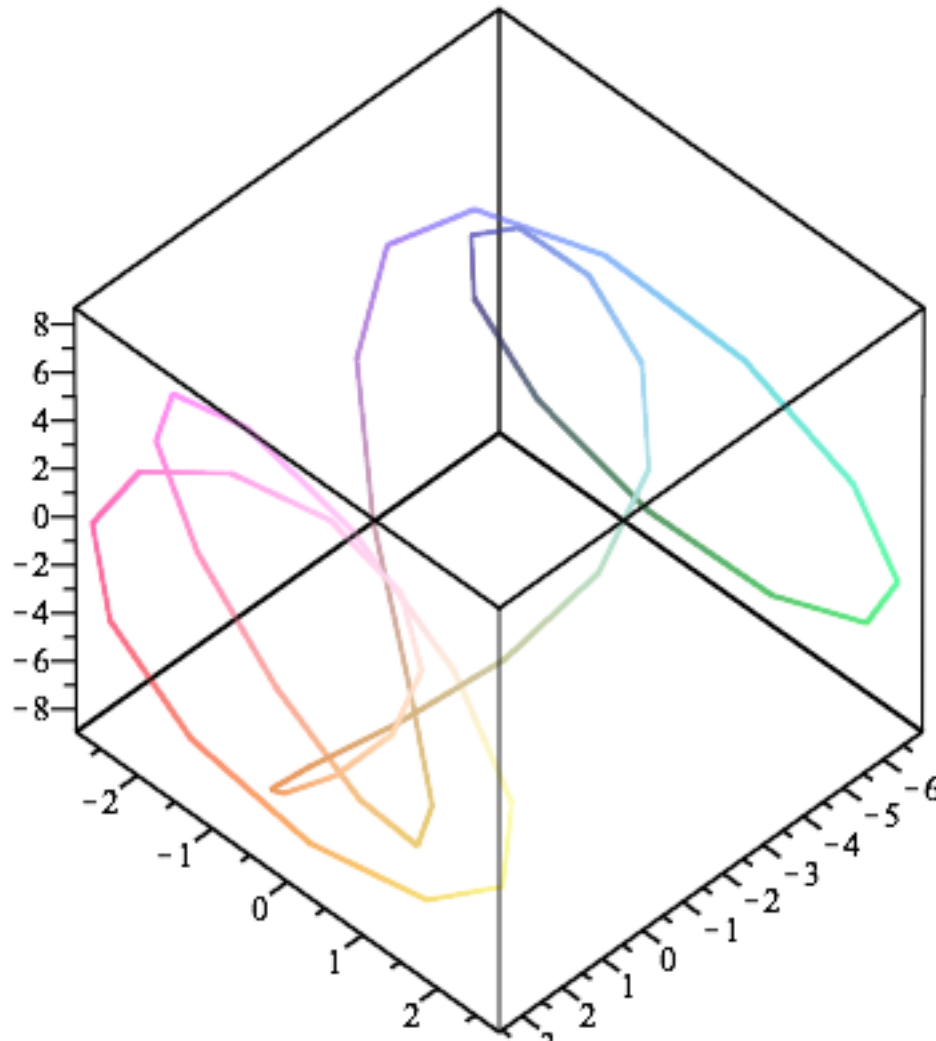
Venstreklikk og hold knappen inne. Når du da flytter på musen eller bruker en annen finger til å skli på padde, vrir bildet seg.

Alternativt:

- Klikk på bildet slik at det kommer en svart ramme rundt.
- Da kommer det opp en rekke nye tegn i kommandolinje 2 på arbeidsarket.
- Prøv dem ut og se hva de gjør med figuren. (Du kjenner sikkert igjen den krumme pilen der også.)

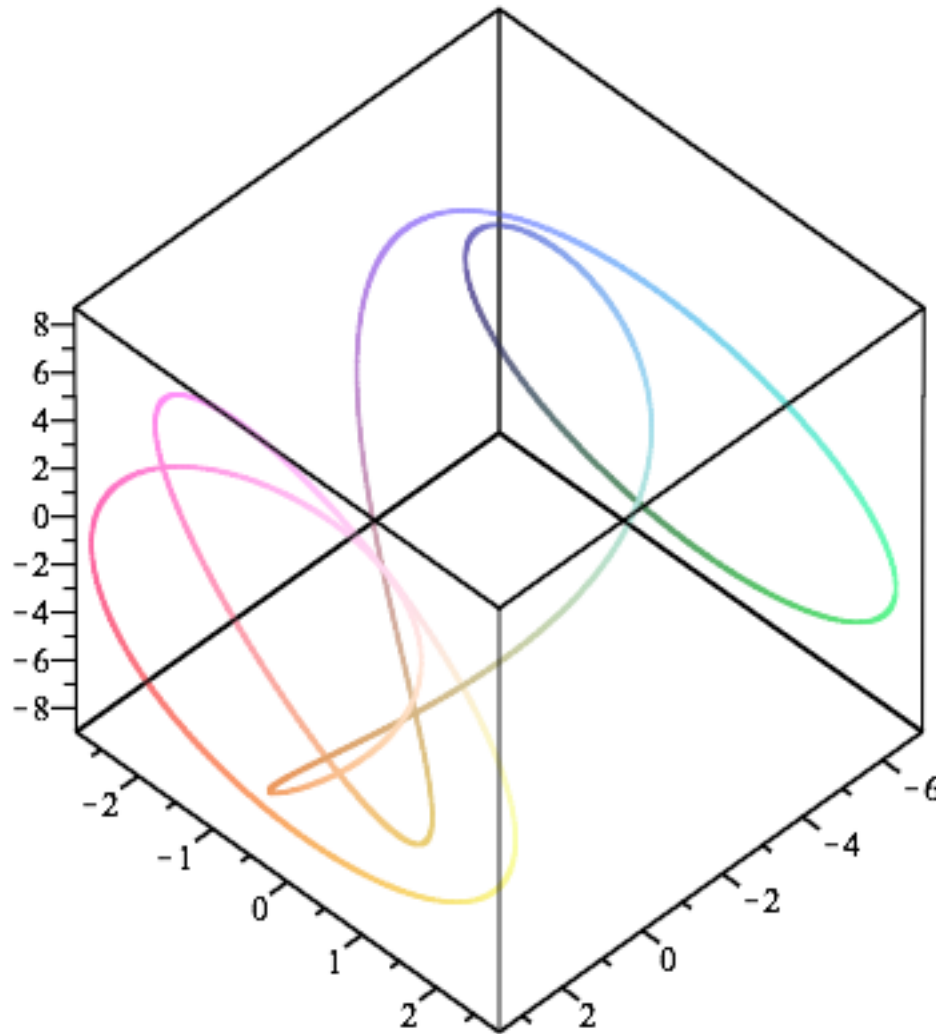
d)

> `spacecurve([5*cos(t) - 2*cos(2*t), sin(3*t) + 2*sin(5*t), sin(t) - 8*cos(4*t), t = 0 .. 2*Pi], axes = boxed)`



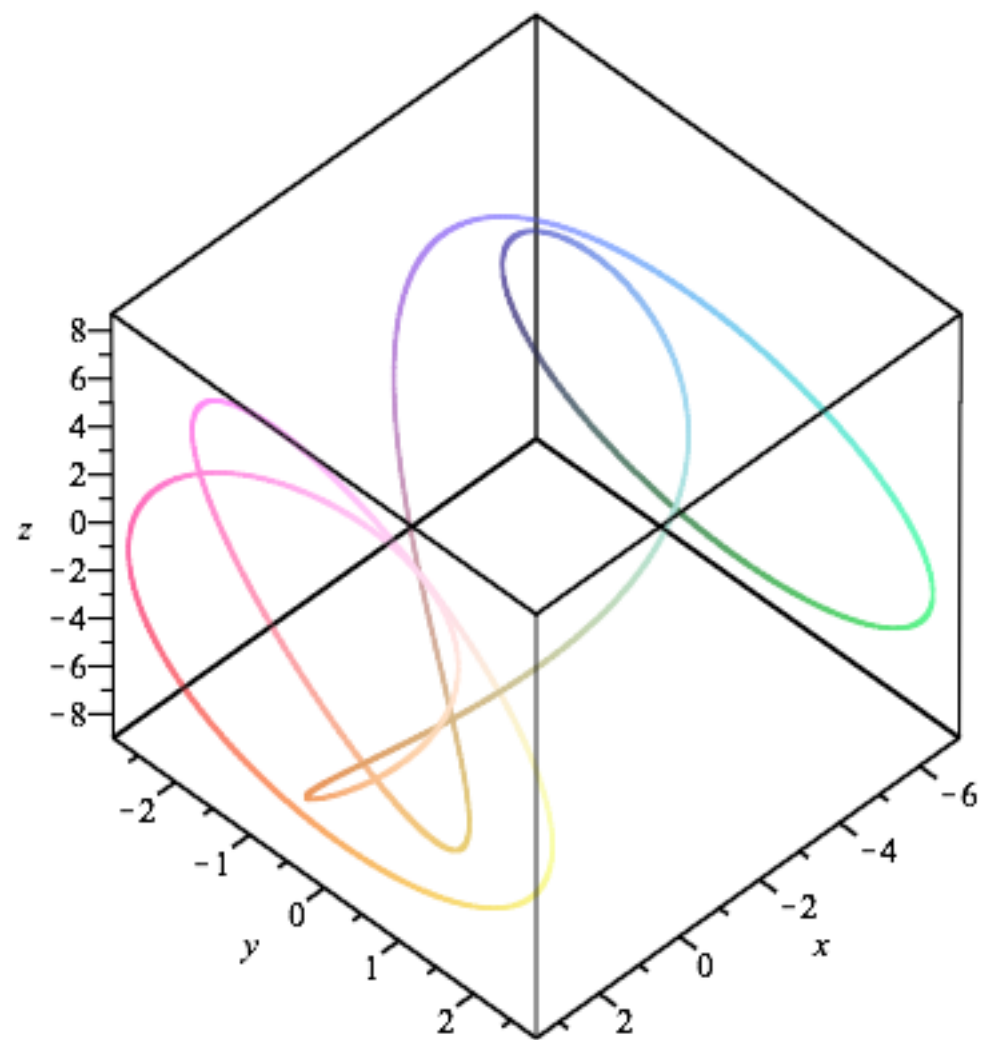
Kurven ble litt kantete. Dessverre fungerer ikke *gridrefine* (for Maple bruker ikke et nett til å tegne kurven). Men vi kan øke antall punkter i plottet:

> `spacecurve([5*cos(t) - 2*cos(2*t), sin(3*t) + 2*sin(5*t), sin(t) - 8*cos(4*t)], t = 0 .. 2*Pi, axes = boxed, numpoints = 1000)`



Det kunne også være kjekt å ha navn på aksene, spesielt når vi driver og roterer figuren:

➤ `spacecurve([5*cos(t) - 2*cos(2*t), sin(3*t) + 2*sin(5*t), sin(t) - 8*cos(4*t)], t = 0..2*Pi, axes = boxed, numpoints = 1000, labels = [x, y, z])`



>

Oppgave 8.3.16.

a)

Å plote er kurve i planet, kan vi gjøre med kommandoen *plot*, også når kurven er gitt på parameterform.

Legg merke til hakeparentesen (en krølleparentes fungerer like godt)! Den sørger for at Maple skjønner at dette er en parametrisert kurve.

```
> plot([1 + cos(t), 2 + sin(t), t = 0 .. 2·Pi])
```

Skjønner du hvorfor kurven ble en sirkel med sentrum i (1,2) og radius 1?

b)

```
> plot([sin(t), 1 + 2·sin(t), t = 0 .. 2·Pi], color = green)
```

Skjønner du hvorfor kurven ble et rett linjestykke?

c)

Å tegne en kurve i rommet, krever adskillig mer fra Maple.

Først og fremst må vi laste inn plottekommandoene til Maple:

```
> with(plots)
```

På denne listen over kommandoer Maple nå har adgang til, finner vi *spacecurve*. Den skal vi bruke.

Legg merke til klammeparentesen! (Her fungerer det ikke med krølleparentes.)

```
> spacecurve([cos(t), sin(t), t, t = 0 .. 4·Pi])
```

Den ga altså helixen i vakre farger.

Fargene er regnbuefargene, valgt slik at de starter med gult når parameteren t er i venstre ende av variasjonsintervallet, og øker på når t øker, til fiolett når t er i høyre ende av variasjonsintervallet.

Dette er til stor hjelp når vi trenger å vite hvor vi er på kurven for ulike verdier av parameteren.

Men vi vil gjerne ha koordinatsystemet tegnet inn også. Det må vi spesifisere selv:

```
> spacecurve([cos(t), sin(t), t], t = 0 .. 4·Pi, axes = normal)
```

Vi kan også få aksene tegnet litt utenfor selve kurven, og velge en annen farge om vi vil:

```
> spacecurve([cos(t), sin(t), t], t = 0 .. 4·Pi, axes = framed, color = magenta)
```

Det kan ofte være nyttig å vri og snu på figuren for å se hvordan det ser ut fra andre synsvinkler.

Og det er lett:

Plasser cursoren på bildet

Da får cursoren form som en liten rund pil.

Venstreklikk og hold knappen inne. Når du da flytter på musen eller bruker en annen finger til å skli på padden, vrir bildet seg.

Alternativt:

- Klikk på bildet slik at det kommer en svart ramme rundt.
- Da kommer det opp en rekke nye tegn i kommandolinje 2 på arbeidsarket.
- Prøv dem ut og se hva de gjør med figuren. (Du kjenner sikkert igjen den krumme pilen der også.)

d)

```
> spacecurve([5·cos(t) - 2·cos(2·t), sin(3·t) + 2·sin(5·t), sin(t) - 8·cos(4·t)], t = 0 .. 2·Pi, axes = boxed)
```

Kurven ble litt kantete. Dessverre fungerer ikke *gridrefine* (for Maple bruker ikke et nett til å tegne kurven).

Men vi kan øke antall punkter i plottet:

```
> spacecurve([5*cos(t) - 2*cos(2*t), sin(3*t) + 2*sin(5*t), sin(t) - 8*cos(4*t)], t = 0 .. 2*Pi, axes = boxed, numpoints = 1000)
```

Det kunne også være kjekt å ha navn på aksene, spesielt når vi driver og roterer figuren:

```
> spacecurve([5*cos(t) - 2*cos(2*t), sin(3*t) + 2*sin(5*t), sin(t) - 8*cos(4*t)], t = 0 .. 2*Pi, axes = boxed, numpoints = 1000,  
labels = [x, y, z])
```

```
>
```

Oppgave 8.5.10

a)

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\cos(t)^2 + 4 \cos(2t)^2} dt$, blir buelengden lik integralet $\int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t + 4 \cos^2 2t} dt$

Vi lar Maple beregne dette integralet:

> int(sqrt(cos(t)^2 + 4*cos(2*t)^2), t=0..Pi)

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\cos(t)^2 + 4 \cos(2t)^2} dt$$

(1)

Dette klarte ikke Maple å beregne eksakt. Vi ber derfor om en tilnærmet løsning:

> evalf(int(sqrt(cos(t)^2 + 4*cos(2*t)^2), t=0..Pi))

4.714715648

(2)

b)

Det foregår på tilsvarende måte når kurven er en romkurve.

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + (\sec(t)^2)^2 + 1^2} dt$, blir buelengden lik

integralet $\int_{t=0}^1 \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + (\sec(t)^2)^2 + 1^2} dt$.

Vi lar Maple beregne dette integralet:

> $\text{int}\left(\text{sqrt}\left(\frac{1}{(1+t^2)^2} + \sec(t)^4 + 1\right), t=0..1\right)$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(t^2+1)^2} + \sec(t)^4 + 1} dt$$

(3)

Ikke så uventet klarte Maple heller ikke å beregne dette integralet eksakt. Vi bruker derfor *evalf*:

> *evalf*(%)

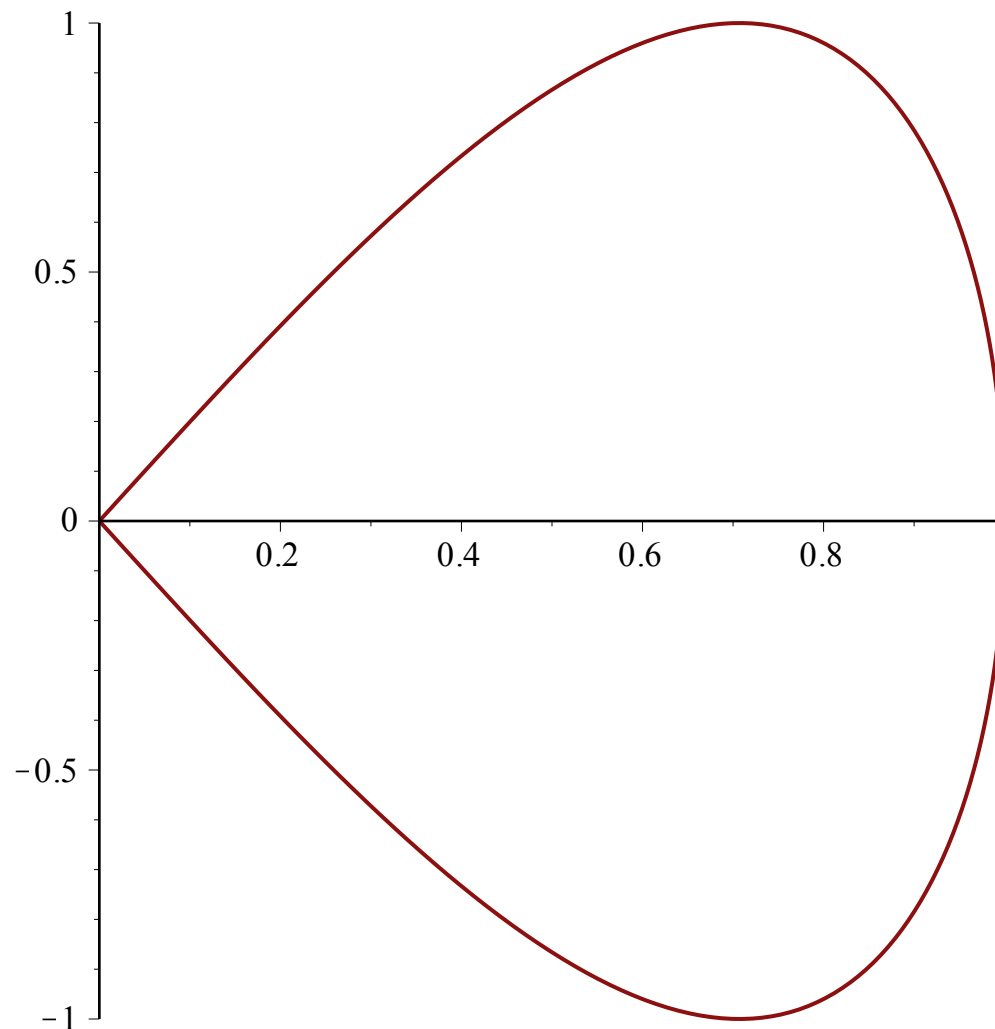
2.060112984

(4)

Oppgave 8.5.11

a)

> *plot*([sin(*t*), sin(2 *t*), *t* = 0..Pi])



Kurven er symmetrisk om x -aksen (på grunn av symmetrien til sinus).
 Vi kan derfor finne arealet av delen i øvre halvplan, for så å multiplisere med 2.
 Vi skal integrere $y \, dx = y(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \sin(2t) \cdot \cos(t) \, dt$, Arealet blir derfor

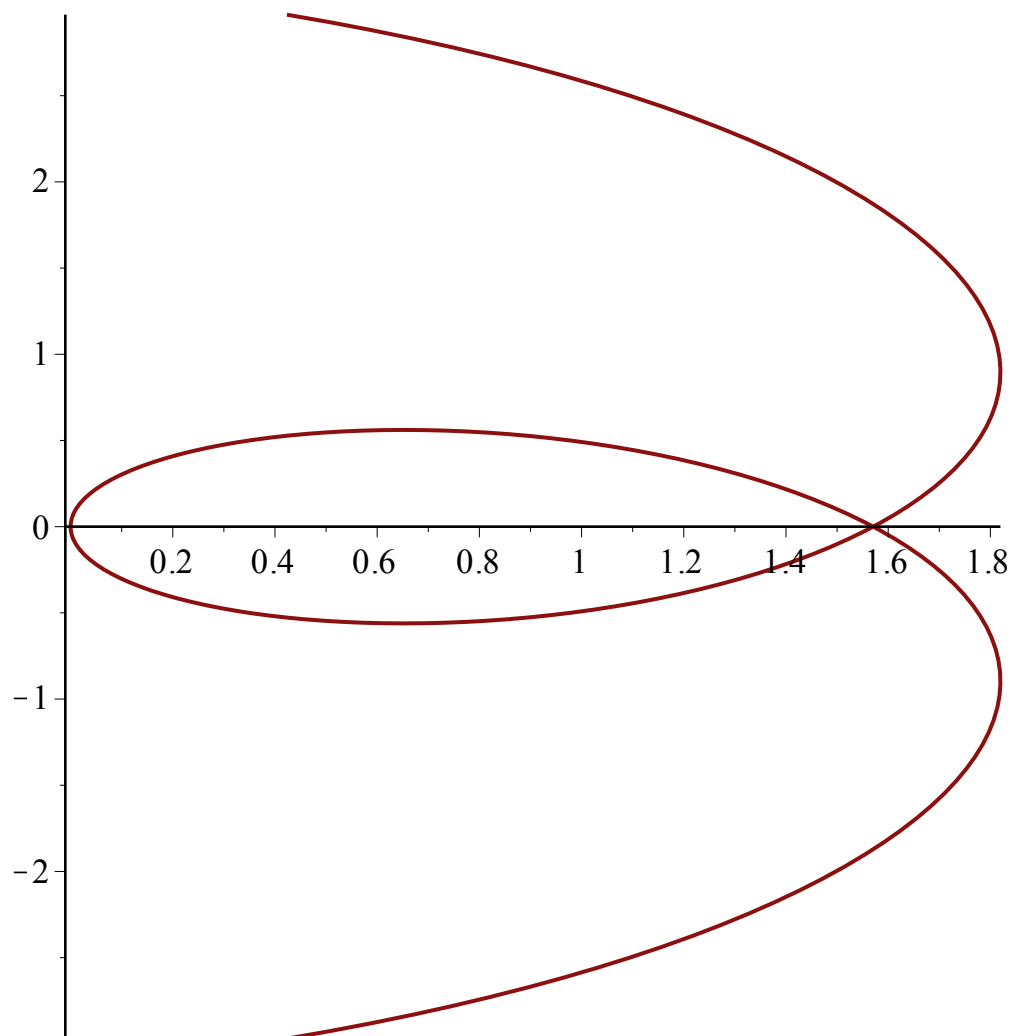
> $2 \cdot \text{int} \left(\sin(2t) \cdot \cos(t), t = 0 \dots \frac{\pi}{2} \right)$

$\frac{4}{3}$

(5

c)

> $\text{plot}([t \cdot \sin(t), t \cdot \cos(t), t = -3 \dots 3])$



Som i a) er kurven symmetrisk om x -aksen, så vi kan beregne arealet over x -aksen, og så multiplisere med 2.

Før vi kan regne ut arealet som avgrenses av kurven, trenger vi å finne verdien for parameteren t i origo og i skjæringspunktet nær $x=1.6$ på x -aksen.

I begge disse punktene er $y = 0$ (på grunn av symmetrien i de trigonometriske funksjonene).

Altså er $t \cdot \cos(t) = 0$ og $t \cdot \sin(t) \geq 0$ i disse to punktene. Det vil si, $t = 0$ og $t = \frac{\pi}{2}$.

Vi skal integrere $y \, dx = y(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = t \cdot \cos(t) \cdot (\sin(t) + t \cdot \cos(t)) \, dt$.

Arealet blir derfor

$$> 2 \cdot \int \left(t \cdot \cos(t) \cdot (\sin(t) + t \cdot \cos(t)), t = 0 \dots \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{1}{24} \pi^3$$

(6

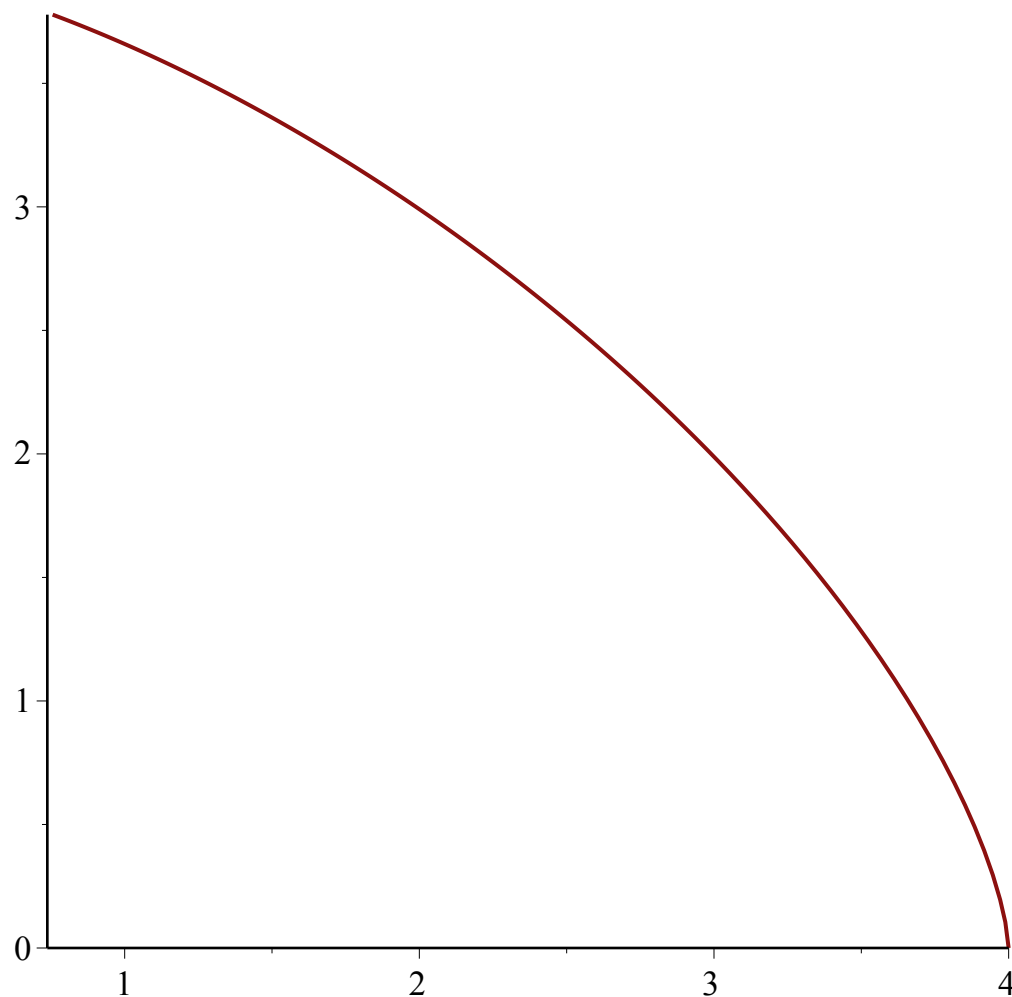
Oppgave 8.5.12.

a)

Setter vi $y = xt$ får likningen formen $x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 8$ som betyr at $x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}$, noe som gir parametriseringen

$$x = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad y = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot t$$

$$> \text{plot} \left(\left[\left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot t, t = 0 \dots 5 \right] \right)$$

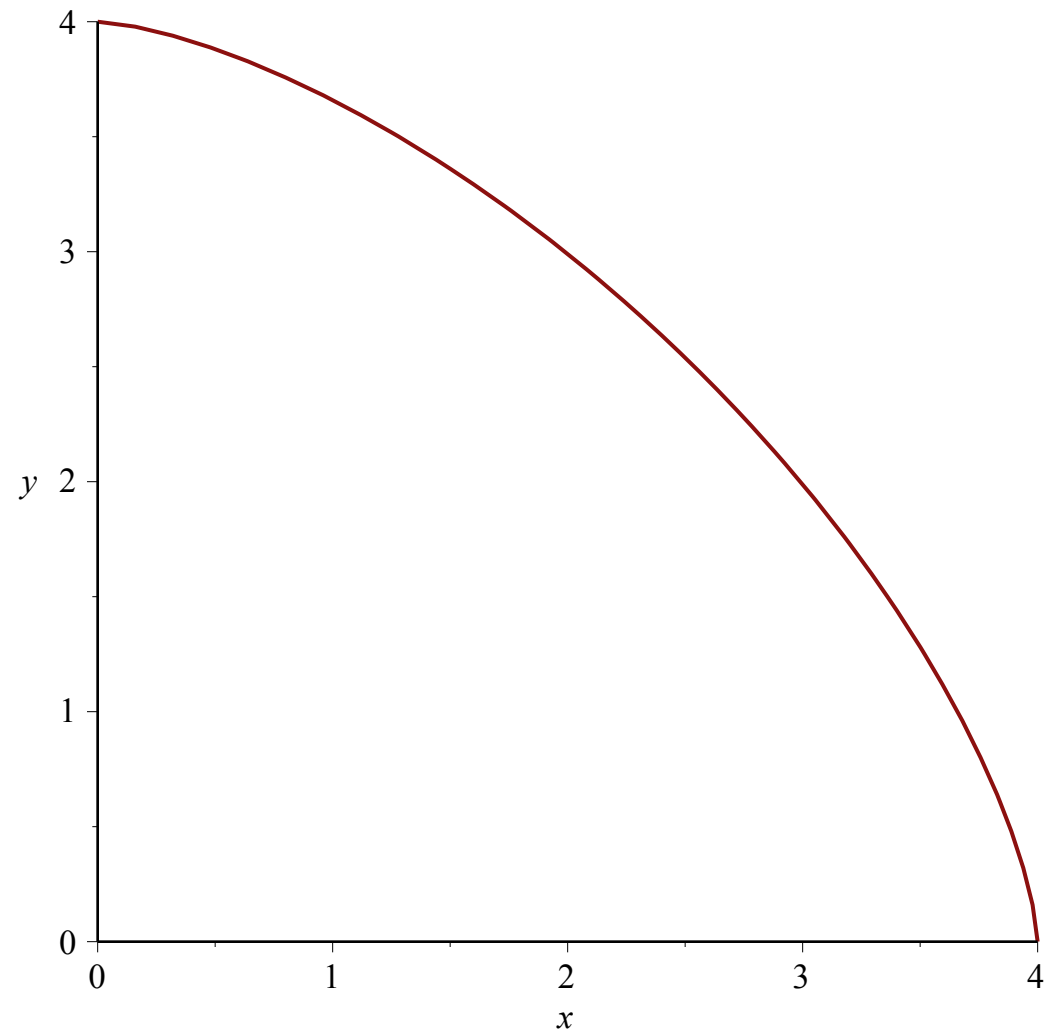


Til sammenligning kan vi bruke *implicitplot* til å tegne grafen til den gitte likningen

> *with(plots)*
[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,*

loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

> *implicitplot*($x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 8, x = 0..4, y = 0..4$)



>

Oppgave 8.5.10

a)

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\cos(t)^2 + 4 \cos(2t)^2} dt$, blir buelengden lik integralet $\int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t + 4 \cos^2 2t} dt$

Vi lar Maple beregne dette integralet:

```
> int(sqrt(cos(t)^2 + 4*cos(2*t)^2), t = 0 .. Pi)
```

Dette klarte ikke Maple å beregne eksakt. Vi ber derfor om en tilnærmet løsning:

```
> evalf(int(sqrt(cos(t)^2 + 4*cos(2*t)^2), t = 0 .. Pi))
```

b)

Det foregår på tilsvarende måte når kurven er en romkurve.

Siden $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + (\sec(t)^2)^2 + 1^2} dt$, blir buelengden lik integralet $\int_{t=0}^1 \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + (\sec(t)^2)^2 + 1^2} dt$.

Vi lar Maple beregne dette integralet:

```
> int(sqrt(1/(1+t^2)^2 + sec(t)^4 + 1), t = 0 .. 1)
```

Ikke så uventet klarte Maple heller ikke å beregne dette integralet eksakt. Vi bruker derfor *evalf*:

```
> evalf(%)
```

Oppgave 8.5.11

a)

```
> plot([sin(t), sin(2 t), t = 0 ..Pi])
```

Kurven er symmetrisk om x -aksen (på grunn av symmetrien til sinus).

Vi kan derfor finne arealet av delen i øvre halvplan, for så å multiplisere med 2.

Vi skal integrere $y \, dx = y(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \sin(2t) \cdot \cos(t) \, dt$, Arealet blir derfor

```
> 2·int(sin(2 t)·cos(t), t = 0 ..  $\frac{\text{Pi}}{2}$ )
```

c)

```
> plot([t·sin(t), t·cos(t), t = -3 ..3])
```

Som i a) er kurven symmetrisk om x -aksen, så vi kan beregne arealet over x -aksen, og så multiplisere med 2.

Før vi kan regne ut arealet som avgrenses av kurven, trenger vi å finne verdien for parameteren t i origo og i skjæringspunktet nær $x=1.6$ på x -aksen.

I begge disse punktene er $y = 0$ (på grunn av symmetrien i de trigonometriske funksjonene).

Altså er $t \cdot \cos(t) = 0$ og $t \cdot \sin(t) \geq 0$ i disse to punktene. Det vil si, $t = 0$ og

$$t = \frac{\pi}{2}.$$

Vi skal integrere $y \, dx = y(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = t \cdot \cos(t) \cdot (\sin(t) + t \cdot \cos(t)) \, dt$.

Arealet blir derfor

$$> 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos(t) \cdot (\sin(t) + t \cdot \cos(t)) \, dt$$

Oppgave 8.5.12.

a)

Setter vi $y = xt$ får likningen formen $x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 8$ som betyr at $x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}}$, noe som gir parametriseringen

$$x = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad y = \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot t$$

$$> \text{plot} \left(\left[\left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{8}{1 + t^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot t, t = 0 \dots 5 \right] \right)$$

Til sammenligning kan vi bruke *implicitplot* til å tegne grafen til den gitte likningen

> *with(plots)*

$$> \text{implicitplot} \left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 8, x = 0 \dots 4, y = 0 \dots 4 \right)$$

>

Oppgave 9.2.19

a)

Banen er en ellipse der solen ligger på hovedaksen, i et brennpunkt for ellipsen.

Vi vet at i ethvert punkt på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, der $a > b > 0$, er summen av avstandene til de to brennpunktene lik $2a$.

Avstanden mellom solen og ellipsens sentrum er $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Den korteste avstanden mellom Halleys komet og solen er $d = a - c$. (Se oppgave 9.2.10.)

Vi regner:

$$> c := \text{sqrt}\left(\left(\frac{5.39 \cdot 10^9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1.36 \cdot 10^9}{2}\right)^2\right)$$

$$c := 2.607800798 \cdot 10^9$$

(1)

$$> d := \frac{5.39 \cdot 10^9}{2} - c$$

$$d := 8.7199202 \cdot 10^7$$

(2)

Minste avstand til solen er altså cirka 87 millioner km.

b)

Vi legger ellipsen inn i et koordinatsystem med sentrum i origo og hovedaksen langs x -aksen.

Den har da likningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vi skriver den heller på parameterform: $x = a \cdot \cos(t)$, $y = b \cdot \sin(t)$ for $0 \leq t < 2\pi$.

Vi beregner buelengden til denne ellipsen ved å beregne lengden av delen i første kvadrant og multiplisere det hele med 4.

Det vil si, t går fra 0 til $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Buelengdedifferensialet er } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(-a \cdot \sin(t))^2 + (b \cdot \cos(t))^2} dt.$$

Buelengden er derfor

$$> L := 4 \cdot \text{int} \left(\text{sqrt} \left(\left(\frac{5.39 \cdot 10^9}{2} \cdot \sin(t) \right)^2 + \left(\frac{1.36 \cdot 10^9}{2} \cdot \cos(t) \right)^2 \right), t = 0 .. \frac{\text{Pi}}{2} \right)$$

$$L := 1.157097673 \cdot 10^{10}$$

(3)

Kometens bane har altså cirka lengde $L = 11.6$ milliarder km.

c)

Gjennomsnittshastigheten for kometen er

$$> \frac{\%}{76}$$

$$1.522496938 \cdot 10^8$$

(4)

altså ca 152 millioner km per år. Målt i km/time, er dette det samme som

$$> \frac{\%}{365.25 \cdot 24}$$

$$17368.20600$$

(5)

altså ca 17400 km/time.

Oppgave 9.2.19

a)

Banen er en ellipse der solen ligger på hovedaksen, i et brennpunkt for ellipsen.

Vi vet at i ethvert punkt på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, der $a > b > 0$, er summen av avstandene til de to brennpunktene lik $2a$.

Avstanden mellom solen og ellipsens sentrum er $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Den korteste avstanden mellom Halleys komet og solen er $d = a - c$. (Se oppgave 9.2.10.)

Vi regner:

$$> c := \text{sqrt}\left(\left(\frac{5.39 \cdot 10^9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1.36 \cdot 10^9}{2}\right)^2\right)$$

$$> d := \frac{5.39 \cdot 10^9}{2} - c$$

Minste avstand til solen er altså cirka 87 millioner km.

b)

Vi legger ellipsen inn i et koordinatsystem med sentrum i origo og hovedaksen langs x -aksen.

Den har da likningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vi skriver den heller på parameterform: $x = a \cdot \cos(t)$, $y = b \cdot \sin(t)$ for $0 \leq t < 2\pi$.

Vi beregner buelengden til denne ellipsen ved å beregne lengden av delen i første kvadrant og multiplisere det hele med 4.

Det vil si, t går fra 0 til $\frac{\pi}{2}$.

Buelengdedifferensialet er $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(-a \cdot \sin(t))^2 + (b \cdot \cos(t))^2} dt$.

Buelengden er derfor

$$> L := 4 \cdot \text{int} \left(\text{sqrt} \left(\left(\frac{5.39 \cdot 10^9}{2} \cdot \sin(t) \right)^2 + \left(\frac{1.36 \cdot 10^9}{2} \cdot \cos(t) \right)^2 \right), t = 0 .. \frac{\text{Pi}}{2} \right)$$

Kometens bane har altså cirka lengde $L = 11.6$ milliarder km.

c)

Gjennomsnittshastigheten for kometen er

$$> \frac{\%}{76}$$

altså ca 152 millioner km per år. Målt i km/time, er dette det samme som

$$> \frac{\%}{365.25 \cdot 24}$$

altså ca 17400 km/time.

Oppgave 9.3.20

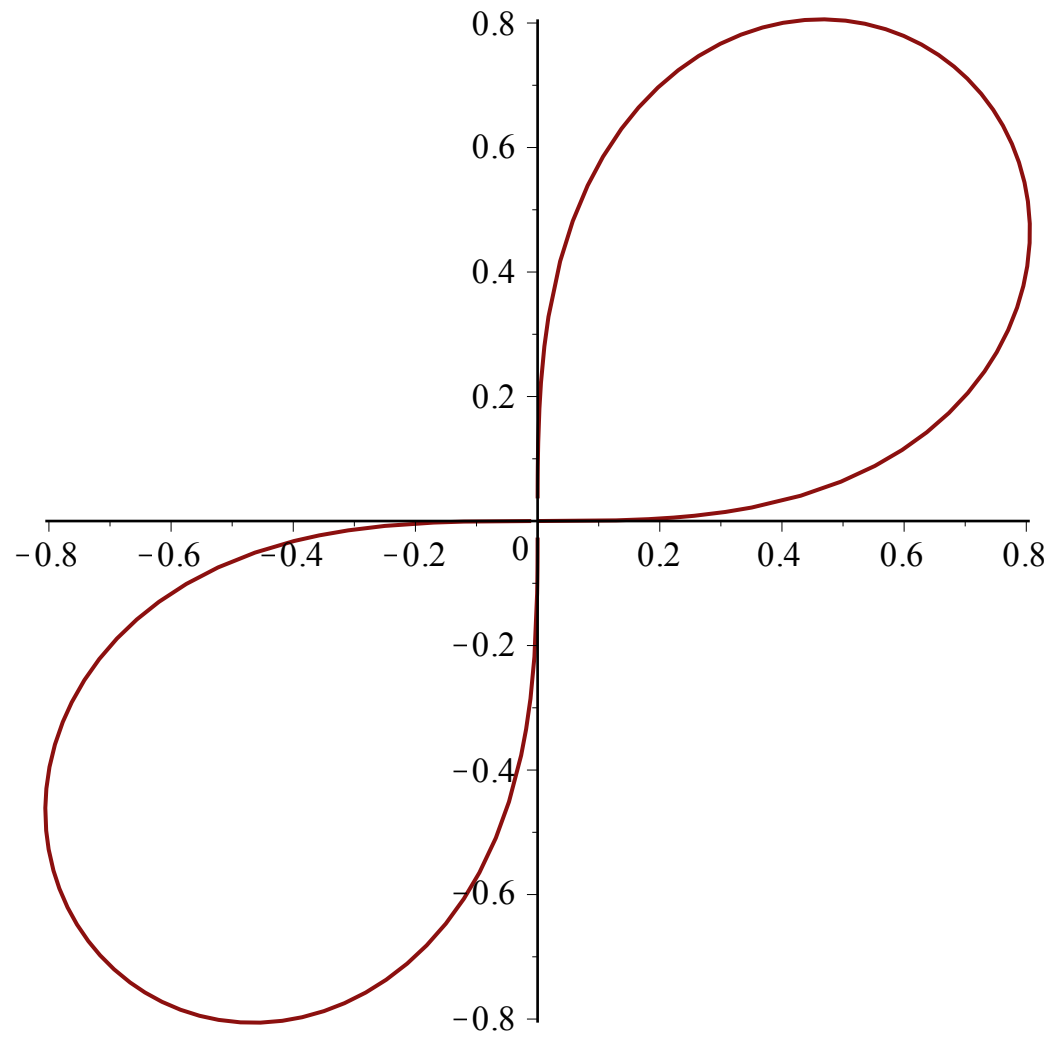
a)

For å tegne kurven, kan vi parametrisere den: $x = r(t) \cdot \cos(t)$, $y = r(t) \cdot \sin(t)$ for $0 \leq t \leq 2\pi$.

Problemet er bare at vi får problemer fordi $r(t) = \sqrt{\sin(2t)}$ ikke er definert for alle t .

Men det fikser Maple. Den tegner bare grafen der den er definert.

```
> plot([sqrt(sin(2*t))*cos(t), sqrt(sin(2*t))*sin(t), t = 0..2*Pi])
```



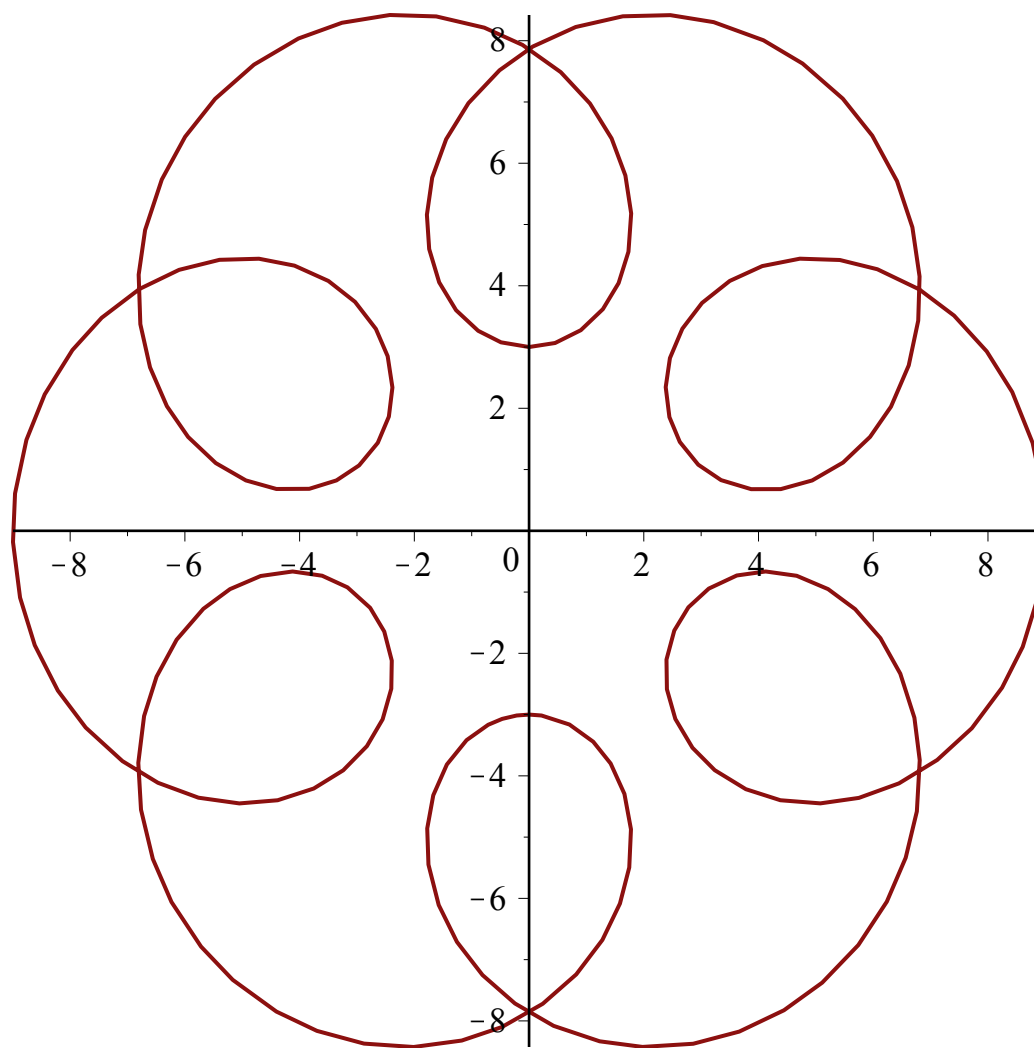
Oppgave 9.3.21

a)

Her er kurven ferdigparametrisert. Så det er bare å gå rett på plottingen. Det eneste som mangler er variasjonsområdet for parameteren t . (Du bør egentlig unne deg gleden av å plote alle figurene i denne oppgaven!)

I dette a)-spørsmålet, får vi klart hele kurven med om vi lar t gå fra 0 til 2π .

> $\text{plot}([6 \cdot \sin(t) - 3 \cdot \sin(7 \cdot t), 6 \cdot \cos(t) - 3 \cdot \cos(7 \cdot t), t = 0 .. 2 \cdot \pi])$

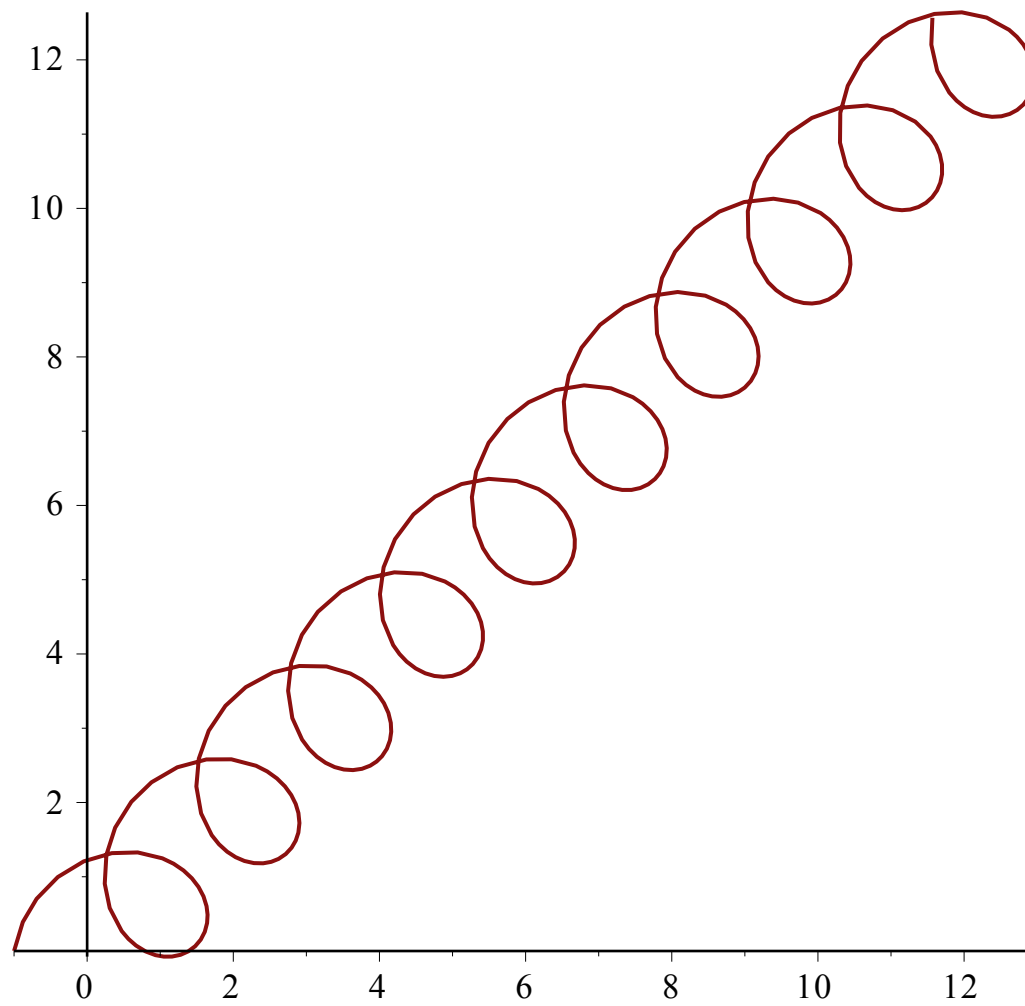


Oppgave 9.3.22

a)

Også grafene i denne oppgaven er plukket ut fordi forfatteren synes de ble ganske fine. Så ta deg tid til å plotte dem ut. Kanskje du finner på noen fine selv også?

> $\text{plot}([t - \cos(5 \cdot t), t + \sin(5 \cdot t), t = 0 .. 4 \cdot \pi])$



Oppgave 9.3.20

a)

For å tegne kurven, kan vi parametrisere den: $x = r(t) \cdot \cos(t)$, $y = r(t) \cdot \sin(t)$ for $0 \leq t \leq 2\pi$.

Problemet er bare at vi får problemer fordi $r(t) = \sqrt{\sin(2t)}$ ikke er definert for alle t .

Men det fikser Maple. Den tegner bare grafen der den er definert.

```
> plot([sqrt(sin(2*t))*cos(t), sqrt(sin(2*t))*sin(t), t=0..2*Pi])
```

Oppgave 9.3.21

a)

Her er kurven ferdigparametrisert. Så det er bare å gå rett på plottingen. Det eneste som mangler er variasjonsområdet for parameteren t . (Du bør egentlig unne deg gleden av å plote alle figurene i denne oppgaven!)

I dette a)-spørsmålet, får vi klart hele kurven med om vi lar t gå fra 0 til 2π .

```
> plot([6*sin(t) - 3*sin(7*t), 6*cos(t) - 3*cos(7*t), t=0..2*pi])
```

Oppgave 9.3.22

a)

Også grafene i denne oppgaven er plukket ut fordi forfatteren synes de ble ganske fine. Så ta deg tid til å plote dem ut. Kanskje du finner på noen fine selv også?

```
> plot([t - cos(5*t), t + sin(5*t), t=0..4*pi])
```

```
>
```


Oppgave 27.

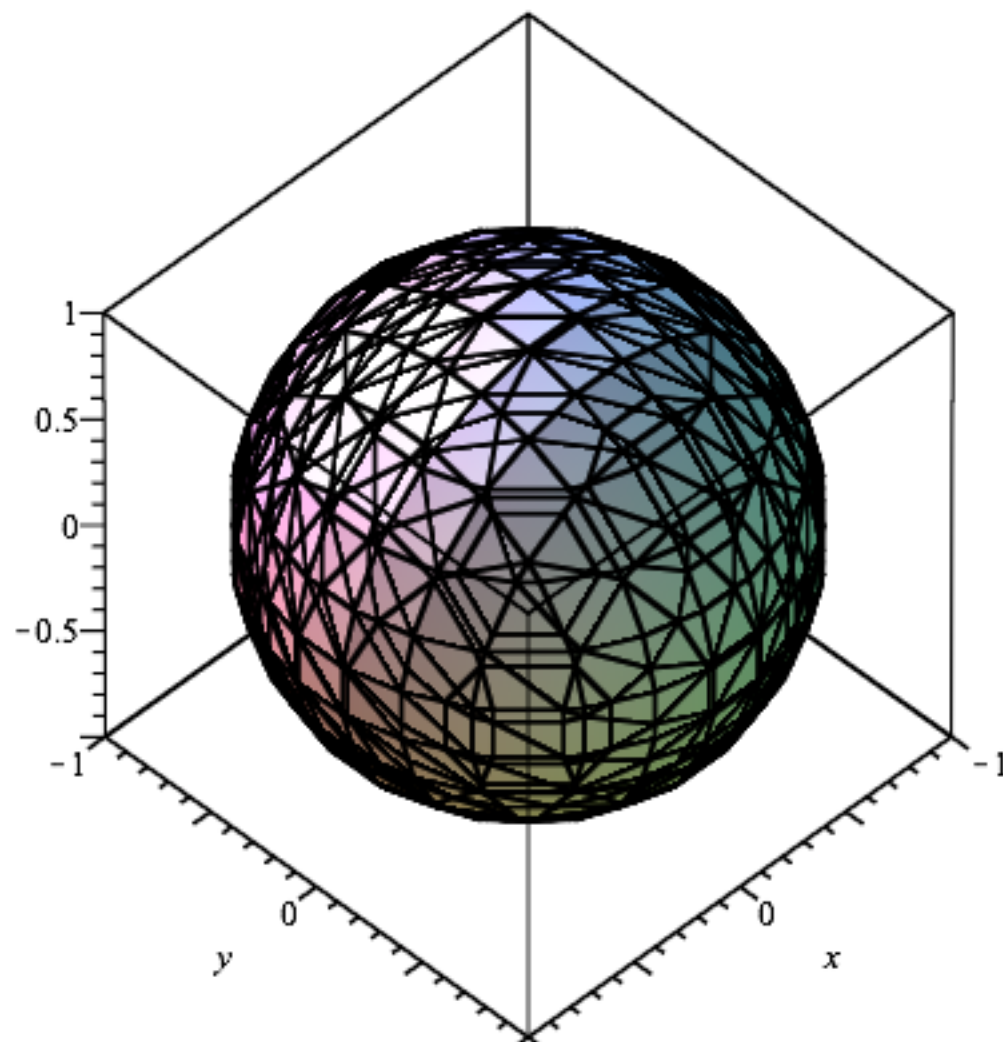
For å tegne grafen til en likning, kan vi bruke kommandoen *implicitplot3d*. Den krever at vi henter inn Maples plottekommandoer:

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

(1

Vi skriver inn likningen, men må altså angi variasjonsområde for alle de tre variable:

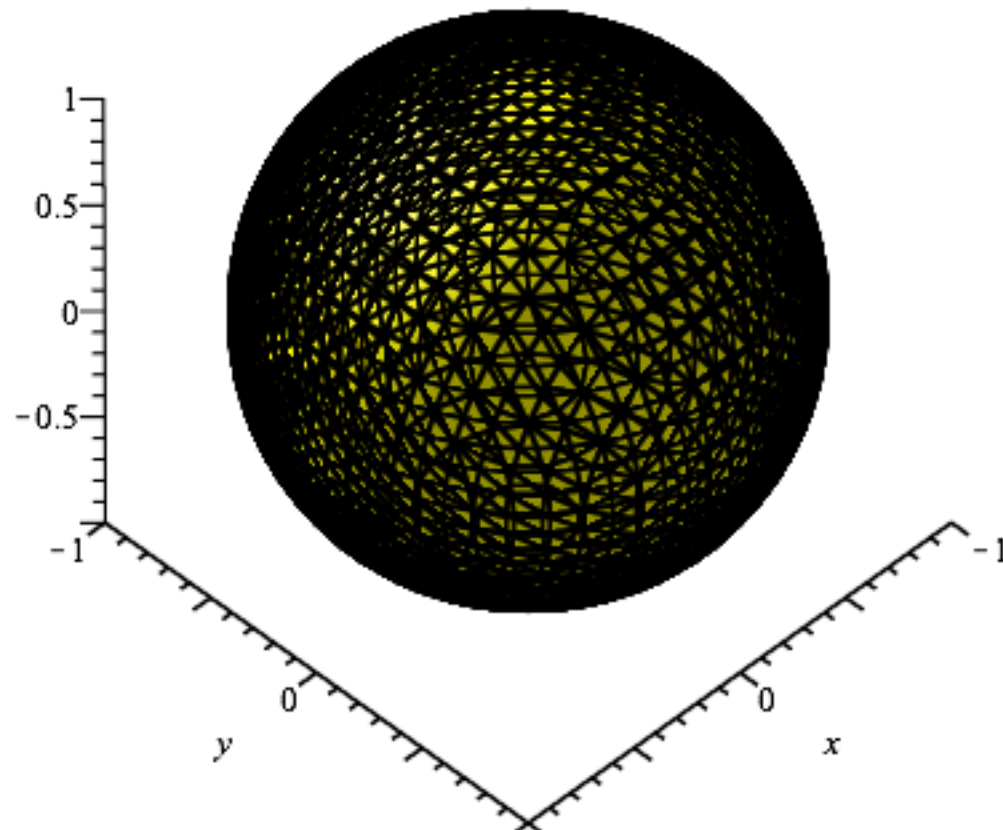
```
> implicitplot3d( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = -1 .. 1$ ,  $y = -1 .. 1$ ,  $z = -1 .. 1$ )
```



Ønsker vi koordinataks, må vi be om det.

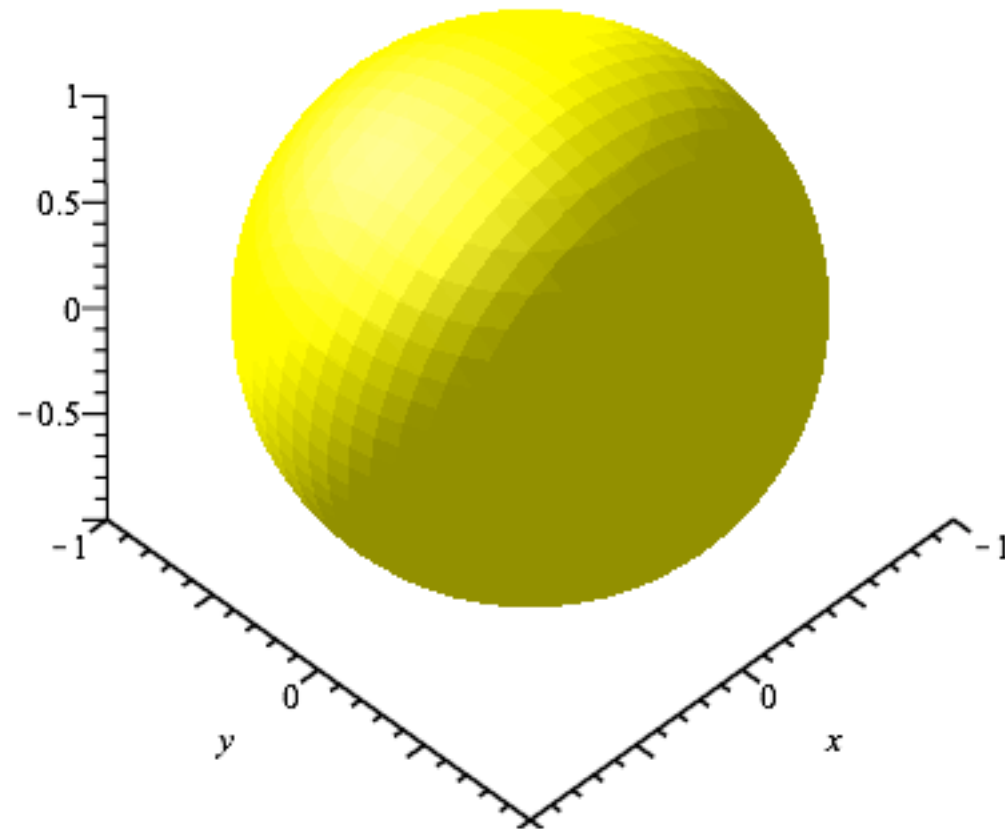
Hvis vi synes figuren ble for kantet, kan vi be om flere punkter:

```
> implicitplot3d(x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, z = -1 .. 1, axes = framed, color = yellow, numpoints = 10000)
```



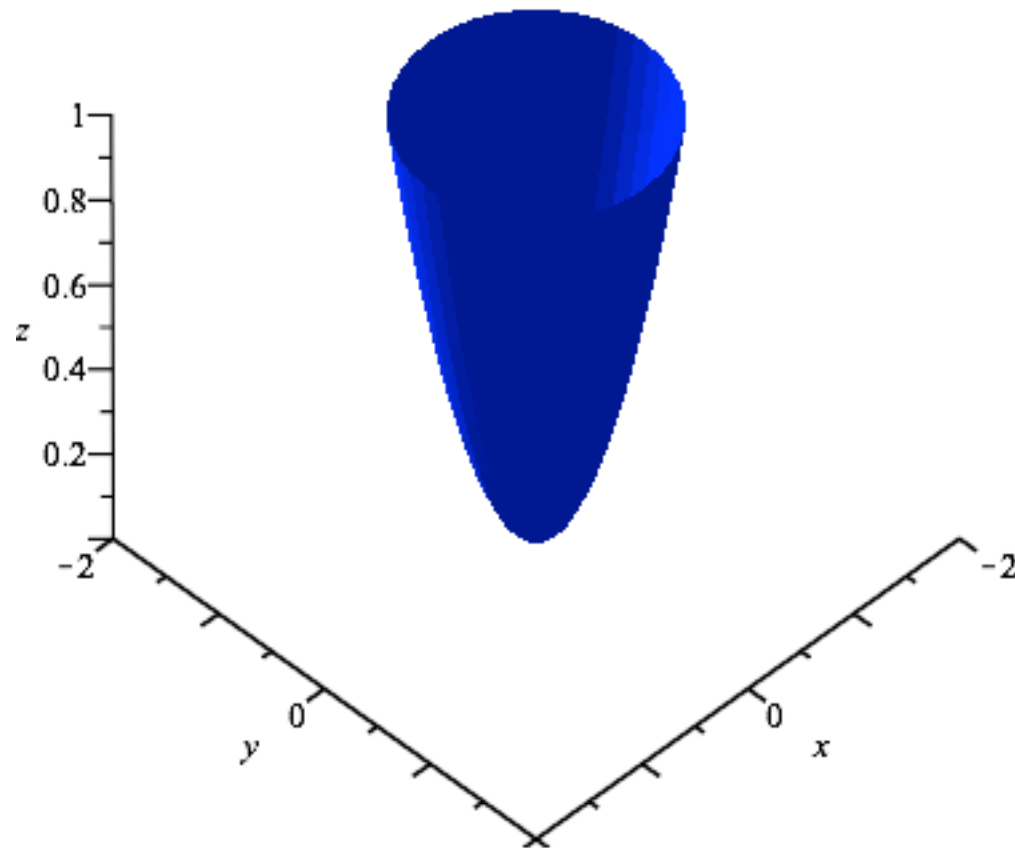
Synes du resultatet ble for svart? Vi kan faktisk fjerne det svarte nettverket ved å skriv `style = patchnogrid`:

> `implicitplot3d(x2 + y2 + z2 = 1, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, z = -1 .. 1, axes = framed, color = yellow, numpoints = 10000, style = patchnogrid)`



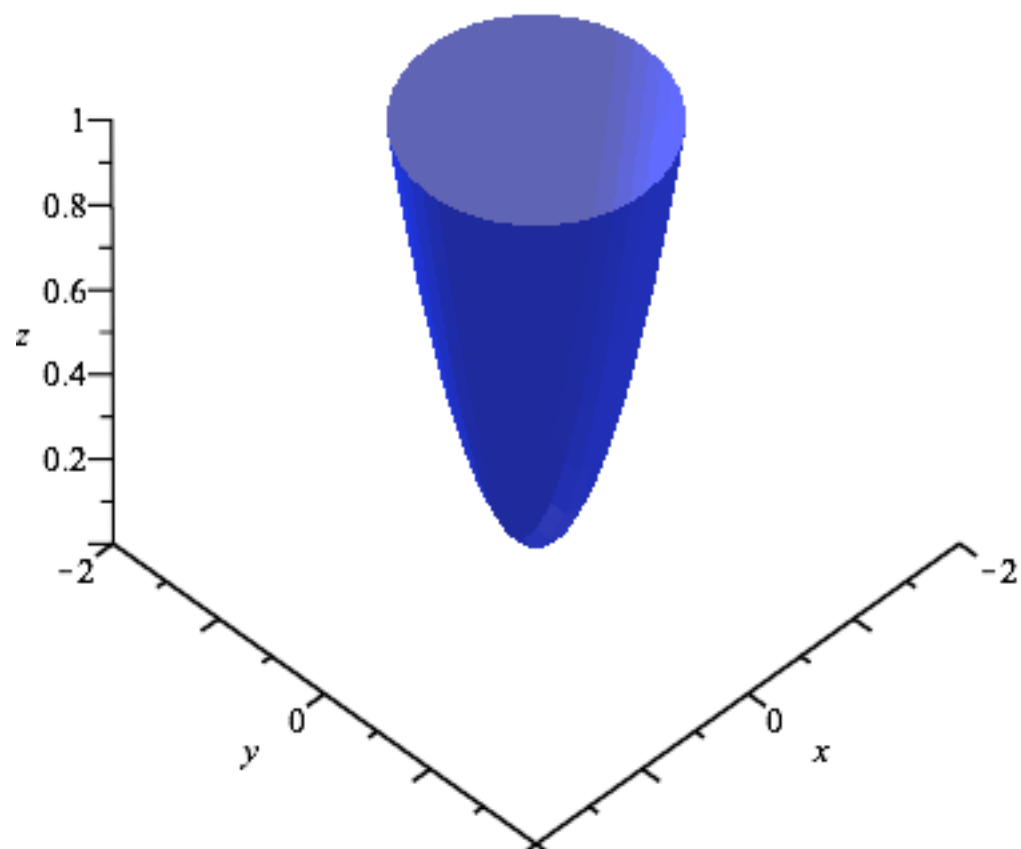
Hva med en liten rotasjonsparaboloide:

> `implicitplot3d(z = x2 + y2, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, z = 0 .. 1, axes = framed, color = blue, numpoints = 20000, style = patchnogrid)`



Den ble jo ganske mørk, og det er vanskelig å se avslutningen på toppen. Her kan vi bruke *transparency* til å gjøre figuren mer transparent:

```
> implicitplot3d( $z = x^2 + y^2$ ,  $x = -2 \dots 2$ ,  $y = -2 \dots 2$ ,  $z = 0 \dots 1$ , axes = framed, color = blue, numpoints = 20000, style = patchnogrid, transparency = 0.3)
```



Nå er det din tur å prøve deg:

Oppgave 27.

For å tegne grafen til en likning, kan vi bruke kommandoen `implicitplot3d`. Den krever at vi henter inn Maples plottekommandoer:

```
[> with(plots)
```

Vi skriver inn likningen, men må altså angi variasjonsområde for alle de tre variable:

```
[> implicitplot3d( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = -1 .. 1$ ,  $y = -1 .. 1$ ,  $z = -1 .. 1$ )
```

Ønsker vi koordinatakser, må vi be om det.

Hvis vi synes figuren ble for kantet, kan vi be om flere punkter:

```
[> implicitplot3d( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = -1 .. 1$ ,  $y = -1 .. 1$ ,  $z = -1 .. 1$ ,  $axes = framed$ ,  $color = yellow$ ,  $numpoints = 10000$ )
```

Synes du resultatet ble for svart? Vi kan faktisk fjerne det svarte nettverket ved å skriv `style = patchnogrid`:

```
> implicitplot3d( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = -1 .. 1$ ,  $y = -1 .. 1$ ,  $z = -1 .. 1$ ,  $axes = framed$ ,  $color = yellow$ ,  $numpoints = 10000$ ,  $style = patchnogrid$ )
```

Hva med en liten rotasjonsparaboloide:

```
> implicitplot3d( $z = x^2 + y^2$ ,  $x = -2 .. 2$ ,  $y = -2 .. 2$ ,  $z = 0 .. 1$ ,  $axes = framed$ ,  $color = blue$ ,  $numpoints = 20000$ ,  $style = patchnogrid$ )
```

Den ble jo ganske mørk, og det er vanskelig å se avslutningen på toppen. Her kan vi bruke `transparency` til å gjøre figuren mer transparent:

```
> implicitplot3d( $z = x^2 + y^2$ ,  $x = -2 .. 2$ ,  $y = -2 .. 2$ ,  $z = 0 .. 1$ ,  $axes = framed$ ,  $color = blue$ ,  $numpoints = 20000$ ,  $style = patchnogrid$ ,  $transparency = 0.3$ )
```

Nå er det din tur å prøve deg:

```
>
```

For å plote flater gitt i sylinderkoordinater eller kulekoordinater skal vi bruke kommandoen *plot3d* på disse oppgavene. Denne kommandoen kan plote flater gitt i ulike koordinatsystemer. Vi skal plote flater gitt på én av disse formene:

$z = f(x, y)$ for $(x, y) \in D$ (kartesiske koordinater) Maplekommando: *plot3d(f(x, y), x = a..b, y = c..d)*.

$r = f(\theta, z)$ for $(\theta, z) \in D$ (sylinderkoordinater) Maplekommando: *plot3d(f(θ, z), θ = a..b, z = c..d, coords = cylindrical)*.

$\rho = f(\theta, \varphi)$ for $(\theta, \varphi) \in D$ (kulekoordinater) Maplekommando: *plot3d(f(θ, φ), θ = a..b, φ = c..d, coords = spherical)*.

$x = f(s, t), y = g(s, t), z = h(s, t)$ for $(s, t) \in D$ (parametrisk flate) Maplekommando: *plot3d([f(s, t), g(s, t), h(s, t)], s = a..b, t = c..d)*.

$r = f(s, t), \theta = g(s, t), z = h(s, t)$ for $(s, t) \in D$ (sylinderkoordinater) Maplekommando: *plot3d([f(s, t), g(s, t), h(s, t)], s = a..b, t = c..d, coords = cylindrical)*.

$\rho = f(s, t), \theta = g(s, t), \varphi = h(s, t)$ for $(s, t) \in D$ (kulekoordinater) Maplekommando: *plot3d([f(s, t), g(s, t), h(s, t)], s = a..b, t = c..d, coords = spherical)*.

Navnene vi velger å gi de variable er ikke viktig, men rekkefølgen de kommer i i hakeparentesen avgjør hva de står for. Merk spesielt rekkefølgen for kulekoordinater!

Som alltid må vi først hente inn Maples plottekommandoer:

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

(1

Oppgave 9.5.14

a)

Vi skal plotte grafen til likningen $r^3 = 1$. Denne likningen er gitt i sylinderkoordinater. Den er ekvivalent med $r = 1$.

Siden variasjonsområdet D for θ og z ikke er gitt i oppgaven, er det underforstått at de er størst mulig.

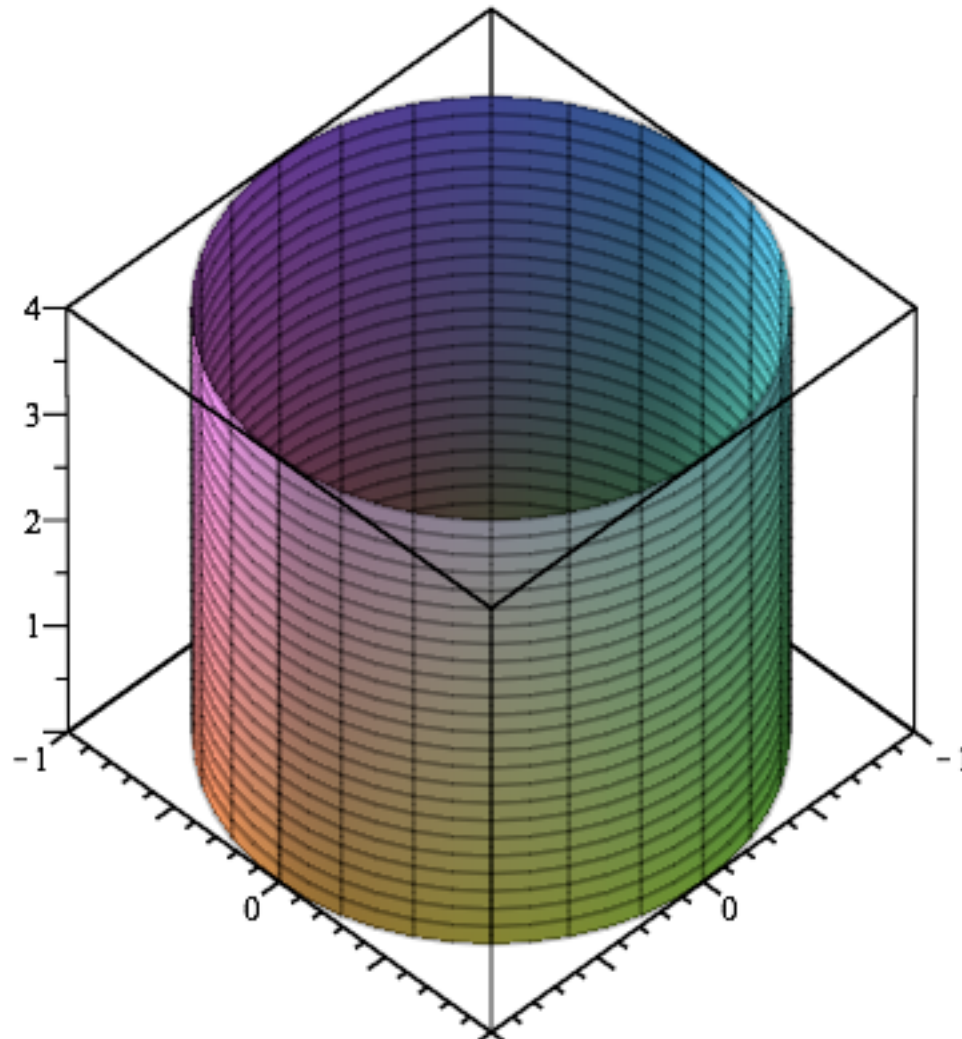
Altså $-\infty < \theta < \infty$ og $-\infty < z < \infty$.

Men om θ gjennomløper hele den reelle tallinjen, betyr det bare at figuren blir tegnet uendelig mange ganger. Det holder å tegne den for $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Om z gjennomløper hele tallinjen, får vi en uendelig høy figur. Det er det ikke plass til på arket.

Vi lar derfor z gjennomløpe et endelig intervall, for eksempel $0 \leq z \leq 4$.

> `plot3d([1, theta, z], theta = 0..2*Pi, z = 0..4, coords = cylindrical)`



Merk:

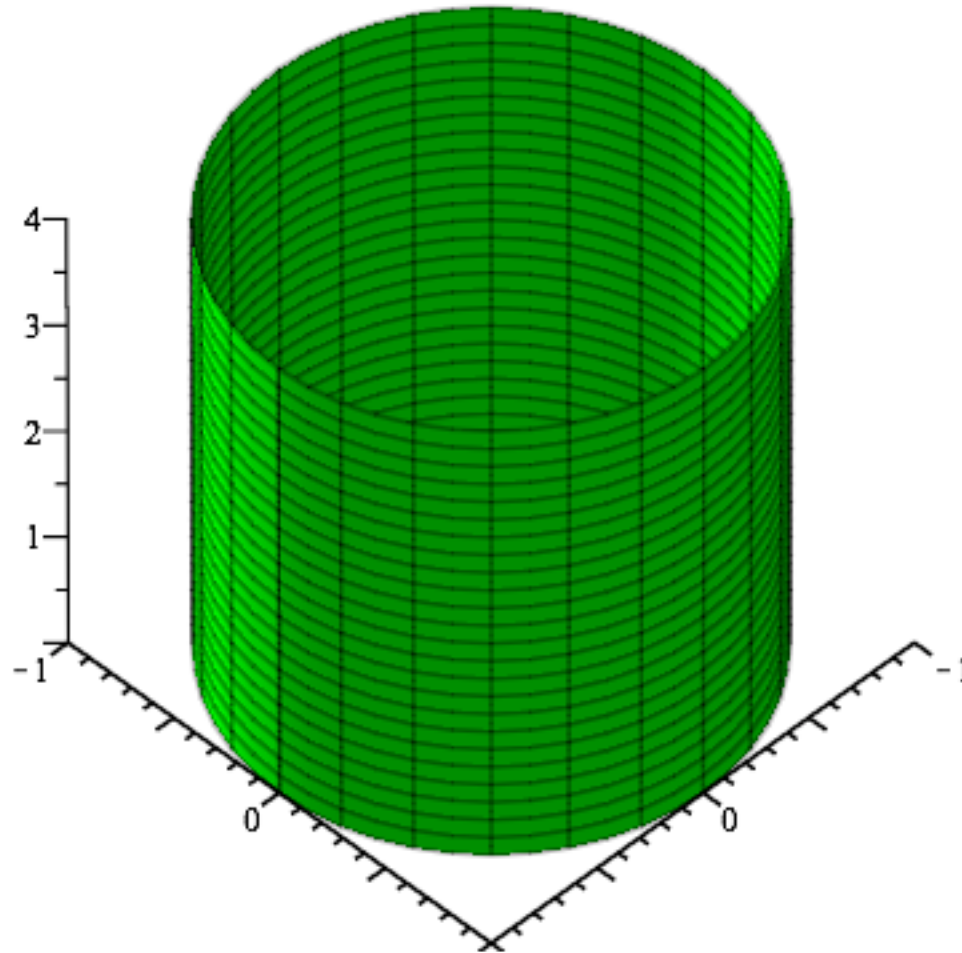
Maple legger flaten inn i et kartesisk koordinatsystem selv om flaten er gitt i sylinderkoordinater.

Men det Maple har gjort, er å tegne et rutenett på flaten styrt av de to variable som her er θ og z .

Rutenettet består altså av kurver $\theta = \text{konstant}$ og $z = \text{konstant}$ på flaten.

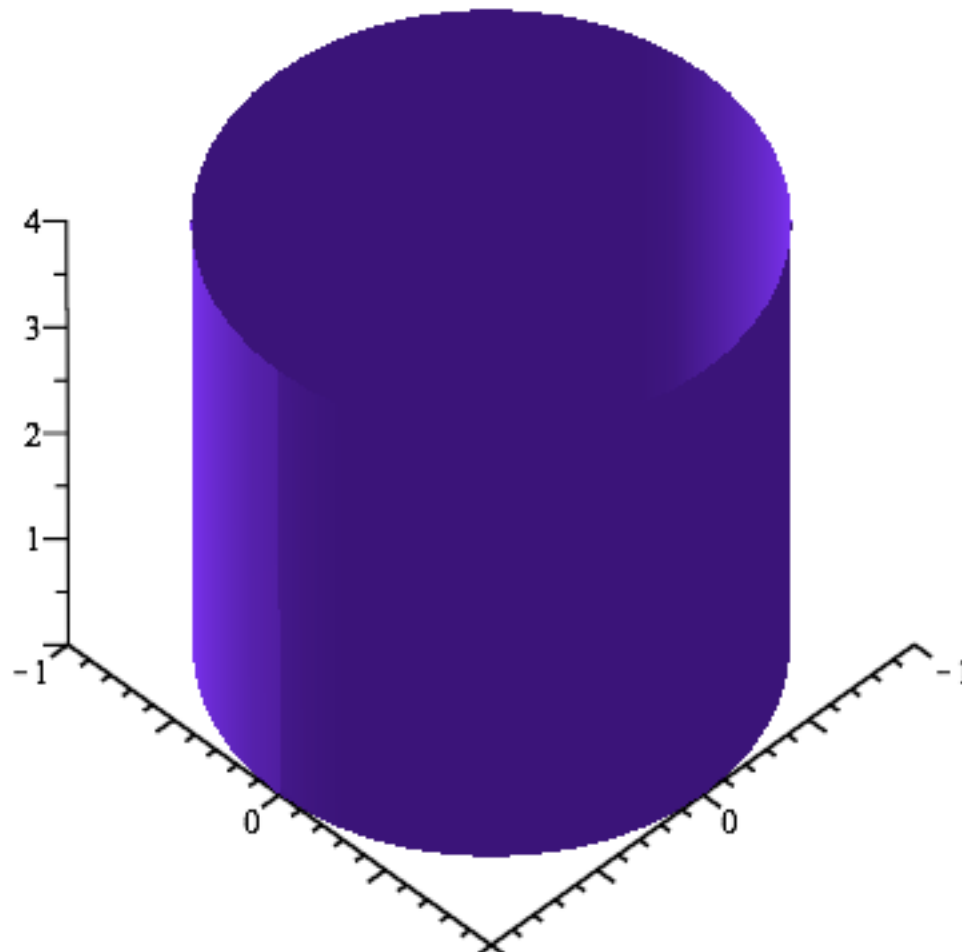
Vi kan også skifte farge om vi vil. Og vi kan skifte navn på de variable. (Men husk, rekkefølgen vi gir koordinatene i, bestemmer betydningen av koordinatene.)

> `plot3d([1, t, x], t = 0 .. 2·Pi, x = 0 .. 4, coords = cylindrical, axes = framed, color = "green")`



Som du ser tegner Maple et rutenett på figuren. Rutenettet er av typen $\theta = \text{konstant}$ og $z = \text{konstant}$. Vil du ikke ha et slikt rutenett, kan du godt bruke `style = patchnogrid` som før:

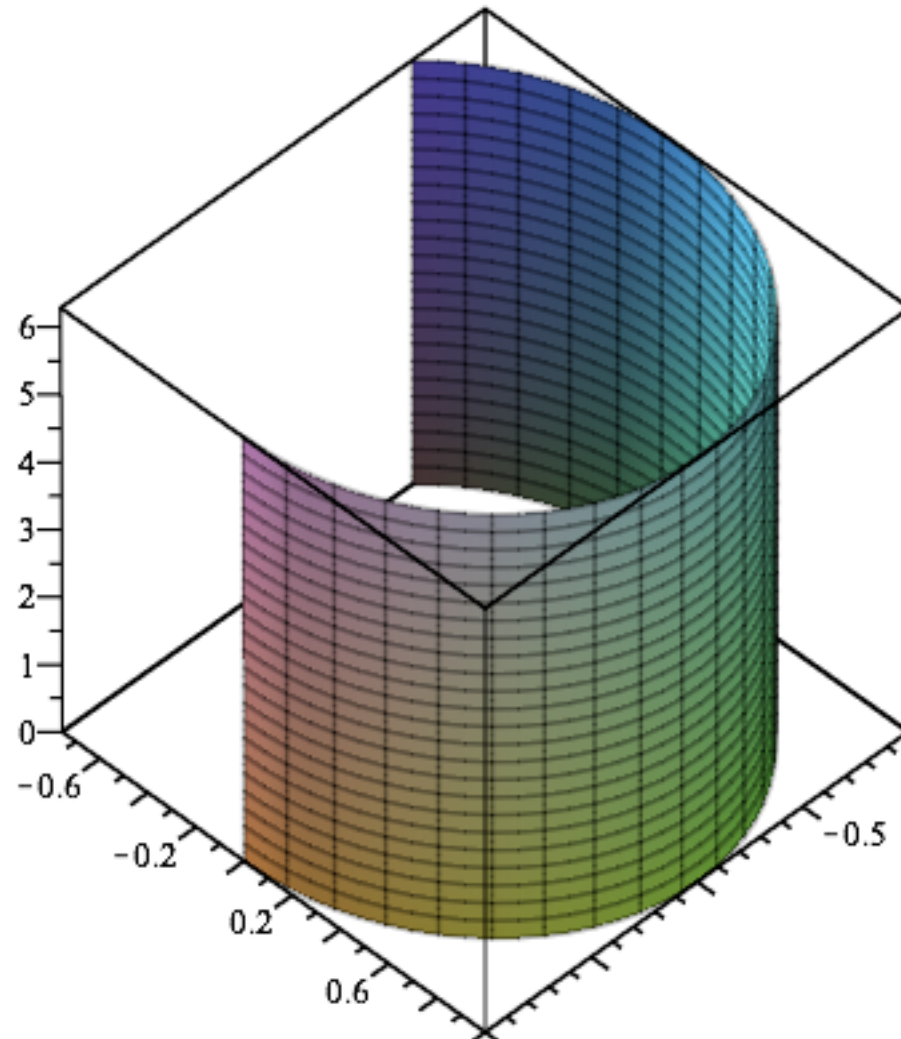
> `plot3d([1, t, x], t = 0 .. 2·Pi, x = 0 .. 4, coords = cylindrical, axes = framed, color = "Spring Violet", style = patchnogrid)`



Vi du ha flere farger å velge mellom? Klikk på spørsmålstegnet øverst til høyre i kommandolinje 1. Da får du opp Maples hjelpesider. Skriv *plot3d* i søkefeltet øverst til venstre, og velg *plot colornames* i menyen du får opp.

Et annet spørsmål er, hva om vi kommer i skade for å forbytte rekkefølgen på de variable? Vi sjekker:

> *plot3d*([1, z, theta], theta = 0 .. 2·Pi, z = 0 .. 4, coords = cylindrical)



Jo, Maple oppfatter z som navnet på vinkelen. Den går fra 0 til 4 som er litt større enn π .
Og Maple oppfatter θ som navnet på høyden. Den går fra 0 til 2π som er cirka lik 6.28.
Logisk!

c)

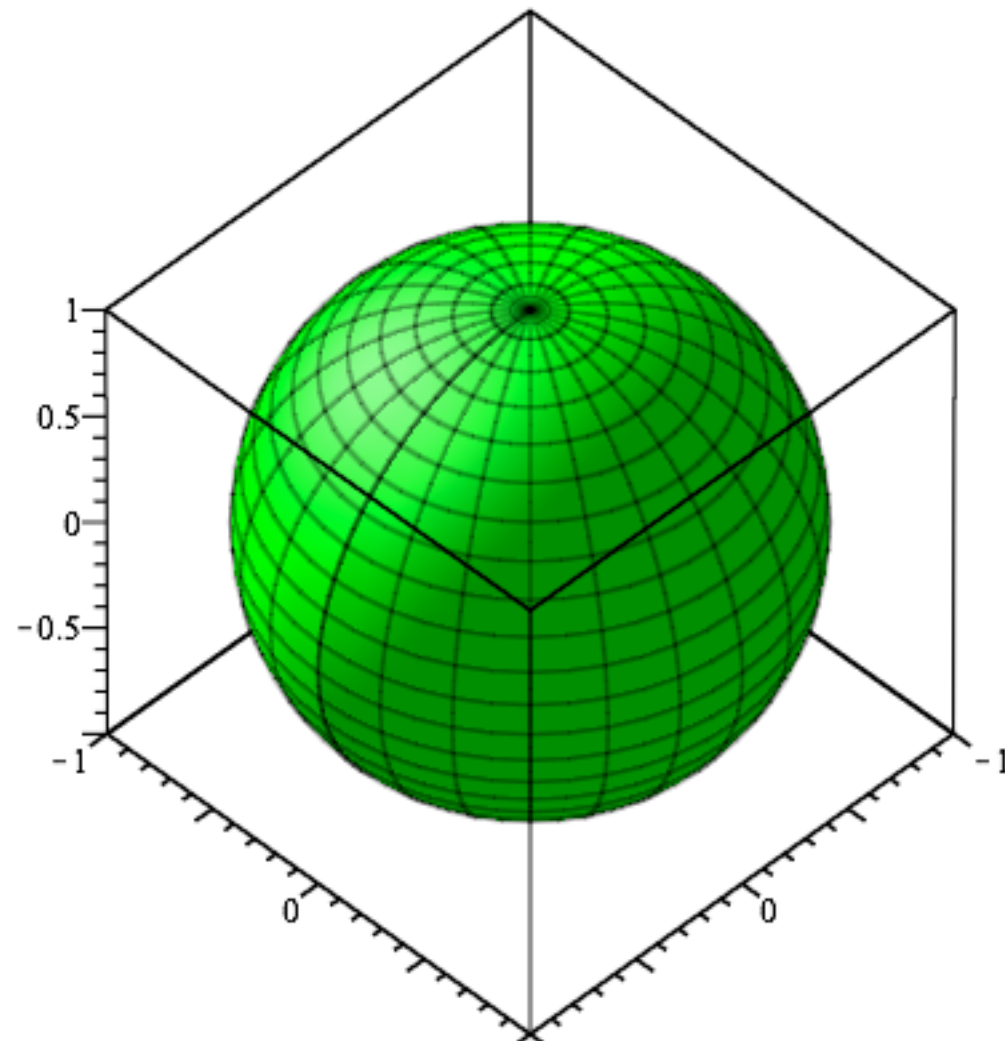
Her er flaten gitt ved $\rho^2 = 1$ som er ekvivalent med $\rho = 1$ i kulekoordinater.

Det klart at vi får hele figuren tegnet en og bare en gang dersom $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

OBS!!!! Maple skrive kulekoordinater i en annen rekkefølge enn vi gjør i boken.

Så når vi skriver instruksjonene til Maple, må de komme i rekkefølgen $[\rho, \theta, \varphi]$. Spesielt blir det her:

> `plot3d([1, theta, phi], theta = 0 .. 2·Pi, phi = 0 .. Pi, coords = spherical, color = "green", axes = boxed)`



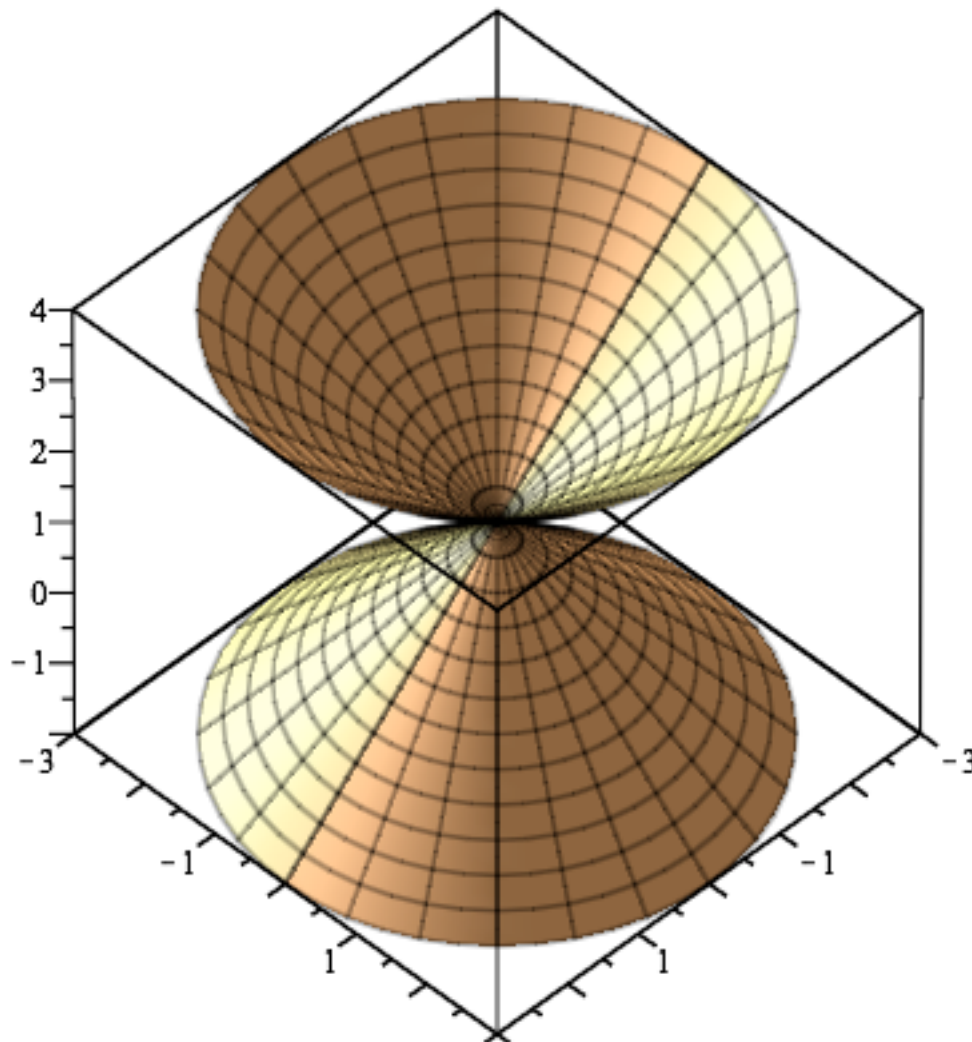
Rutenettet Maple lager på flaten er nå kurver av typen $\theta = \text{konstant}$ og $\phi = \text{konstant}$ på flaten.

g)

Flaten er gitt i sylinderkoordinater, så vi velger å tegne den i sylinderkoordinater.

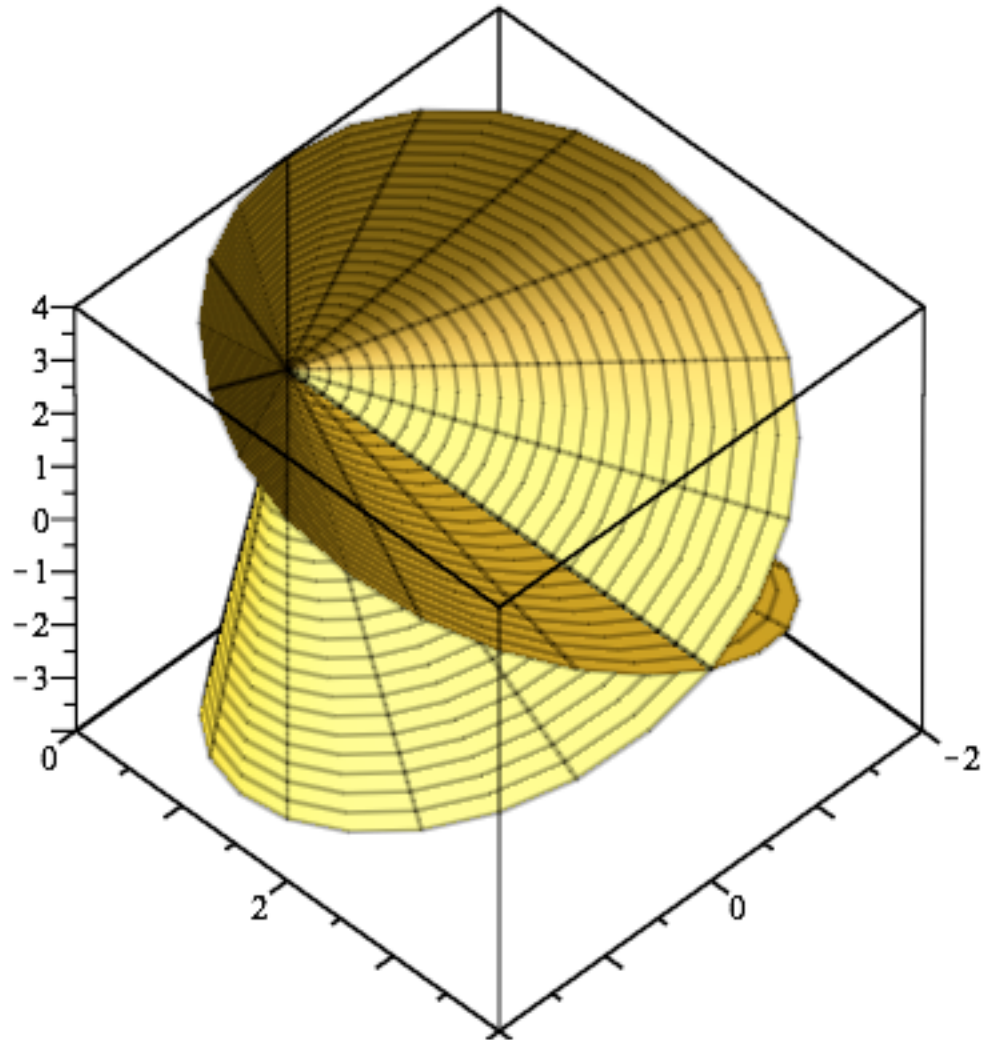
$r + z = 1$ i oppgaven, betyr at $r = f(\theta, z) = 1 - z$.

```
> plot3d([1 - z, t, z], t = 0 .. 2 * Pi, z = -2 .. 4, coords = cylindrical, color = "SandyBrown", axes = boxed)
```



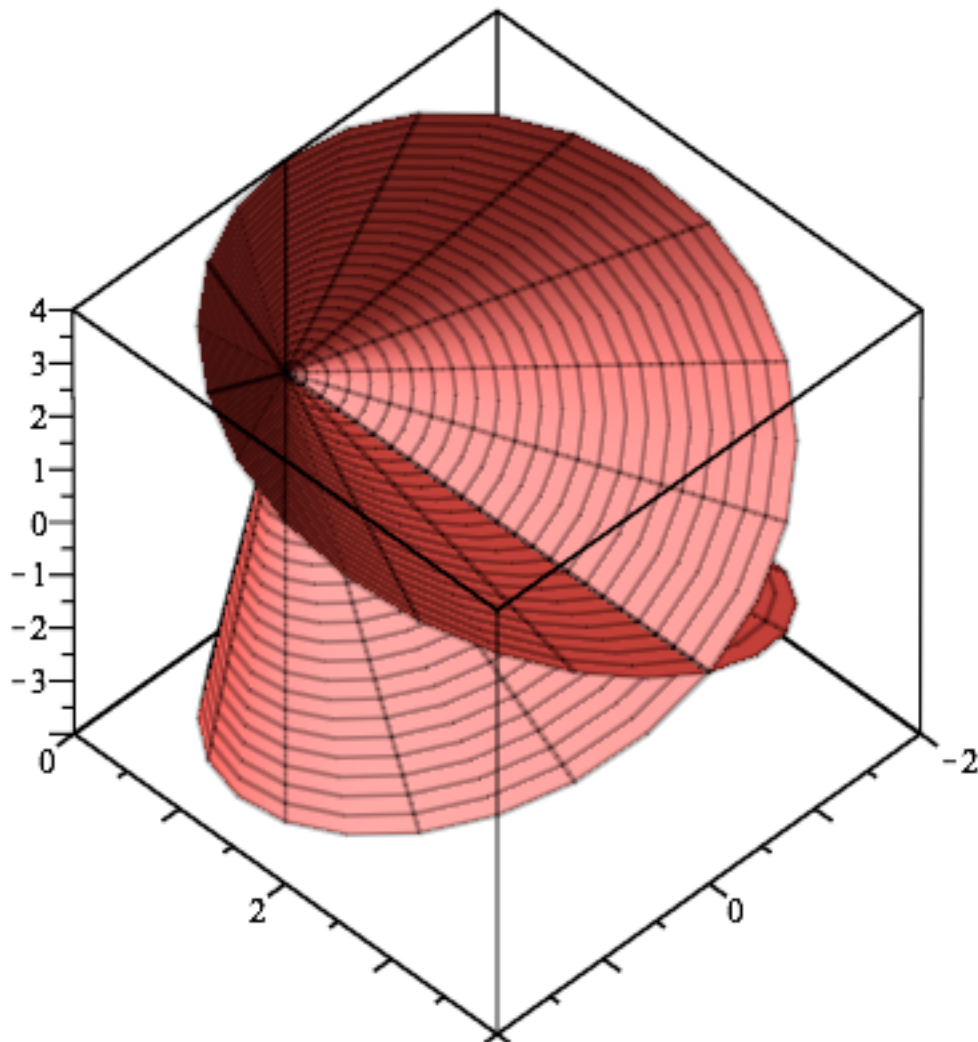
i)

> *plot3d*([rho, theta, theta], rho = 0 ..4, theta = 0 ..2·Pi, coords = spherical, color = "Goldenrod")



Snodig figur! Kan dette virkelig være riktig? Vi kontrollerer ved å gjøre om til kartesiske koordinater:

> `plot3d([rho, theta, theta], rho = 0 ..4, theta = 0 ..2·Pi, coords = spherical, color = orange, axes = boxed)`



Joda. Slik må den visst bli. Hvis du dreier litt på den, er det lettere å forstå at det ble riktig.

For å plote flater gitt i sylinderkoordinater eller kulekoordinater skal vi bruke kommandoen *plot3d* på disse oppgavene. Denne kommandoen kan plote flater gitt i ulike koordinatsystemer. Vi skal plote flater gitt på én av disse formene:

$z = f(x, y)$ for $(x, y) \in D$ (kartesiske koordinater) Maplekommando: *plot3d(f(x, y), x = a..b, y = c..d)*.

$r = f(\theta, z)$ for $(\theta, z) \in D$ (sylinderkoordinater) Maplekommando: *plot3d(f(θ, z), θ = a..b, z = c..d, coords = cylindrical)*.

$\rho = f(\theta, \varphi)$ for $(\theta, \varphi) \in D$ (kulekoordinater) Maplekommando: *plot3d(f(θ, φ), θ = a..b, φ = c..d, coords = spherical)*.

$x = f(s, t), y = g(s, t), z = h(s, t)$ for $(s, t) \in D$ (parametrisk flate) Maplekommando: *plot3d([f(s, t), g(s, t), h(s, t)], s = a..b, t = c..d)*.

$r = f(s, t), \theta = g(s, t), z = h(s, t)$ for $(s, t) \in D$ (sylinderkoordinater) Maplekommando: *plot3d([f(s, t), g(s, t), h(s, t)], s = a..b, t = c..d, coords = cylindrical)*.

$\rho = f(s, t), \theta = g(s, t), \varphi = h(s, t)$ for $(s, t) \in D$ (kulekoordinater) Maplekommando: *plot3d([f(s, t), g(s, t), h(s, t)], s = a..b, t = c..d, coords = spherical)*.

Navnene vi velger å gi de variable er ikke viktig, men rekkefølgen de kommer i i hakeparentesen avgjør hva de står for. Merk spesielt rekkefølgen for kulekoordinater!

Som alltid må vi først hente inn Maples plottekommandoer:

```
> with(plots)
```

Oppgave 9.5.14

a)

Vi skal plote grafen til likningen $r^3 = 1$. Denne likningen er gitt i sylinderkoordinater. Den er ekvivalent med $r = 1$.

Siden variasjonsområdet D for θ og z ikke er gitt i oppgaven, er det underforstått at de er størst mulig.

Altså $-\infty < \theta < \infty$ og $-\infty < z < \infty$.

Men om θ gjennomløper hele den reelle tallinjen, betyr det bare at figuren blir tegnet uendelig mange ganger. Det holder å tegne den for $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Om z gjennomløper hele tallinjen, får vi en uendelig høy figur. Det er det ikke plass til på arket.

Vi lar derfor z gjennomløpe et endelig intervall, for eksempel $0 \leq z \leq 4$.

```
> plot3d([1, theta, z], theta = 0..2·Pi, z = 0..4, coords = cylindrical)
```

Merk:

Maple legger flaten inn i et kartesisk koordinatsystem selv om flaten er gitt i sylinderkoordinater.

Men det Maple har gjort, er å tegne et rutenett på flaten styrt av de to variable som her er θ og z .

Rutenettet består altså av kurver $\theta = \text{konstant}$ og $z = \text{konstant}$ på flaten.

Vi kan også skifte farge om vi vil. Og vi kan skifte navn på de variable. (Men husk, rekkefølgen vi gir koordinatene i, bestemmer betydningen av koordinatene.)

```
> plot3d([1, t, x], t = 0..2·Pi, x = 0..4, coords = cylindrical, axes = framed, color = "green")
```

Som du ser tegner Maple et rutenett på figuren. Rutenettet er av typen $\theta = \text{konstant}$ og $z = \text{konstant}$. Vil du ikke ha et slikt rutenett, kan du godt bruke `style = patchnogrid` som før:

```
> plot3d([1, t, x], t = 0..2·Pi, x = 0..4, coords = cylindrical, axes = framed, color = "Spring Violet", style = patchnogrid)
```

Vi du ha flere farger å velge mellom? Klikk på spørsmålstegnet øverst til høyre i kommandolinje 1. Da får du opp Maples hjelpesider. Skriv `plot3d` i søkefeltet øverst til venstre, og velg `plot colornames` i menyen du får opp.

Et annet spørsmål er, hva om vi kommer i skade for å forbytte rekkefølgen på de variable? Vi sjekker:

```
> plot3d([1, z, theta], theta = 0..2·Pi, z = 0..4, coords = cylindrical)
```

Jo, Maple oppfatter z som navnet på vinkelen. Den går fra 0 til 4 som er litt større enn π .

Og Maple oppfatter θ som navnet på høyden. Den går fra 0 til 2π som er cirka lik 6.28.

Logisk!

c)

Her er flaten gitt ved $\rho^2 = 1$ som er ekvivalent med $\rho = 1$ i kulekoordinater.

Det klart at vi får hele figuren tegnet en og bare en gang dersom $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

OBS!!!! Maple skrive kulekoordinater i en annen rekkefølge enn vi gjør i boken.

Så når vi skriver instruksjonene til Maple, må de komme i rekkefølgen $[\rho, \theta, \varphi]$. Spesielt blir det her:

```
> plot3d([1, theta, phi], theta = 0 .. 2·Pi, phi = 0 .. Pi, coords = spherical, color = "green", axes = boxed)
```

Rutenettet Maple lager på flaten er nå kurver av typen $\theta = \text{konstant}$ og $\phi = \text{konstant}$ på flaten.

g)

Flaten er gitt i sylinderkoordinater, så vi velger å tegne den i sylinderkoordinater.

$r + z = 1$ i oppgaven, betyr at $r = f(\theta, z) = 1 - z$.

```
> plot3d([1 - z, t, z], t = 0 .. 2·Pi, z = -2 .. 4, coords = cylindrical, color = "SandyBrown", axes = boxed)
```

i)

```
> plot3d([rho, theta, theta], rho = 0 .. 4, theta = 0 .. 2·Pi, coords = spherical, color = "Goldenrod")
```

Snodig figur! Kan dette virkelig være riktig? Vi kontrollerer ved å gjøre om til kartesiske koordinater:

```
> plot3d([rho, theta, theta], rho = 0..4, theta = 0..2·Pi, coords = spherical, color = orange, axes = boxed)
```

Joda. Slik må den visst bli. Hvis du dreier litt på den, er det lettere å forstå at det ble riktig.

```
>
```

> *with(plots)*
[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,*
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

(1

Oppgave 9.6.10

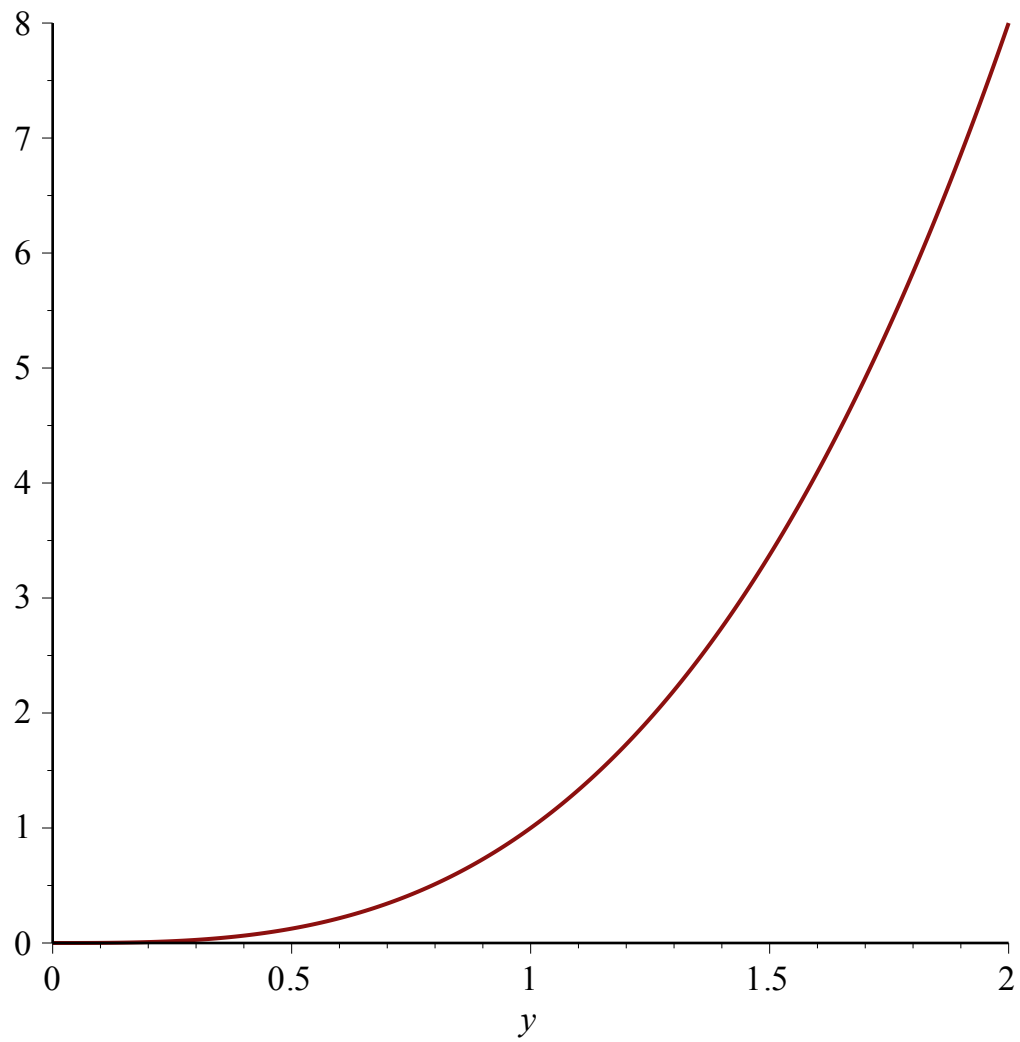
a)

(i)

> *plot(y^3 , y = 0 .. 2);*

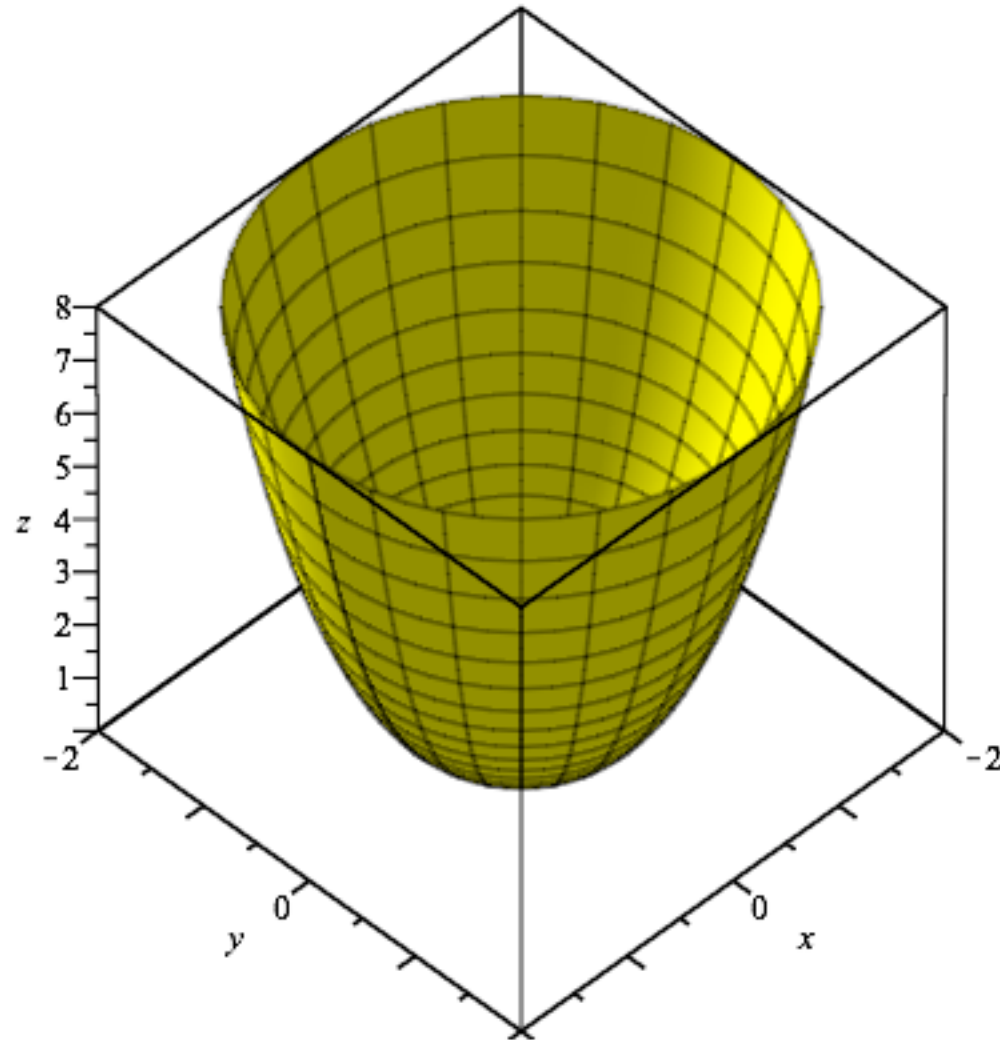
(ii)

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = r^3$$



(iii)

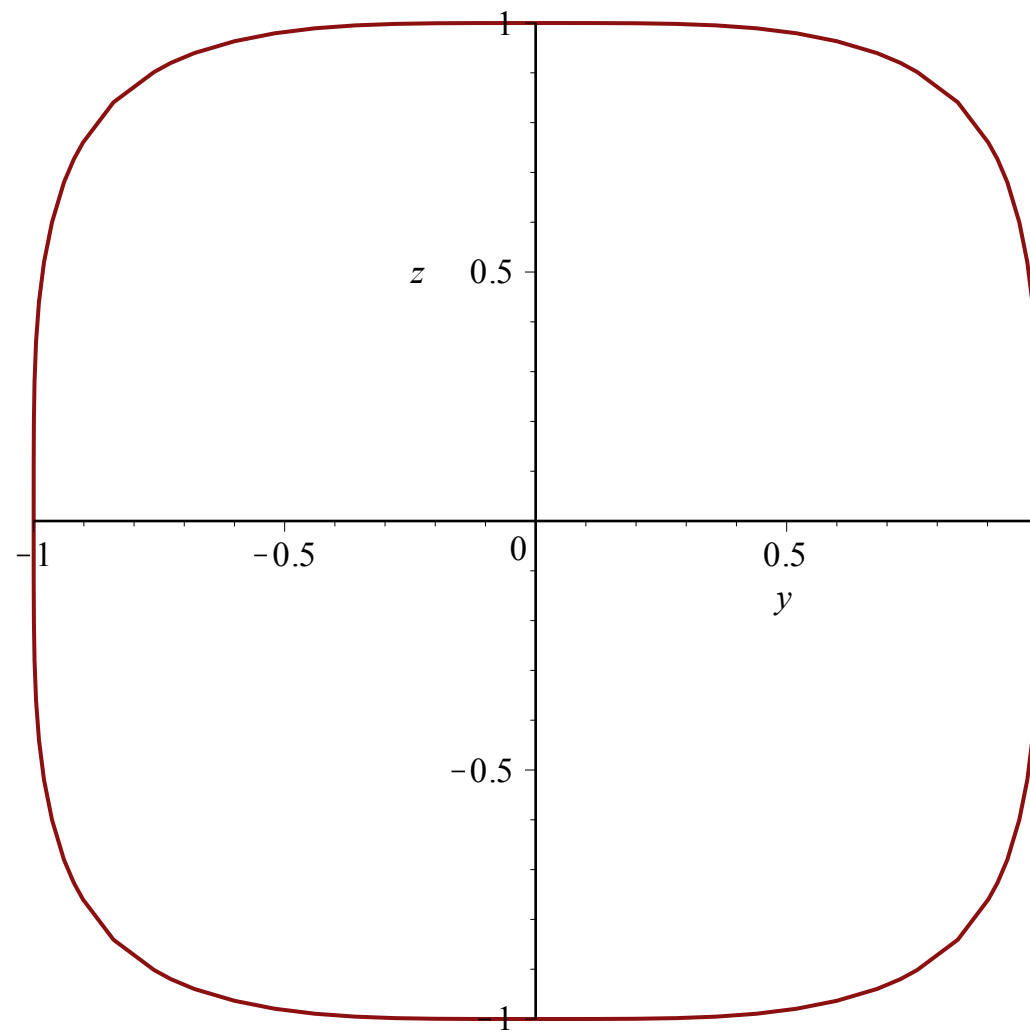
> `plot3d([r, theta, r3], r = 0..2, theta = 0..2·Pi, coords = cylindrical, axes = boxed, color = yellow, labels = [x, y, z])`



f)

(i)

> `implicitplot( $y^4 + z^4 = 1$ ,  $y = -1 \dots 1$ ,  $z = -1 \dots 1$ )`

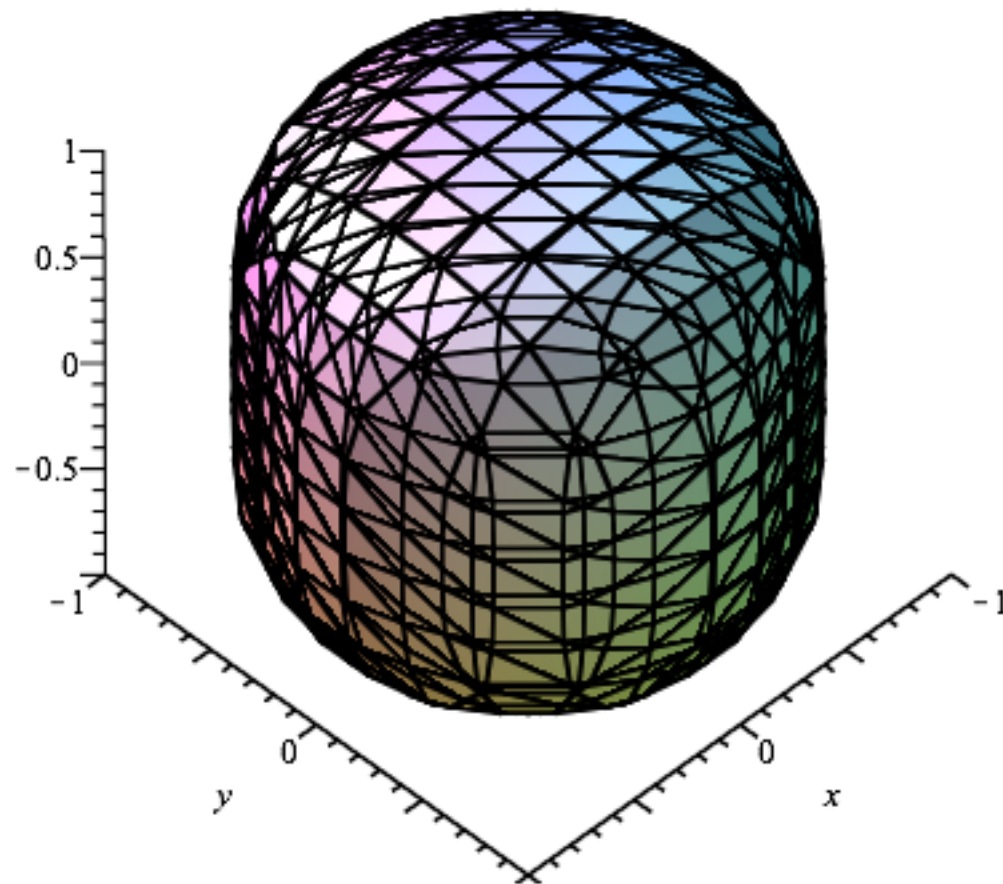


(ii)

$$(y^2 + x^2)^2 + z^4 = 1$$

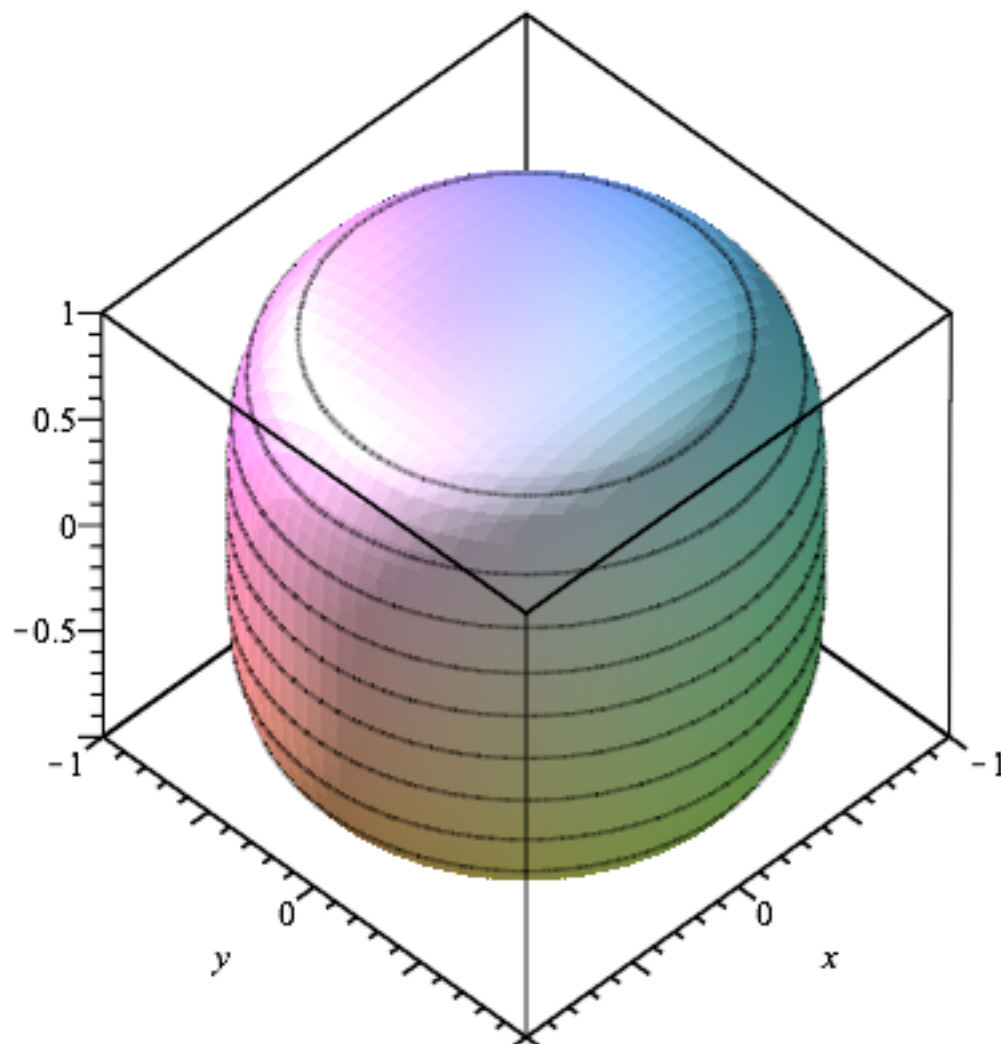
(iii)

> `implicitplot3d((y^2 + x^2)^2 + z^4 = 1, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, z = -1 .. 1, labels = [x, y, z], axes = framed)`



For å få en litt penere figur, kan vi føye til `style = surfacecontour` og ta med litt flere punkter:

```
> implicitplot3d((y2 + x2)2 + z4 = 1, x = -1 ..1, y = -1 ..1, z = -1 ..1, numpoints = 20000, style = surfacecontour, axes = boxed, labels  
= [x, y, z])
```



```
>
```

```
[> with(plots)
```

Oppgave 9.6.10

a)

(i)

```
[> plot(y^3, y = 0 .. 2);
```

(ii)

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = r^3$$

(iii)

```
> plot3d([r, theta, r^3], r = 0 .. 2, theta = 0 .. 2 * Pi, coords = cylindrical, axes = boxed, color = yellow, labels = [x, y, z])
```

f)

(i)

```
> implicitplot(y^4 + z^4 = 1, y = -1 .. 1, z = -1 .. 1)
```

(ii)

$$(y^2 + x^2)^2 + z^4 = 1$$

(iii)

```
> implicitplot3d((y^2 + x^2)^2 + z^4 = 1, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, z = -1 .. 1, labels = [x, y, z], axes = framed)
```

For å få en litt penere figur, kan vi føye til `style = surfacecontour` og ta med litt flere punkter:

```
> implicitplot3d((y^2 + x^2)^2 + z^4 = 1, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, z = -1 .. 1, numpoints = 20000, style = surfacecontour, axes = boxed, labels  
= [x, y, z])
```

```
>
```

> *with(plots)*
[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

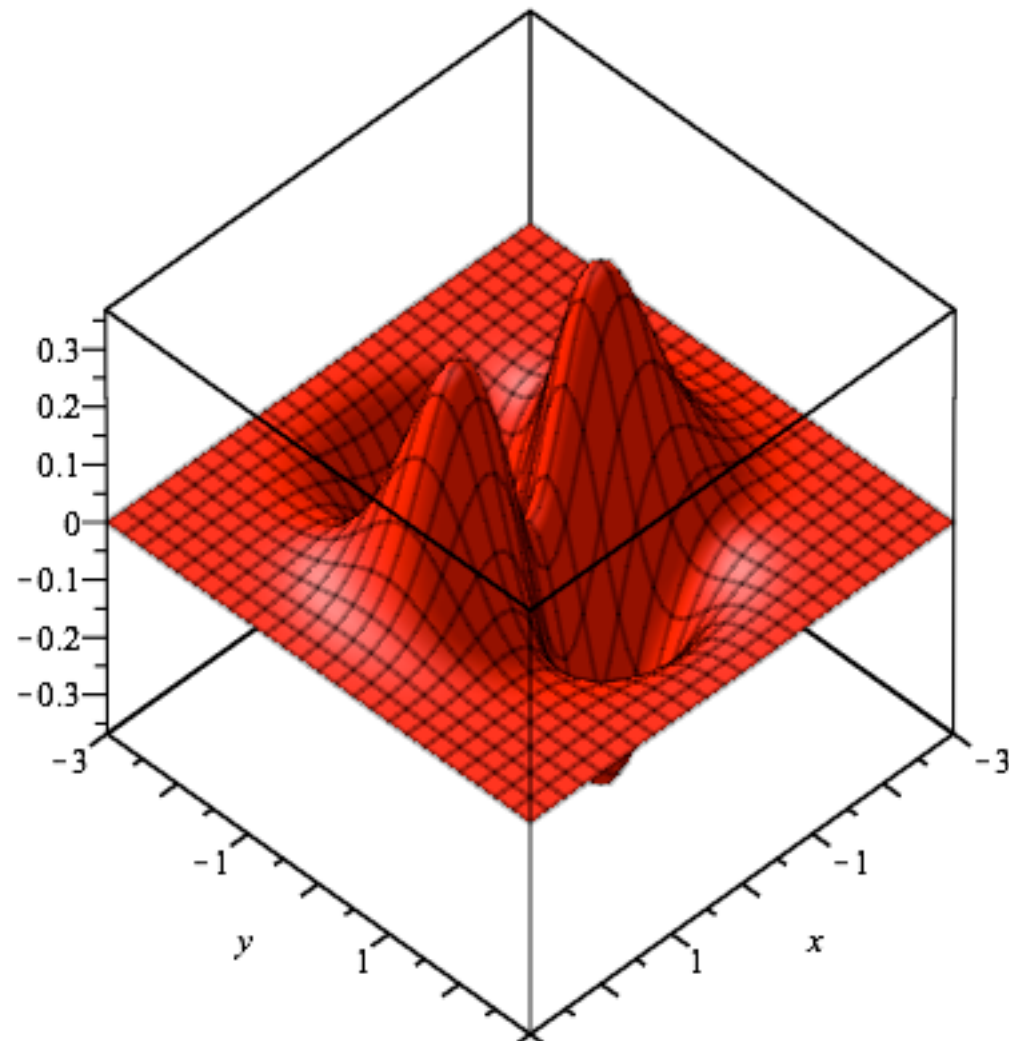
(1

Oppgave 10.1.14

a)

(i)

> *plot3d(($x^2 - y^2$) · exp(- $x^2 - y^2$), x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, axes = boxed, color = red, labels = [x, y, z])*



(ii)

Av figuren ser det lurt ut å velge nivåkurver der $f(x, y) = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.3$.

For å slippe å skrive opp uttrykket for funksjonen 7 ganger, definerer vi først funksjonen $f(x, y)$:

> $f := (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2) \cdot \exp(-x^2 - y^2)$

$$f := (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2) e^{-x^2 - y^2}$$

(2)

> $P1 := \text{implicitplot}(f(x, y) = 0.3, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{red}, \text{numpoints} = 10000)$

$P1 := \text{PLOT}(\dots)$

(3)

> $P2 := \text{implicitplot}(f(x, y) = 0.2, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{orange}, \text{numpoints} = 10000)$

$P2 := \text{PLOT}(\dots)$

(4)

> $P3 := \text{implicitplot}(f(x, y) = 0.1, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{yellow}, \text{numpoints} = 10000)$

$P3 := \text{PLOT}(\dots)$

(5)

> $P4 := \text{implicitplot}(f(x, y) = 0, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{green}, \text{numpoints} = 10000)$

$P4 := \text{PLOT}(\dots)$

(6)

> $P5 := \text{implicitplot}(f(x, y) = -0.1, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{blue}, \text{numpoints} = 10000)$

$P5 := \text{PLOT}(\dots)$

(7)

> $P6 := \text{implicitplot}(f(x, y) = -0.2, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{magenta}, \text{numpoints} = 10000)$

$P6 := \text{PLOT}(\dots)$

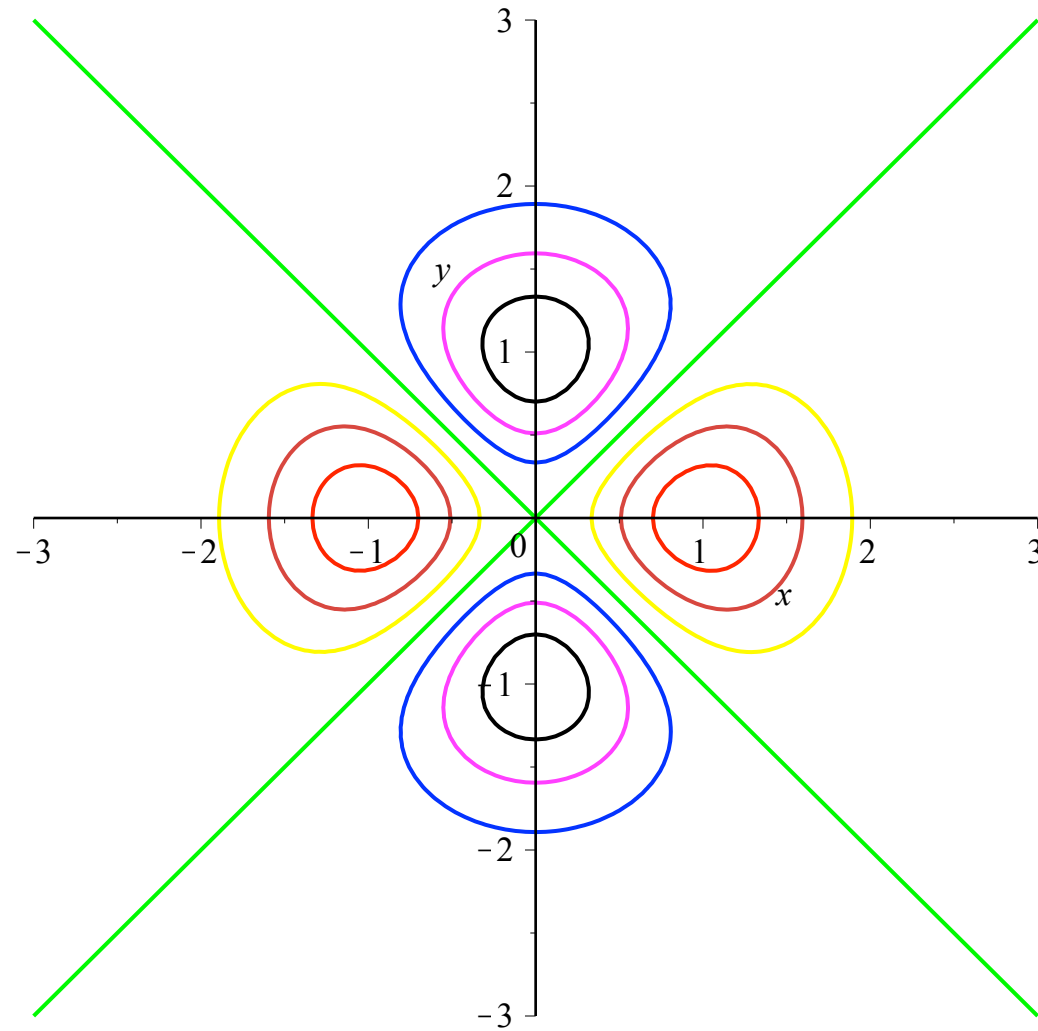
(8)

> $P7 := \text{implicitplot}(f(x, y) = -0.3, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{black}, \text{numpoints} = 10000)$

$P7 := \text{PLOT}(\dots)$

(9)

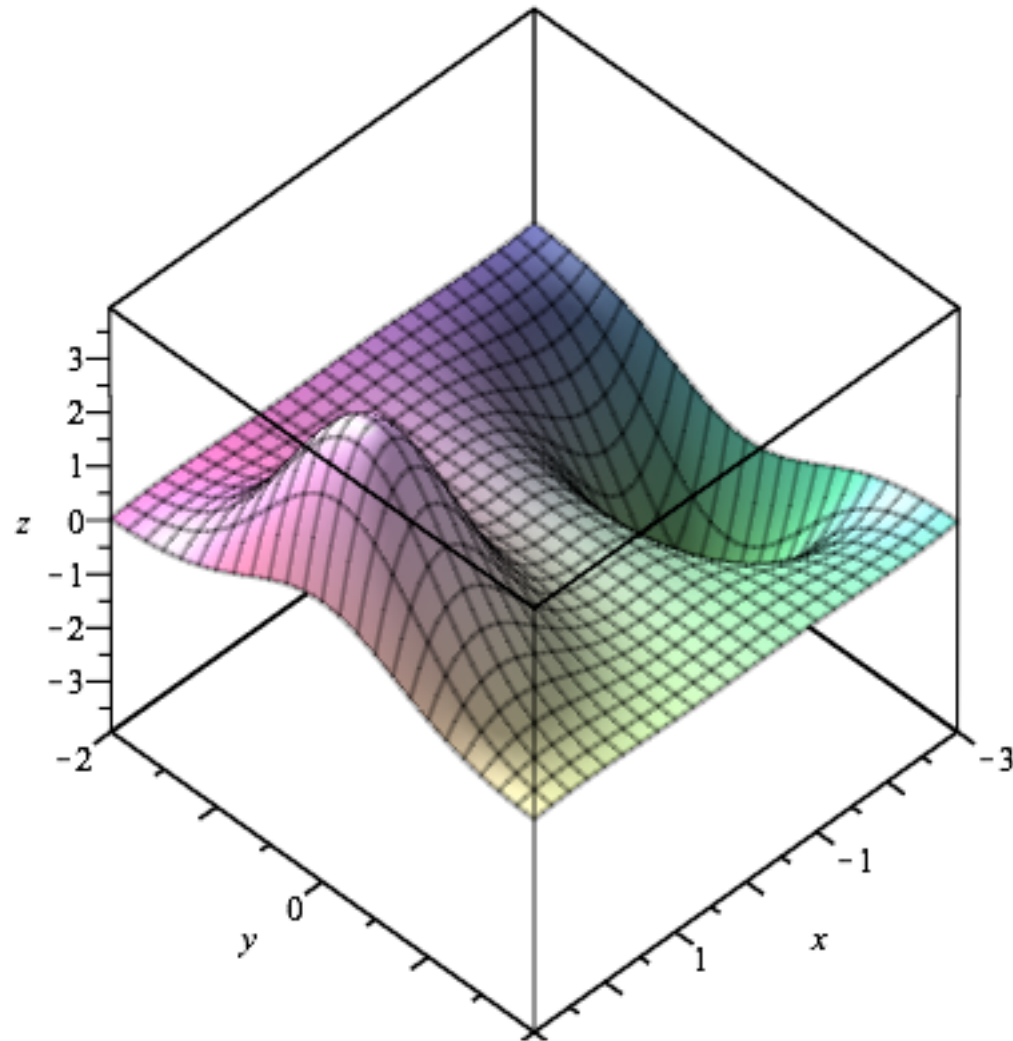
> $\text{display}(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)$



d)

(i)

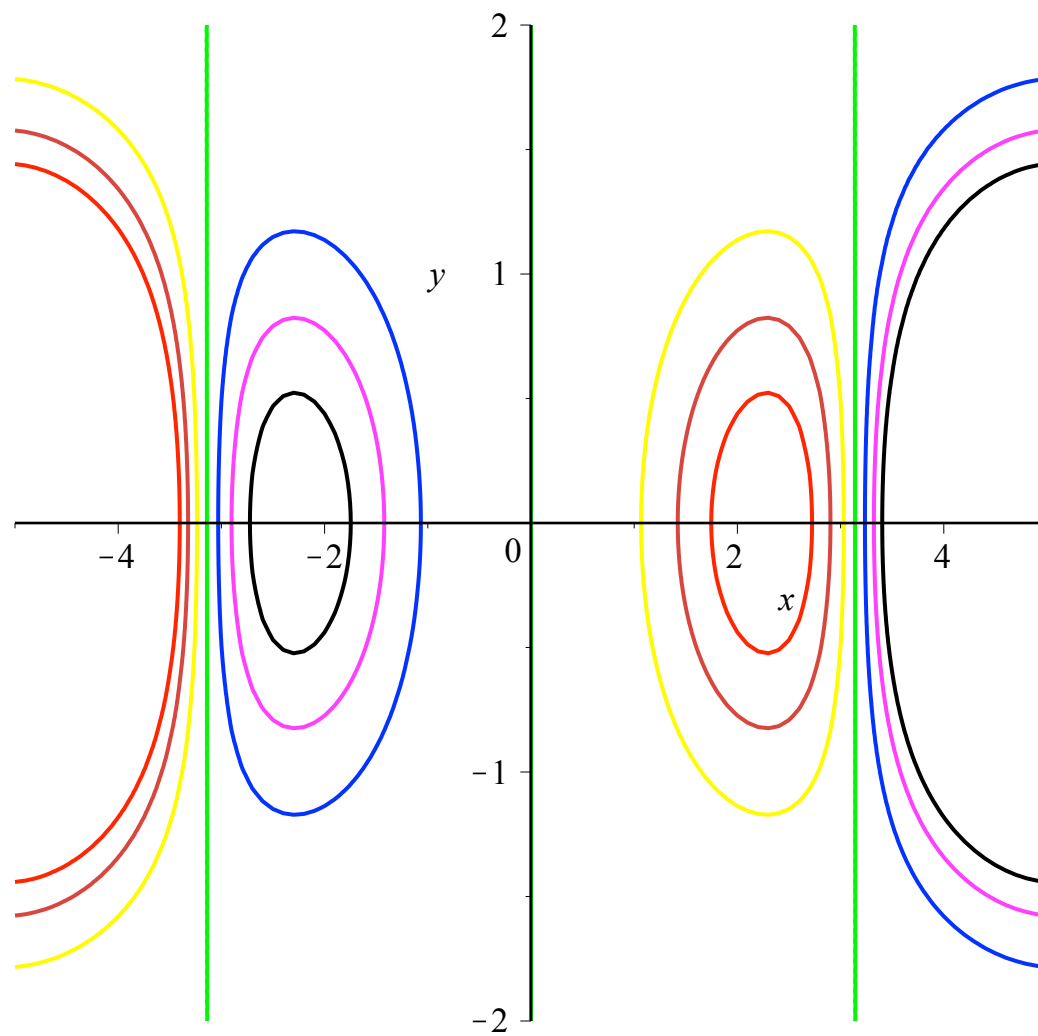
> `plot3d(x^2*exp(-y^2)*sin(x), x=-3..3, y=-2..2, axes = boxed, labels = [x, y, z])`



(ii)

> $P1 := \text{implicitplot}(x^2 \cdot \exp(-y^2) \cdot \sin(x) = 3, x = -5..5, y = -2..2, \text{gridrefine} = 2, \text{color} = \text{red})$
 $P1 := \text{PLOT}(\dots)$

<pre>> P2 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = 2, x = -5 .. 5, y = -2 .. 2, gridrefine = 2, color = orange) P2 := PLOT(...)</pre>	(11)
<pre>> P3 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = 1, x = -5 .. 5, y = -2 .. 2, gridrefine = 2, color = yellow) P3 := PLOT(...)</pre>	(12)
<pre>> P4 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = 0, x = -5 .. 5, y = -2 .. 2, gridrefine = 2, color = green) P4 := PLOT(...)</pre>	(13)
<pre>> P5 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = -1, x = -5 .. 5, y = -2 .. 2, gridrefine = 2, color = blue) P5 := PLOT(...)</pre>	(14)
<pre>> P6 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = -2, x = -5 .. 5, y = -2 .. 2, gridrefine = 2, color = magenta) P6 := PLOT(...)</pre>	(15)
<pre>> P7 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = -3, x = -5 .. 5, y = -2 .. 2, gridrefine = 2, color = black) P7 := PLOT(...)</pre>	(16)
<pre>> display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)</pre>	



Oppgave 10.1.15

a)

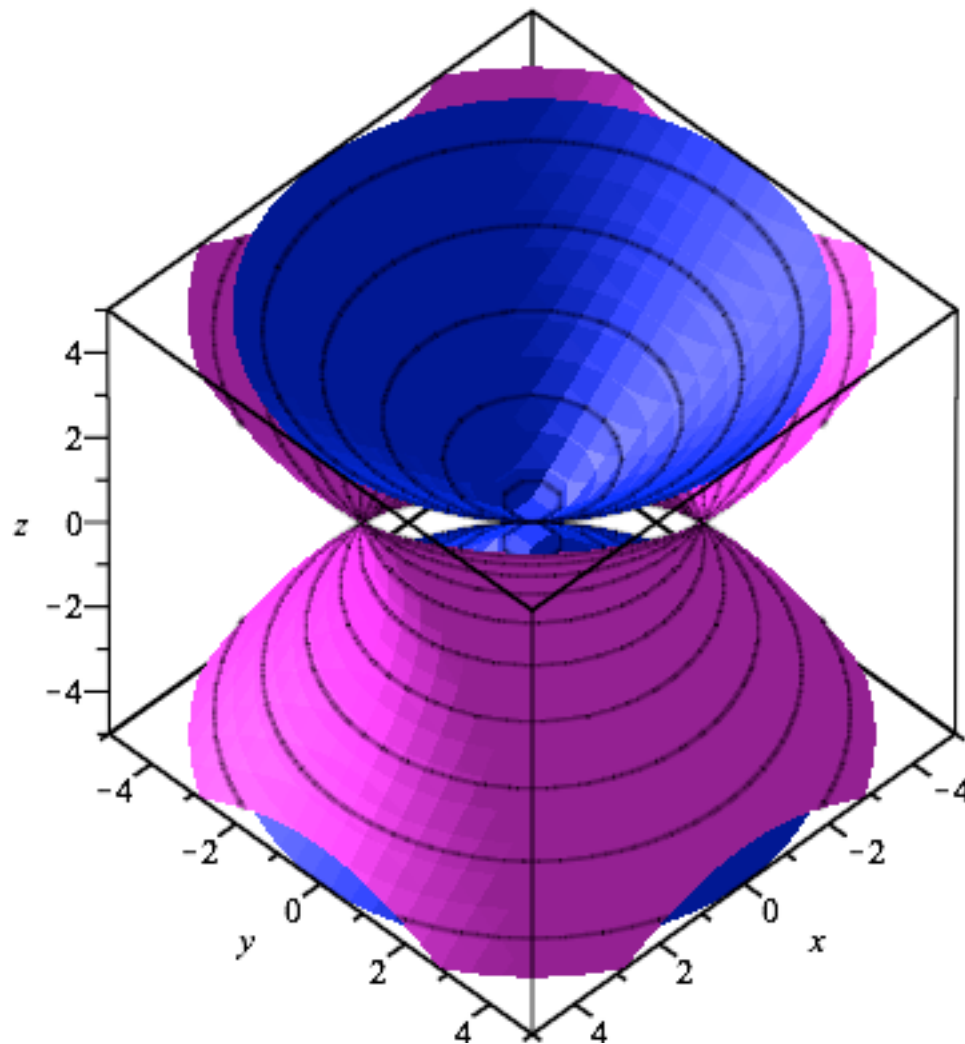
```
> P1 := implicitplot3d( $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 5$ ,  $z = -5 \dots 5$ , color = blue, numpoints = 10000, style = surfacecontour)
P1 := PLOT3D(...)
```

(17)

```
> P2 := implicitplot3d( $x^2 + y^2 - z^2 = 8$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 5$ ,  $z = -5 \dots 5$ , color = magenta, numpoints = 10000, style = surfacecontour)
P2 := PLOT3D(...)
```

(18)

```
> display(P1, P2)
```



Vi ser figuren best ved å dreie litt på den. Gjør det!

P1 er egentlig en dobbel kjegle, men Maple mangler noen punkter nær origo der dobbelkjeglen er smalest. (Slikt kan skje, men det hjelper å be om flere punkter.)

P2 er en enkappet hyperboloide. Det dumme er at P2 skygger for P1.

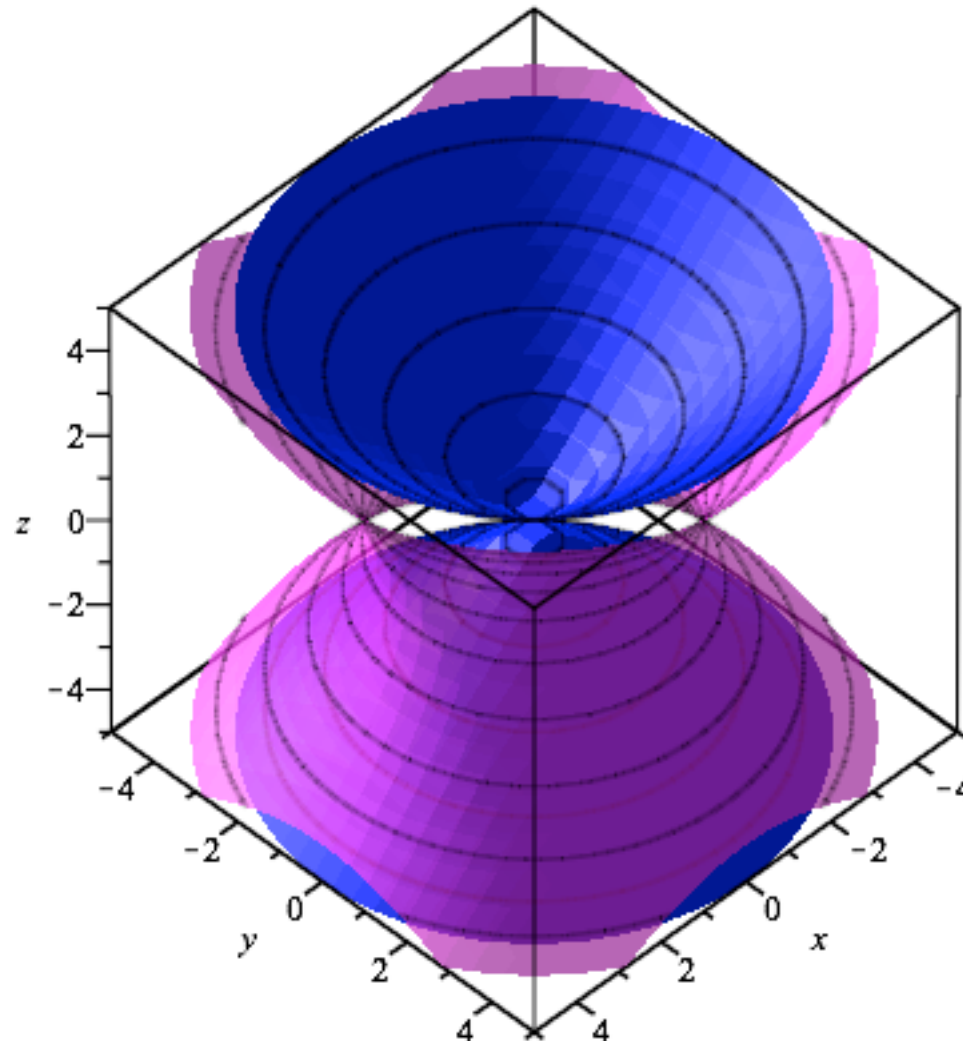
Vi kan gjøre P2 litt gjennomsiktig:

```
> P2 := implicitplot3d( $x^2 + y^2 - z^2 = 8$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 5$ ,  $z = -5 \dots 5$ , color = magenta, numpoints = 10000, style = surfacecontour, transparency = 0.3)
```

```
P2 := PLOT3D(...)
```

(19

```
> display(P1, P2, axes = boxed, labels = [x, y, z])
```



Det ble kanskje litt bedre.

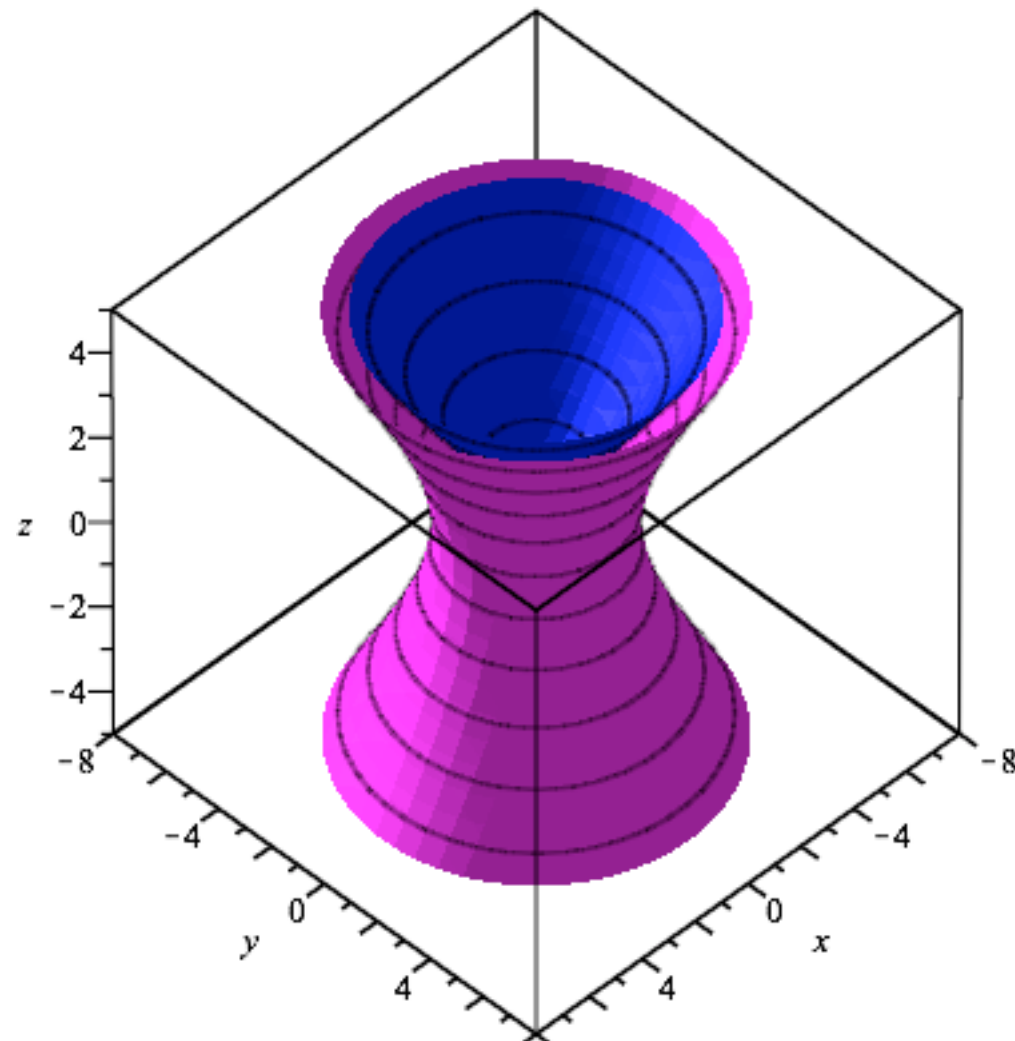
Men den røde flaten burde vel også ha vært kuttet av i en sirkel og ikke med et kvadrat.

```
> P2 := implicitplot3d( $x^2 + y^2 - z^2 = 8$ ,  $x = -8 .. 8$ ,  $y = -8 .. 8$ ,  $z = -5 .. 5$ , color = magenta, numpoints = 10000, style = surfacecontour)
```

```
P2 := PLOT3D(...)
```

(20

```
> display(P1, P2)
```



Ser du hvorfor denne forandringen i kommandoen fungerede?

>

```
[> with(plots)
```

Oppgave 10.1.14

a)

(i)

```
[> plot3d((x^2 - y^2) * exp(-x^2 - y^2), x=-3..3, y=-3..3, axes = boxed, color = red, labels = [x, y, z])
```

(ii)

Av figuren ser det lurt ut å velge nivåkurver der $f(x, y) = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.3$.

For å slippe å skrive opp uttrykket for funksjonen 7 ganger, definerer vi først funksjonen $f(x, y)$:

```
[> f := (x, y) -> (x^2 - y^2) * exp(-x^2 - y^2)
```

```
[> P1 := implicitplot(f(x, y) = 0.3, x=-3..3, y=-3..3, color = red, numpoints = 10000)
```

```
[> P2 := implicitplot(f(x, y) = 0.2, x=-3..3, y=-3..3, color = orange, numpoints = 10000)
```

```
[> P3 := implicitplot(f(x, y) = 0.1, x=-3..3, y=-3..3, color = yellow, numpoints = 10000)
```

```
[> P4 := implicitplot(f(x, y) = 0, x=-3..3, y=-3..3, color = green, numpoints = 10000)
```

```
[> P5 := implicitplot(f(x, y) = -0.1, x=-3..3, y=-3..3, color = blue, numpoints = 10000)
```

```
[> P6 := implicitplot(f(x, y) = -0.2, x=-3..3, y=-3..3, color = magenta, numpoints = 10000)
```

```
[> P7 := implicitplot(f(x, y) = -0.3, x=-3..3, y=-3..3, color = black, numpoints = 10000)
```

```
[> display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)
```

d)

(i)

```
> plot3d(x^2·exp(-y^2)·sin(x), x=-3..3, y=-2..2, axes = boxed, labels = [x, y, z])
```

(ii)

```
> P1 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = 3, x=-5..5, y=-2..2, gridrefine = 2, color = red)
> P2 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = 2, x=-5..5, y=-2..2, gridrefine = 2, color = orange)
> P3 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = 1, x=-5..5, y=-2..2, gridrefine = 2, color = yellow)
> P4 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = 0, x=-5..5, y=-2..2, gridrefine = 2, color = green)
> P5 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = -1, x=-5..5, y=-2..2, gridrefine = 2, color = blue)
> P6 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = -2, x=-5..5, y=-2..2, gridrefine = 2, color = magenta)
> P7 := implicitplot(x^2·exp(-y^2)·sin(x) = -3, x=-5..5, y=-2..2, gridrefine = 2, color = black)
> display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)
```

Oppgave 10.1.15

a)

```
> P1 := implicitplot3d(x^2 + y^2 - z^2 = 0, x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, color = blue, numpoints = 10000, style = surfacecontour)
> P2 := implicitplot3d(x^2 + y^2 - z^2 = 8, x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, color = magenta, numpoints = 10000, style = surfacecontour)
> display(P1, P2)
```

Vi ser figuren best ved å dreie litt på den. Gjør det!

P1 er egentlig en dobbel kjegle, men Maple mangler noen punkter nær origo der dobbelkjegele er smalest. (Slikt kan skje, men det hjelper å be om flere punkter.)

P2 er en enkappet hyperboloide. Det dumme er at P2 skygger for P1.

Vi kan gjøre P2 litt gjennomsiktig:

```
> P2 := implicitplot3d( $x^2 + y^2 - z^2 = 8$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 5$ ,  $z = -5 \dots 5$ ,  $color = magenta$ ,  $numpoints = 10000$ ,  $style = surfacecontour$ ,  
     $transparency = 0.3$ )  
=> display(P1, P2, axes = boxed, labels = [x, y, z])
```

Det ble kanskje litt bedre.

Men den røde flaten burde vel også ha vært kuttet av i en sirkel og ikke med et kvadrat.

```
> P2 := implicitplot3d( $x^2 + y^2 - z^2 = 8$ ,  $x = -8 \dots 8$ ,  $y = -8 \dots 8$ ,  $z = -5 \dots 5$ ,  $color = magenta$ ,  $numpoints = 10000$ ,  $style = surfacecontour$ )  
=> display(P1, P2)
```

Ser du hvorfor denne forandringen i kommandoen fungerte?

```
>
```

Oppgave 10.3.12.

a)

Først definerer vi funksjonen, slik at vi ikke trenger å skrive den opp flere ganger

$$> f := (x, y) \rightarrow \frac{x^3 \cdot \ln(x \cdot y)}{x^2 + y^2}$$

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{x^3 \ln(x y)}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

Det er en smaksak om man vil definere de partiellderiverte som funksjoner eller ikke. (Det kommer naturligvis også an på hva man skal bruke de partiellderiverte til etterpå.)

Det greieste er som oftest at de får være funksjoner, så vi gjør det slik:

$$> \text{diff}(f(x, y), x)$$

$$\frac{3 x^2 \ln(x y)}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{2 x^4 \ln(x y)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2)$$

$$> \text{simplify}(\%)$$

$$\frac{x^2 (x^2 \ln(x y) + 3 \ln(x y) y^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3)$$

$$> fx := (x, y) \rightarrow \frac{x^2 (x^2 \ln(x y) + 3 \ln(x y) y^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$fx := (x, y) \rightarrow \frac{x^2 (x^2 \ln(x y) + 3 \ln(x y) y^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (4)$$

Dette er altså den partiellderiverte av funksjonen med hensyn på x . Vi skal ha verdien av denne partiellderiverte for $x = 2$ og $y = 4$:

$$> fx(2, 4)$$

$$\frac{39}{25} \ln(2) + \frac{1}{5} \quad (5)$$

> *simplify*(%)

$$\frac{39}{25} \ln(2) + \frac{1}{5} \quad (6)$$

På tilsvarende måte får vi den partiellderiverte av f med hensyn på y :

> *diff*($f(x, y), y$)

$$\frac{x^3}{y(x^2 + y^2)} - \frac{2x^3 \ln(xy)y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (7)$$

> *simplify*(%)

$$- \frac{x^3 (2 \ln(xy) y^2 - x^2 - y^2)}{y (x^2 + y^2)^2} \quad (8)$$

> $fy := (x, y) \rightarrow - \frac{x^3 (2 \ln(xy) y^2 - x^2 - y^2)}{y (x^2 + y^2)^2}$

$$fy := (x, y) \rightarrow - \frac{x^3 (2 \ln(xy) y^2 - x^2 - y^2)}{y (x^2 + y^2)^2} \quad (9)$$

> $fy(2, 4)$

$$- \frac{12}{25} \ln(2) + \frac{1}{10} \quad (10)$$

Nå trenger vi egentlig ikke å skrive ut hvordan disse partiellderiverte egentlig ser ut, og slett ikke å forenkle uttrykkene for dem.

Oppgaven ber bare om verdien av de partiellderiverte i punktet (2,4).

I det følgende lar vi være å skrive ut uttrykket:

> *diff*($fx(x, y), x$)

(11)

$$\frac{2x(x^2 \ln(xy) + 3 \ln(xy)y^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 \left(2x \ln(xy) + 3x + \frac{3y^2}{x} \right)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4x^3(x^2 \ln(xy) + 3 \ln(xy)y^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \quad (11)$$

> subs(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{44}{125} \ln(8) + \frac{21}{50} \quad (12)$$

> diff(fx(x, y), y)

$$\frac{x^2 \left(\frac{x^2}{y} + 5y + 6 \ln(xy)y \right)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4x^2(x^2 \ln(xy) + 3 \ln(xy)y^2 + x^2 + y^2)y}{(x^2 + y^2)^3} \quad (13)$$

> subs(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{1}{20} - \frac{22}{125} \ln(8) \quad (14)$$

> diff(fy(x, y), y)

$$- \frac{4x^3 \ln(xy)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^3(2 \ln(xy)y^2 - x^2 - y^2)}{y^2(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^3(2 \ln(xy)y^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \quad (15)$$

> subs(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{11}{125} \ln(8) - \frac{21}{200} \quad (16)$$

> diff(fy(x, y), x)

$$- \frac{3x^2(2 \ln(xy)y^2 - x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^3 \left(\frac{2y^2}{x} - 2x \right)}{y(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^4(2 \ln(xy)y^2 - x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)^3} \quad (17)$$

> subs(x = 2, y = 4, %)

$$\frac{1}{20} - \frac{22}{125} \ln(8) \quad (18)$$

>

Oppgave 10.3.12.

a)

Først definerer vi funksjonen, slik at vi ikke trenger å skrive den opp flere ganger

```
> f := (x, y) -> 
$$\frac{x^3 \cdot \ln(x \cdot y)}{x^2 + y^2}$$

```

Det er en smaksak om man vil definere de partiellderivate som funksjoner eller ikke. (Det kommer naturligvis også an på hva man skal bruke de partiellderivate til etterpå.)

Det greieste er som oftest at de får være funksjoner, så vi gjør det slik:

```
> diff(f(x, y), x)
```

```
> simplify(%)
```

```
> fx := (x, y) -> 
$$\frac{x^2 (x^2 \ln(xy) + 3 \ln(xy) y^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

```

Dette er altså den partiellderivate av funksjonen med hensyn på x . Vi skal ha verdien av denne partiellderivate for $x = 2$ og $y = 4$:

```
> fx(2, 4)
```

```
> simplify(%)
```

På tilsvarende måte får vi den partiellderivate av f med hensyn på y :

```
> diff(f(x, y), y)
```

```
> simplify(%)
```

```
> fy := (x, y) -> 
$$-\frac{x^3 (2 \ln(xy) y^2 - x^2 - y^2)}{y (x^2 + y^2)^2}$$

```

```
> fy(2, 4)
```

Nå trenger vi egentlig ikke å skrive ut hvordan disse partiellderivate egentlig ser ut, og slett ikke å forenkle uttrykkene for dem.

Oppgaven ber bare om verdien av de partiellderiverte i punktet (2,4).
I det følgende lar vi være å skrive ut uttrykket:

```
> diff(fx(x,y), x)
=
> subs(x = 2, y = 4, %)
=
> diff(fx(x,y), y)
=
> subs(x = 2, y = 4, %)
=
> diff(fy(x,y), y)
=
> subs(x = 2, y = 4, %)
=
> diff(fy(x,y), x)
=
> subs(x = 2, y = 4, %)
=
>
```

Oppgave 10.6.10.

Kommandoen for taylorrekker for funksjoner av flere variable heter `mtaylor`.

Ved `taylor` måtte man be om en orden høyere enn den vi vil ha. Slik er det også for `mtaylor`.

Sentrum for rekken må skrives i en hakeparentes eller krølleparentes.

a)

$$\begin{aligned} &> \text{mtaylor}(\text{sqrt}(x^3 + y^2), \{x=2, y=3\}, 6) \\ &\sqrt{17} + \frac{6}{17} \sqrt{17} (x-2) + \frac{3}{17} \sqrt{17} (y-3) + \frac{33}{289} \sqrt{17} (x-2)^2 - \frac{18}{289} \sqrt{17} (y-3) (x-2) + \frac{4}{289} \sqrt{17} (y-3)^2 \\ &\quad - \frac{107}{9826} \sqrt{17} (x-2)^3 + \frac{9}{4913} \sqrt{17} (y-3) (x-2)^2 + \frac{30}{4913} \sqrt{17} (y-3)^2 (x-2) - \frac{12}{4913} \sqrt{17} (y-3)^3 \\ &\quad - \frac{447}{167042} \sqrt{17} (x-2)^4 + \frac{1401}{167042} \sqrt{17} (y-3) (x-2)^3 - \frac{501}{83521} \sqrt{17} (y-3)^2 (x-2)^2 + \frac{54}{83521} \sqrt{17} (y-3)^3 (x-2) \\ &\quad + \frac{28}{83521} \sqrt{17} (y-3)^4 + \frac{6213}{2839714} \sqrt{17} (x-2)^5 - \frac{9585}{2839714} \sqrt{17} (y-3) (x-2)^4 \\ &\quad + \frac{581}{2839714} \sqrt{17} (y-3)^2 (x-2)^3 + \frac{2079}{1419857} \sqrt{17} (y-3)^3 (x-2)^2 - \frac{666}{1419857} \sqrt{17} (y-3)^4 (x-2) \\ &\quad - \frac{36}{1419857} \sqrt{17} (y-3)^5 \end{aligned} \quad (1)$$

Dette er det eksakte taylorpolynomet.

Er man fornøyd med tilnærmede koefisienter, med for eksempel 4 sikre sifre, får vi det ved å sette

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\%, 4) \\ &-0.970 + 1.455 x + 0.7277 y + 0.4708 (x-2.)^2 - 0.2568 (y-3.) (x-2.) + 0.05706 (y-3.)^2 - 0.04490 (x-2.)^3 \\ &\quad + 0.007553 (y-3.) (x-2.)^2 + 0.02518 (y-3.)^2 (x-2.) - 0.01007 (y-3.)^3 - 0.01103 (x-2.)^4 + 0.03458 (y-3.) (x-2.)^3 \\ &\quad - 0.02473 (y-3.)^2 (x-2.)^2 + 0.002666 (y-3.)^3 (x-2.) + 0.001382 (y-3.)^4 + 0.009021 (x-2.)^5 \end{aligned} \quad (2)$$

$$- 0.01392 (y - 3.) (x - 2.)^4 + 0.0008436 (y - 3.)^2 (x - 2.)^3 + 0.006036 (y - 3.)^3 (x - 2.)^2 - 0.001934 (y - 3.)^4 (x - 2.) - 0.0001045 (y - 3.)^5$$

Det er et stort arbeid å kontrollere alle disse koeffisientene. Vi tar bare en stikkprøvekontroll. Koeffisienten foran $(y - 3)(x - 2)^4$ er for eksempel lik $-\frac{9585}{2839714} \sqrt{17}$ ifølge Maples utregning.

Formlene våre sier at den skal være lik $\frac{5}{5!} \cdot \frac{\delta^5 f}{\delta x^4 \delta y}$ evaluert i punktet $(2, 3)$. Vi prøver:

$$\begin{aligned} &> \text{diff}(\text{sqrt}(x^3 + y^2), x, x, x, x, y) \\ &\quad \frac{8505}{16} \frac{x^8 y}{(x^3 + y^2)^{9/2}} - \frac{1215}{2} \frac{x^5 y}{(x^3 + y^2)^{7/2}} + \frac{135 x^2 y}{(x^3 + y^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &> \text{subs}(x = 2, y = 3, \%) \\ &\quad - \frac{115020}{1419857} \sqrt{17} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &> \frac{5 \cdot \%}{5!} \\ &\quad - \frac{9585}{2839714} \sqrt{17} \end{aligned} \quad (5)$$

Det stemmer perfekt!

Vi kontrollerer koeffisienten $\frac{581}{2839714} \sqrt{17}$ foran leddet $(y - 3)^2 (x - 2)^3$ på den samme måten:

$$\begin{aligned} &> \text{diff}(\text{sqrt}(x^3 + y^2), x, x, x, y, y) \\ &\quad \frac{2835}{8} \frac{x^6 y^2}{(x^3 + y^2)^{9/2}} - \frac{405}{8} \frac{x^6}{(x^3 + y^2)^{7/2}} - \frac{405}{2} \frac{x^3 y^2}{(x^3 + y^2)^{7/2}} + \frac{81}{2} \frac{x^3}{(x^3 + y^2)^{5/2}} + \frac{9 y^2}{(x^3 + y^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^3 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &> \text{subs}(x = 2, y = 3, \%) \\ &\quad \frac{3486}{1419857} \sqrt{17} \end{aligned} \quad (7)$$

> $\frac{10\cdot\%}{5!}$
=
Bingo!
>

$$\frac{581}{2839714} \sqrt{17}$$

(8

Oppgave 10.6.10.

Kommandoen for taylorrekker for funksjoner av flere variable heter *mtaylor*.

Ved *taylor* måtte man be om en orden høyere enn den vi vil ha. Slik er det også for *mtaylor*.

Sentrum for rekken må skrives i en hakeparentes eller krølleparentes.

a)

```
> mtaylor(sqrt(x^3 + y^2), {x = 2, y = 3}, 6)
```

Dette er det eksakte taylorpolynomet.

Er man fornøyd med tilnærmede koeffisienter, med for eksempel 4 sikre sifre, får vi det ved å sette

```
> evalf(%, 4)
```

Det er et stort arbeid å kontrollere alle disse koeffisientene. Vi tar bare en stikkprøvekontroll. Koeffisienten foran $(y - 3)(x - 2)^4$ er for eksempel lik $-\frac{9585}{2839714} \sqrt{17}$ ifølge Maples utregning.

Formlene våre sier at den skal være lik $\frac{5}{5!} \cdot \frac{\delta^5 f}{\delta x^4 \delta y}$ evaluert i punktet $(2, 3)$. Vi prøver:

```
> diff(sqrt(x^3 + y^2), x, x, x, x, y)
```

```
> subs(x = 2, y = 3, %)
```

```
> \frac{5 \cdot \%}{5!}
```

Det stemmer perfekt!

Vi kontrollerer koeffisienten $\frac{581}{2839714} \sqrt{17}$ foran leddet $(y - 3)^2(x - 2)^3$ på den samme måten:

```
> diff(sqrt(x^3 + y^2), x, x, x, y, y)
```

```
> subs(x = 2, y = 3, %)
```

| $\frac{10\cdot\%}{5!}$
| Bingo!
| $>$

Oppgave 10.7.18.

Vi starter med å hente inn Maples vektorregningskommandoer:

```
> with(VectorCalculus)
[&x, `*`, `+`, `-`, `.` , < , > , <|> , About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, Compatibility, ConvertVector,
CrossProduct, Curl, Curvature, D, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters,
GetCoordinates, GetNames, GetPVDDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector,
IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis, Nabla, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector,
PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates,
SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, Tangent, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField,
VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series ]
```

(1)

Det enkleste vi kan gjøre, er å erstatte punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ med punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) + 0.1 \cdot \frac{\nabla F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)}{\left|\nabla F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)\right|}$.

Derfor prøver vi det. Vi definerer først funksjonen:

```
> F := (x, y, z) -> (z * cot((sin(x*y))^2) / sqrt(x^3 + y^3) + y * cos(z)^2
F := (x, y, z) -> z cot(sin(x*y)^2) / sqrt(x^3 + y^3) + y cos(z)^2
```

(2)

For å beregne ∇F skal vi bruke kommandoen *Gradient*, men det krever at vi henter inn Maples kommandoer for *VectorCalculus*

```
> with(VectorCalculus)
[&x, `*`, `+`, `-`, `.` , < , > , <|> , About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, Compatibility, ConvertVector,
CrossProduct, Curl, Curvature, D, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters,
GetCoordinates, GetNames, GetPVDDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector,
```

(3)

IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis, Nabla, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector, PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates, SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, Tangent, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField, VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series]

> $G := \text{Gradient}(F(x, y, z), [x, y, z])$

$$G := \left(\frac{2z(-1 - \cot(\sin(xy)^2)^2) \sin(xy) \cos(xy) y}{\sqrt{x^3 + y^3}} - \frac{3}{2} \frac{z \cot(\sin(xy)^2) x^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}} \right) \bar{e}_x + \left(\frac{2z(-1 - \cot(\sin(xy)^2)^2) \sin(xy) \cos(xy) x}{\sqrt{x^3 + y^3}} - \frac{3}{2} \frac{z \cot(\sin(xy)^2) y^2}{(x^3 + y^3)^{3/2}} + \cos(z)^2 \right) \bar{e}_y + \left(\frac{\cot(\sin(xy)^2)}{\sqrt{x^3 + y^3}} - 2y \cos(z) \sin(z) \right) \bar{e}_z \quad (4)$$

> $GG := \text{subs}\left(x = \frac{\text{Pi}}{4}, y = \frac{\text{Pi}}{3}, z = \frac{\text{Pi}}{6}, G\right)$

$$GG := \left(\frac{1}{819} \frac{\pi^2 \left(-1 - \cot\left(\sin\left(\frac{1}{12} \pi^2\right)^2\right)^2\right) \sin\left(\frac{1}{12} \pi^2\right) \cos\left(\frac{1}{12} \pi^2\right) \sqrt{91} \sqrt{1728}}{\sqrt{\pi^3}} - \frac{27}{8281} \frac{\pi^3 \cot\left(\sin\left(\frac{1}{12} \pi^2\right)^2\right) \sqrt{91} \sqrt{1728}}{(\pi^3)^{3/2}} \right) \bar{e}_x + \left(\frac{1}{1092} \frac{\pi^2 \left(-1 - \cot\left(\sin\left(\frac{1}{12} \pi^2\right)^2\right)^2\right) \sin\left(\frac{1}{12} \pi^2\right) \cos\left(\frac{1}{12} \pi^2\right) \sqrt{91} \sqrt{1728}}{\sqrt{\pi^3}} \right) \bar{e}_y + \left(\frac{\cot(\sin(xy)^2)}{\sqrt{x^3 + y^3}} - 2y \cos(z) \sin(z) \right) \bar{e}_z \quad (5)$$

$$-\frac{48}{8281} \frac{\pi^3 \cot\left(\sin\left(\frac{1}{12} \pi^2\right)^2\right) \sqrt{91} \sqrt{1728}}{(\pi^3)^{3/2}} + \frac{3}{4} \left. \right\} \bar{e}_y + \left(\frac{1}{91} \frac{\cot\left(\sin\left(\frac{1}{12} \pi^2\right)^2\right) \sqrt{91} \sqrt{1728}}{\sqrt{\pi^3}} - \frac{1}{6} \pi \sqrt{3} \right) \bar{e}_z$$

Svaret vi fikk, ser voldsomt ut. Men det er ikke behov for det eksakte svaret

> $GGf := evalf(GG)$

$$GGf := (-2.024959302)\bar{e}_x + (-1.169525781)\bar{e}_y + (0.4074561273)\bar{e}_z \quad (6)$$

Dette er altså gradienten til $F(x, y, z)$ i det gitte punktet. Vi vil ha enhetsvektoren i denne retningen. Det får vi til med kommandoen *Normalize* :

> $GGn := Normalize(GGf)$

$$GGn := (-0.853095054728077)\bar{e}_x + (-0.492709487624108)\bar{e}_y + (0.171657181887542)\bar{e}_z \quad (7)$$

Nå virker det ganske kunstig å tviholde på det opprinnelige punktet på eksakt form. Derfor ber vi også om å få det på desimalform:

> $P := evalf\left(\left\langle \frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{3}, \frac{\text{Pi}}{6} \right\rangle\right)$

$$P := (0.7853981635)e_x + (1.047197551)e_y + (0.5235987758)e_z \quad (8)$$

Nå er det fristende å skrive

> $Pny := P + 0.1 \cdot GGn$

Error, (in VectorCalculus:-) cannot add a free Vector and a vector field

Men det gikk ikke. Maple oppfatter *Gradient(...)* som et vektorfelt som den behandler på en annen måte enn vanlige vektorer. (Vektorfelter er noe vi kommer tilbake til i kapittel 12.)

Dette viser Maple ved at det settes små streker over enhetsvektorene e_x , e_y og e_z .

Derfor må vi skrive punktet P som et vektorfelt også:

$$\begin{aligned} > P := \text{VectorField}\left(\left\langle \frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{3}, \frac{\text{Pi}}{6} \right\rangle, 'cartesian'[x, y, z]\right) \\ & P := \frac{1}{4} \pi \bar{e}_x + \frac{1}{3} \pi \bar{e}_y + \frac{1}{6} \pi \bar{e}_z \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > Pny := P + 0.1 \cdot GGn \\ & Pny := \left(\frac{1}{4} \pi - 0.0853095054728077 \right) \bar{e}_x + \left(\frac{1}{3} \pi - 0.0492709487624108 \right) \bar{e}_y + \left(\frac{1}{6} \pi + 0.0171657181887542 \right) \bar{e}_z \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} > \text{evalf}(Pny) \\ & (0.700088658027192) \bar{e}_x + (0.997926602237589) \bar{e}_y + (0.540764493988754) \bar{e}_z \end{aligned} \quad (11)$$

For å kontrollere om det nye punktet virkelig gir en forbedring, sjekker vi funksjonsverdien i det gamle punktet P og sammenligner med funksjonsverdien i det nye punktet Pny :

$$\begin{aligned} > \text{evalf}\left(F\left(\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{3}, \frac{\text{Pi}}{6}\right)\right) \\ & 1.473593256 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} > \text{evalf}(F(0.700088658027192, 0.997926602237589, 0.540764493988754)) \\ & 1.798796949 \end{aligned} \quad (13)$$

SUKSESS!

>

Oppgave 10.7.18.

Vi starter med å hente inn Maples vektorregningskommandoer:

```
[> with(VectorCalculus)
```

Det enkleste vi kan gjøre, er å erstatte punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ med punktet $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) + 0.1 \cdot \frac{\nabla F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)}{\left|\nabla F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)\right|}$.

Derfor prøver vi det. Vi definerer først funksjonen:

```
[> F := (x,y,z) -> (z*cot((sin(x*y))^2))/sqrt(x^3+y^3) + y*cos(z)^2
```

For å beregne ∇F skal vi bruke kommandoen *Gradient*, men det krever at vi henter inn Maples kommandoer for *VectorCalculus*

```
[> with(VectorCalculus)
```

```
[> G := Gradient(F(x,y,z), [x,y,z])
```

```
[> GG := subs(x = Pi/4, y = Pi/3, z = Pi/6, G)
```

Svaret vi fikk, ser voldsomt ut. Men det er ikke behov for det eksakte svaret

```
[> GGf := evalf(GG)
```

Dette er altså gradienten til $F(x, y, z)$ i det gitte punktet. Vi vil ha enhetsvektoren i denne retningen. Det får vi til med kommandoen *Normalize*:

```
[> GGn := Normalize(GGf)
```

Nå virker det ganske kunstig å tviholde på det opprinnelige punktet på eksakt form. Derfor ber vi også om å få det på desimalform:

```
> P := evalf( $\left\langle \frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{3}, \frac{\text{Pi}}{6} \right\rangle$ )
```

Nå er det fristende å skrive

```
> Pny := P + 0.1 · GGn
```

Men det gikk ikke. Maple oppfatter *Gradient(...)* som et vektorfelt som den behandler på en annen måte enn vanlige vektorer. (Vektorfelter er noe vi kommer tilbake til i kapittel 12.)

Dette viser Maple ved at det settes små streker over enhetsvektorene e_x , e_y og e_z .

Derfor må vi skrive punktet P som et vektorfelt også:

```
> P := VectorField( $\left\langle \frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{3}, \frac{\text{Pi}}{6} \right\rangle$ , 'cartesian'[x, y, z])
```

```
> Pny := P + 0.1 · GGn
```

```
> evalf(Pny)
```

For å kontrollere om det nye punktet virkelig gir en forbedring, sjekker vi funksjonsverdien i det gamle punktet P og sammenligner med funksjonsverdien i det nye punktet Pny :

```
> evalf( $F\left(\frac{\text{Pi}}{4}, \frac{\text{Pi}}{3}, \frac{\text{Pi}}{6}\right)$ )
```

```
> evalf( $F(0.700088658027192, 0.997926602237589, 0.540764493988754)$ )
```

SUKSESS!

```
>
```

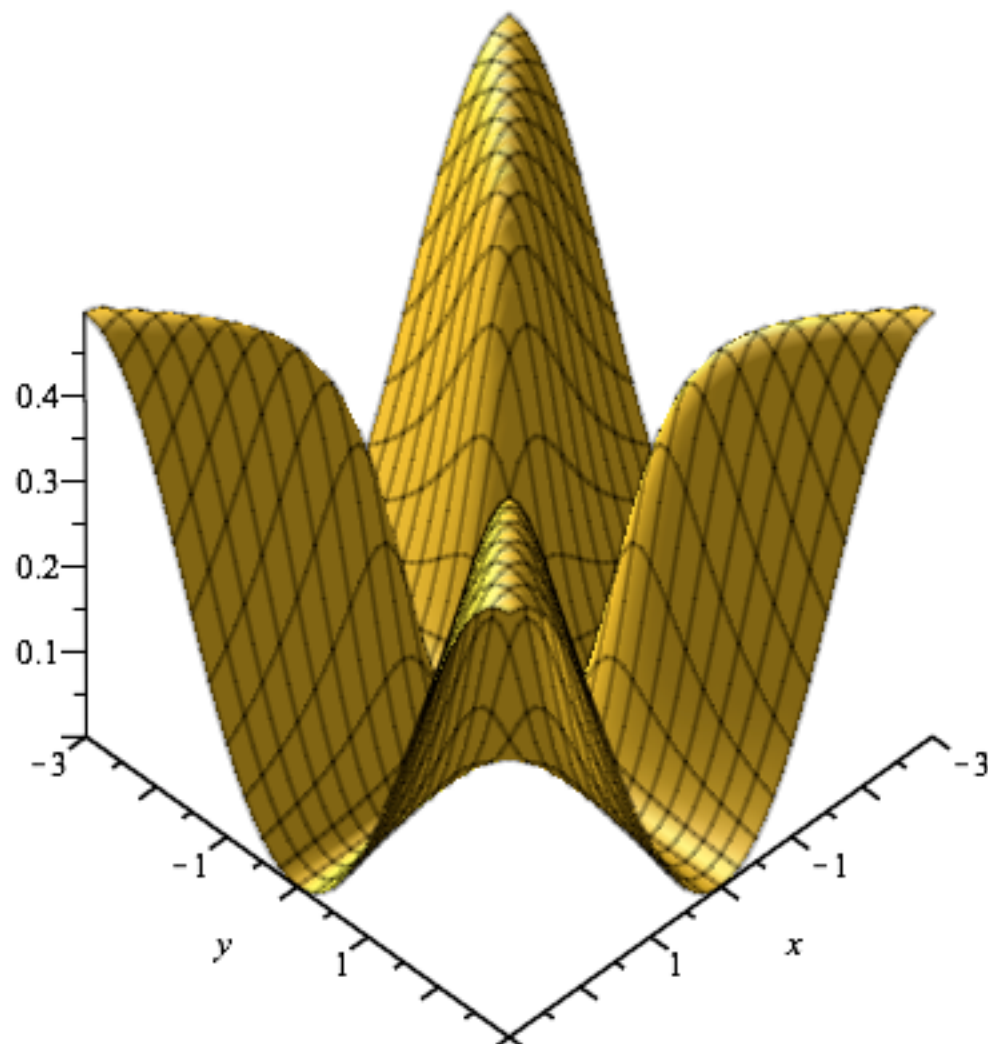
Oppgave 10.8.10:

> *with(plots)*
[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

(1

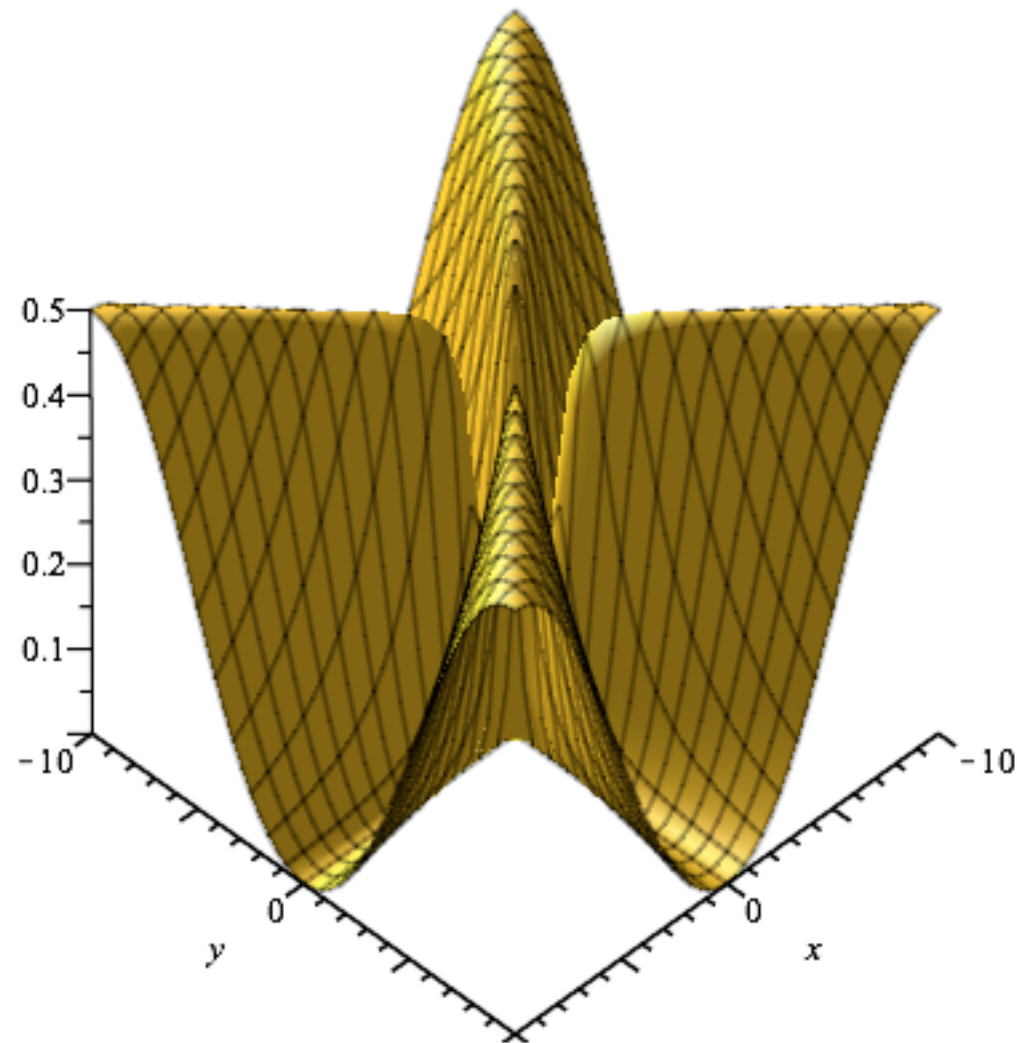
a)

> *plot3d* $\left(\frac{x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4 + 1}, x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, color = "Goldenrod", axes = framed\right)$



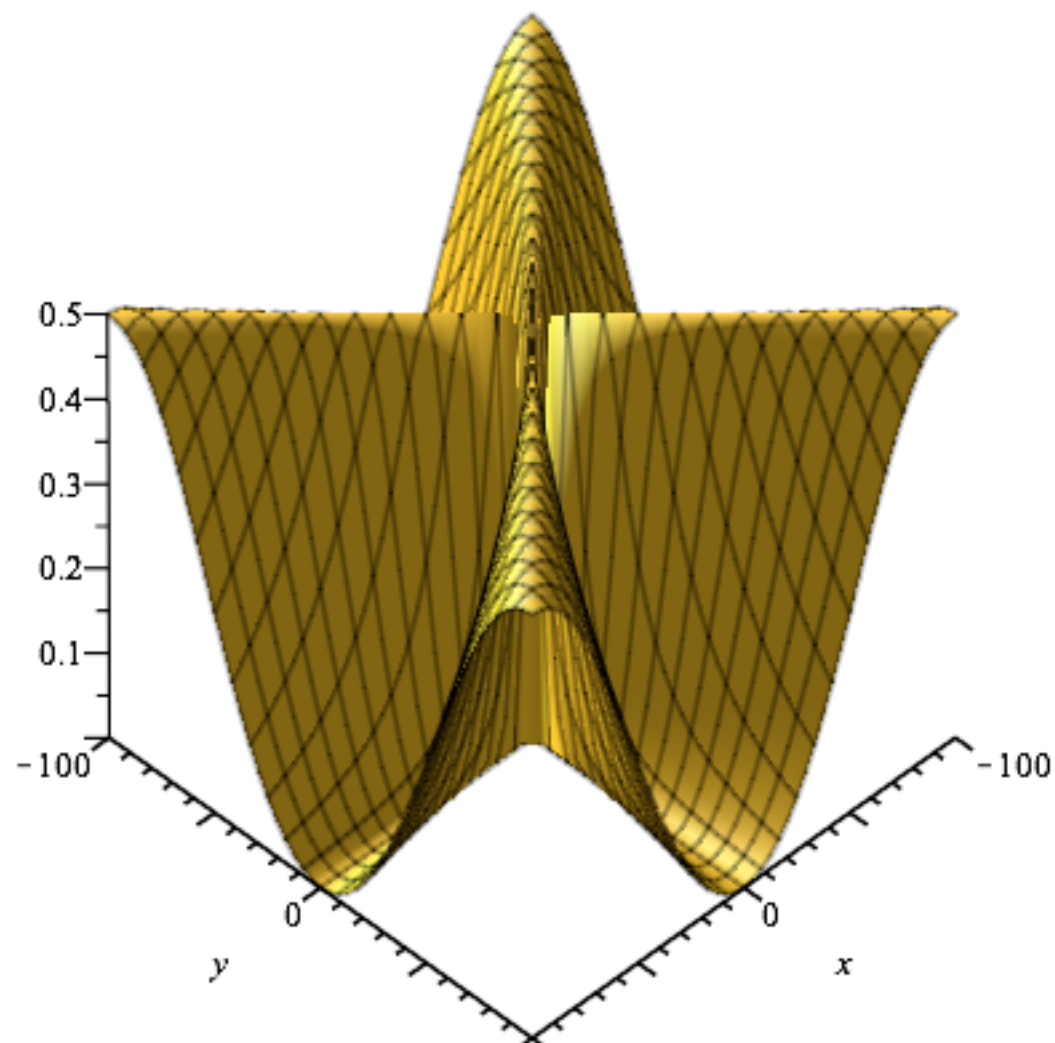
Toppene i dette avgrensede landskapet havnet i de fire hjørnene. (Du ser det bedre om du dreier litt på figuren.) Vi må derfor tegne grafen over et større område. Vi prøver:

```
> plot3d( $\frac{x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4 + 1}$ , x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, color = "Goldenrod", axes = framed)
```



Det hjalp ikke. Vi tar et siste forsøk:

```
> plot3d( $\frac{x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4 + 1}$ , x = -100 .. 100, y = -100 .. 100, color = "Goldenrod", axes = framed)
```



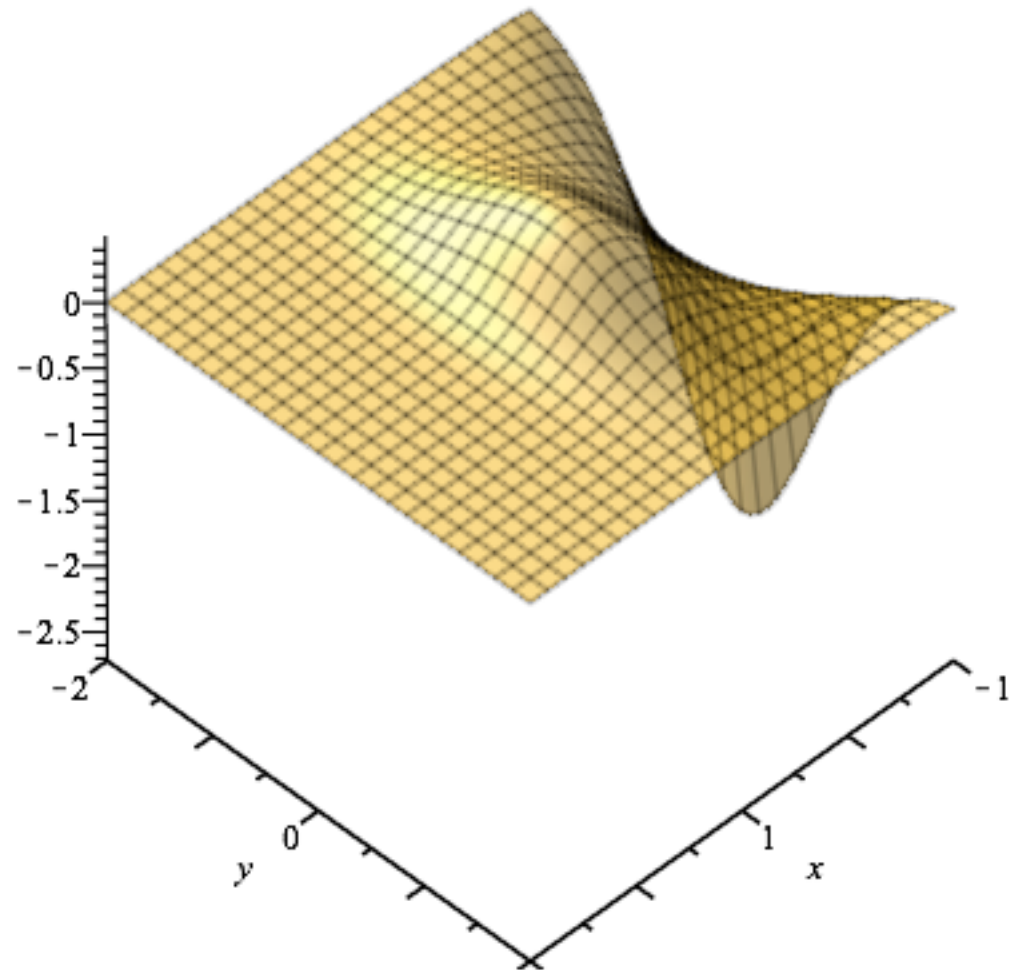
Nei, dette går ikke. La oss gå tilbake til funksjonsuttrykket og bruke hjernen i stedet for Maple.

Et lite resonnement viser at funksjonsverdien er størst når både x^2 og y^2 er størst mulig, og at grenseverdien når $x^2 \rightarrow \infty$ og $y^2 \rightarrow \infty$ er lik $\frac{1}{2}$.

Funksjonen har altså ingen maksima, verken lokale eller globale, dersom vi ikke begrenser definisjonsområdet.

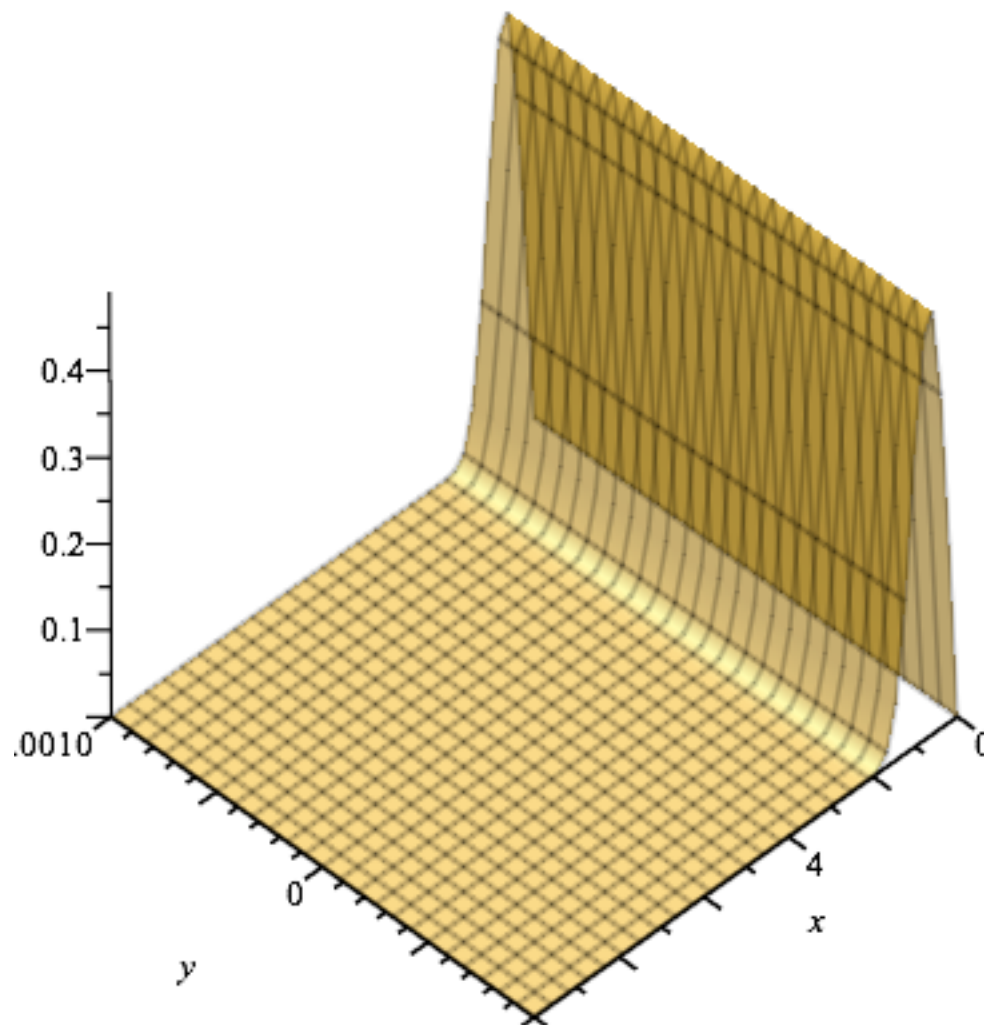
b)

> `plot3d(x·exp(-x3 - y2), x=-1..3, y=-2..2, axes=framed, color="Goldenrod", transparency=0.3)`



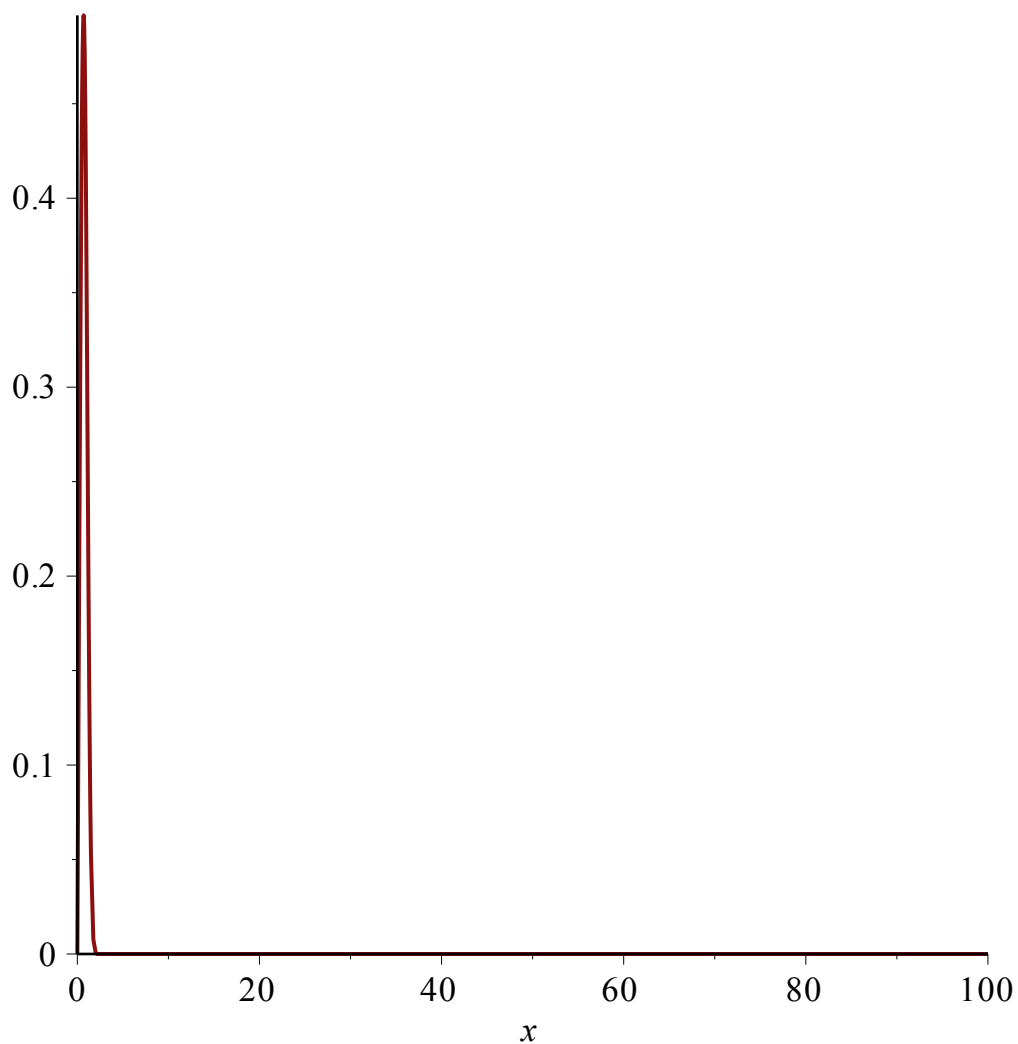
Det ser ut som om funksjonen har et lokalt maksimum i nærheten av origo? Det kan ikke være selve origo, for der er $x = 0$, og dervedfunksjonsverdien lik null. Det er også klart at eksponensialfunksjonen bare har positive funksjonsverdier, så $x > 0$ i mulige lokale maksimalpunkter. Videre er $f(-y) = f(y)$, og funksjonsverdien avtar når y^2 øker. Så $y = 0$ i eventuelle lokale maksimumspunkter. Vi prøver derfor å tegne grafen for $x > 0$ og $y \approx 0$:

> `plot3d( $x \cdot \exp(-x^3 - y^2)$ ,  $x = 0 \dots 10$ ,  $y = -0.001 \dots 0.001$ ,  $axes = framed$ ,  $color = "Goldenrod"$ ,  $transparency = 0.3$ )`



Det ser ut til at funksjonen har et eneste maksimum, og at det ligger nær punktet $(1, 0)$. Egentlig burde vi heller tegne grafen til énvariabelfunksjonen $g(x) = x \cdot \exp(-x^3)$ for $x > 0$. Men det beste er antakelig å koble inn hjernen litt igjen. For ser vi på funksjonsuttrykket, er det klart at $\exp(-x^3) \rightarrow 0$ veldig raskt når $x \rightarrow \infty$, og mye raskere enn x vokser. Så produktet går mot null. Altså er dette virkelig det eneste maksimumspunktet. For å være helt trygg, kan vi jo tegne grafen til $g(x)$:

```
> plot(x·exp(-x³), x = 0..100)
```

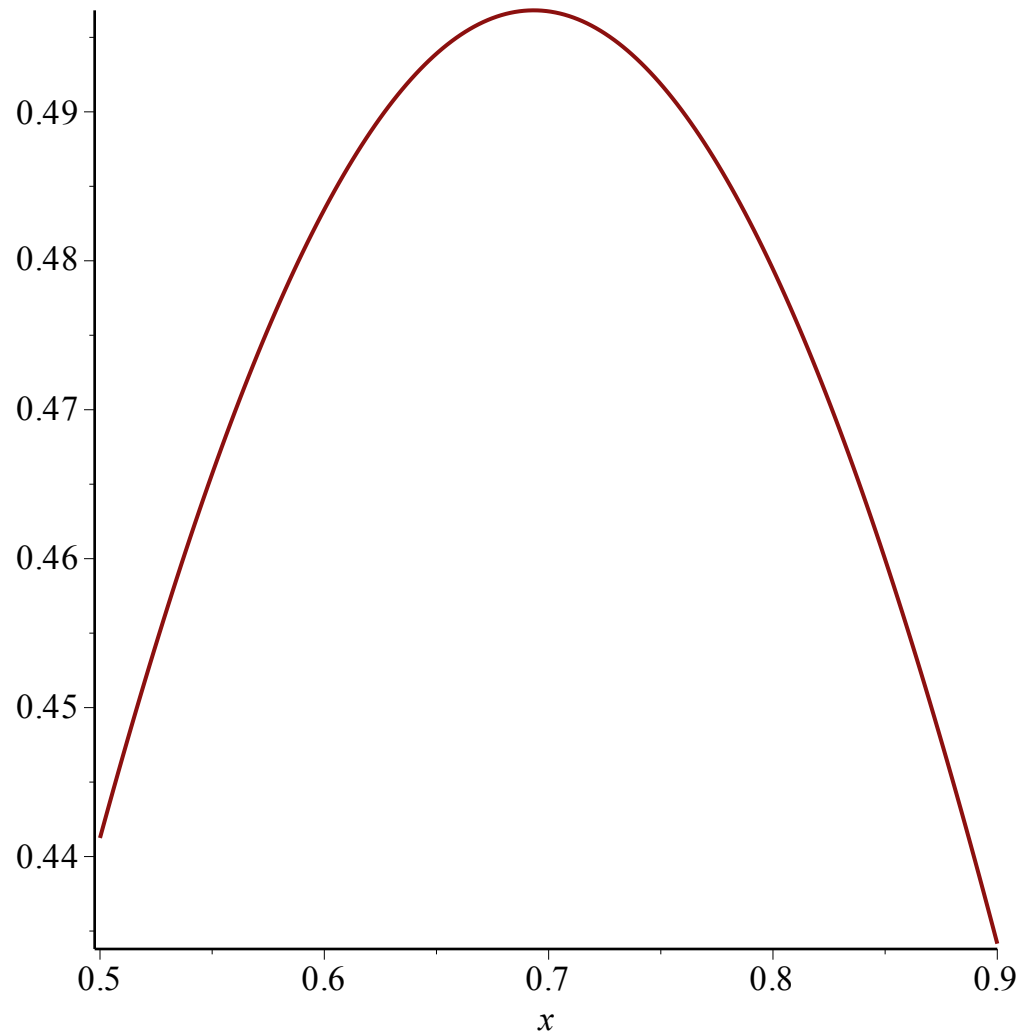


> `plot(x·exp(-x3), x = 0.9..1.1)`

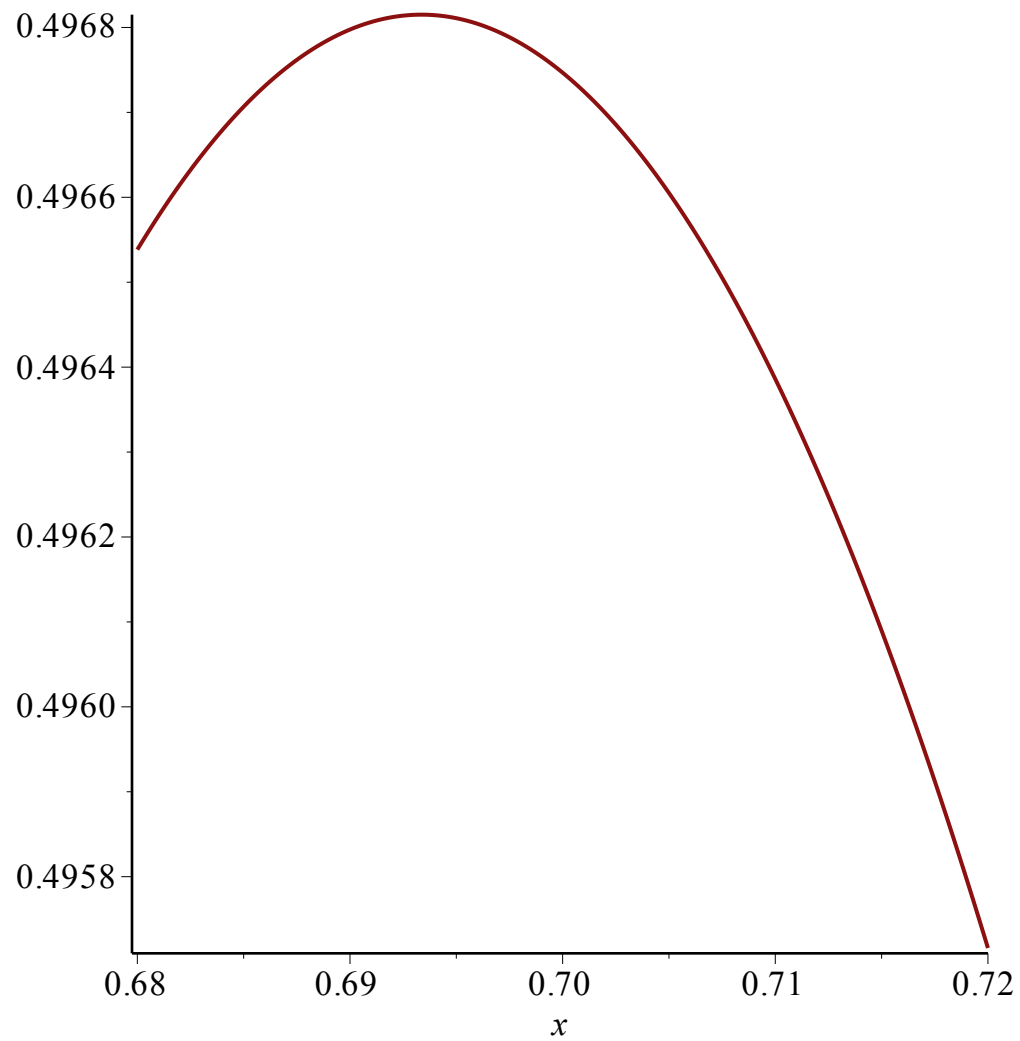
Oj, maksimumspunktet ligger ikke så veldig nær $x = 1$ likevel. (Grafer kan bedra!)

Men vi gir oss ikke:

> `plot(x·exp(-x3), x = 0.5..0.9)`



> `plot(x·exp(-x3), x = 0.68..0.72)`



Vi anslår at landskapet har sin eneste topp i punktet $(0.695, 0, 0.4968)$.



Oppgave 10.8.10:

```
> with(plots)
```

a)

```
> plot3d( (x^2*y^2)/(x^4+y^4+1), x=-3..3, y=-3..3, color="Goldenrod", axes=framed )
```

Toppene i dette avgrensede landskapet havnet i de fire hjørnene. (Du ser det bedre om du dreier litt på figuren.) Vi må derfor tegne grafen over et større område. Vi prøver:

```
> plot3d( (x^2*y^2)/(x^4+y^4+1), x=-10..10, y=-10..10, color="Goldenrod", axes=framed )
```

Det hjalp ikke. Vi tar et siste forsøk:

```
> plot3d( (x^2*y^2)/(x^4+y^4+1), x=-100..100, y=-100..100, color="Goldenrod", axes=framed )
```

Nei, dette går ikke. La oss gå tilbake til funksjonsuttrykket og bruke hjernen i stedet for Maple.

Et lite resonnement viser at funksjonsverdien er størst når både x^2 og y^2 er størst mulig, og at grenseverdien når $x^2 \rightarrow \infty$ og $y^2 \rightarrow \infty$ er lik $\frac{1}{2}$.

Funksjonen har altså ingen maksima, verken lokale eller globale, dersom vi ikke begrenser definisjonsområdet.

b)

```
> plot3d(x*exp(-x^3-y^2), x=-1..3, y=-2..2, axes=framed, color="Goldenrod", transparency=0.3)
```

Det ser ut som om funksjonen har et lokalt maksimum i nærheten av origo? Det kan ikke være selve origo, for der er $x = 0$, og

derivedfunksjonsverdien lik null. Det er også klart at eksponensialfunksjonen bare har positive funksjonsverdier, så $x > 0$ i mulige lokale maksimalpunkter. Videre er $f(-y) = f(y)$, og funksjonsverdien avtar når y^2 øker. Så $y = 0$ i eventuelle lokale maksimumspunkter. Vi prøver derfor å tegne grafen for $x > 0$ og $y \approx 0$:

```
> plot3d(x*exp(-x^3 - y^2), x = 0..10, y = -0.001..0.001, axes = framed, color = "Goldenrod", transparency = 0.3)
```

Det ser ut til at funksjonen har et eneste maksimum, og at det ligger nær punktet $(1, 0)$. Egentlig burde vi heller tegne grafen til énvariabelfunksjonen $g(x) = x \cdot \exp(-x^3)$ for $x > 0$. Men det beste er antakelig å koble inn hjernen litt igjen. For ser vi på funksjonsuttrykket, er det klart at $\exp(-x^3) \rightarrow 0$ veldig raskt når $x \rightarrow \infty$, og mye raskere enn x vokser. Så produktet går mot null. Altså er dette virkelig det eneste maksimumspunktet. For å være helt trygg, kan vi jo tegne grafen til $g(x)$:

```
> plot(x*exp(-x^3), x = 0..100)
```

```
> plot(x*exp(-x^3), x = 0.9..1.1)
```

Oj, maksimumspunktet ligger ikke så veldig nær $x = 1$ likevel. (Grafer kan bedra!)

Men vi gir oss ikke:

```
> plot(x*exp(-x^3), x = 0.5..0.9)
```

```
> plot(x*exp(-x^3), x = 0.68..0.72)
```

Vi anslår at landskapet har sin eneste topp i punktet $(0.695, 0, 0.4968)$.

```
>
```

Oppgave 10.9.15:

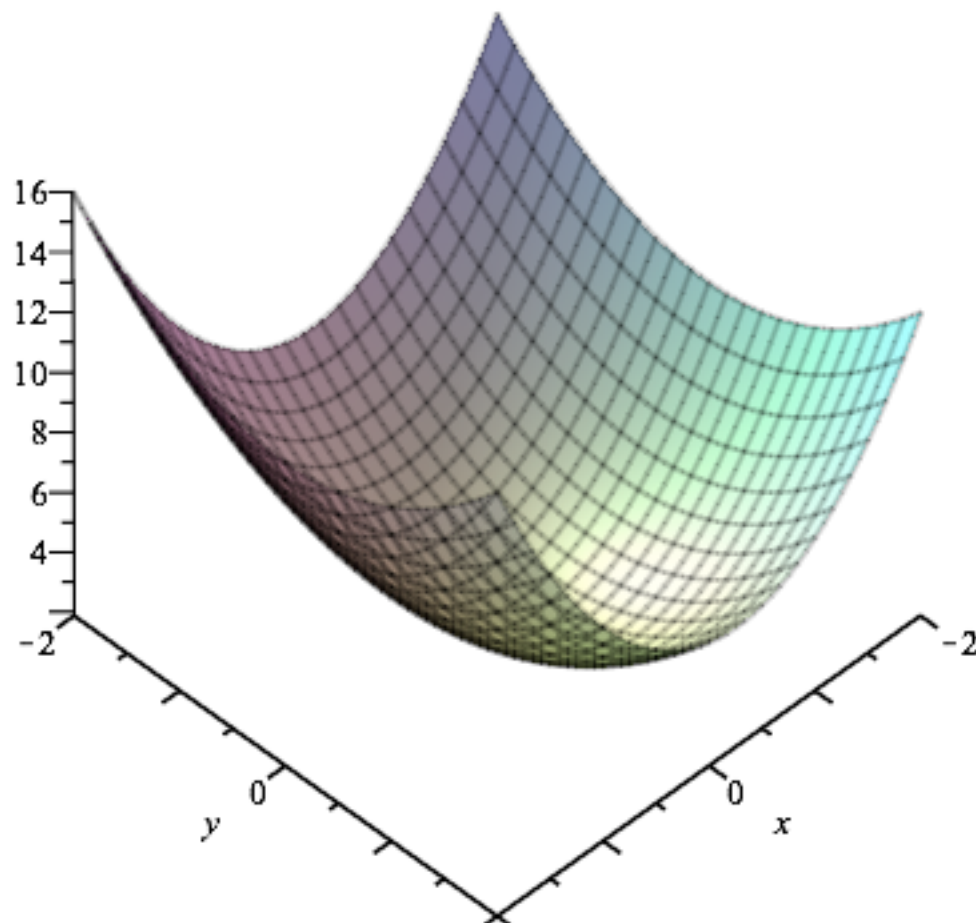
For å plotte disse figurene, henter vi inn Maples plottekommandoer:

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

(1

a)

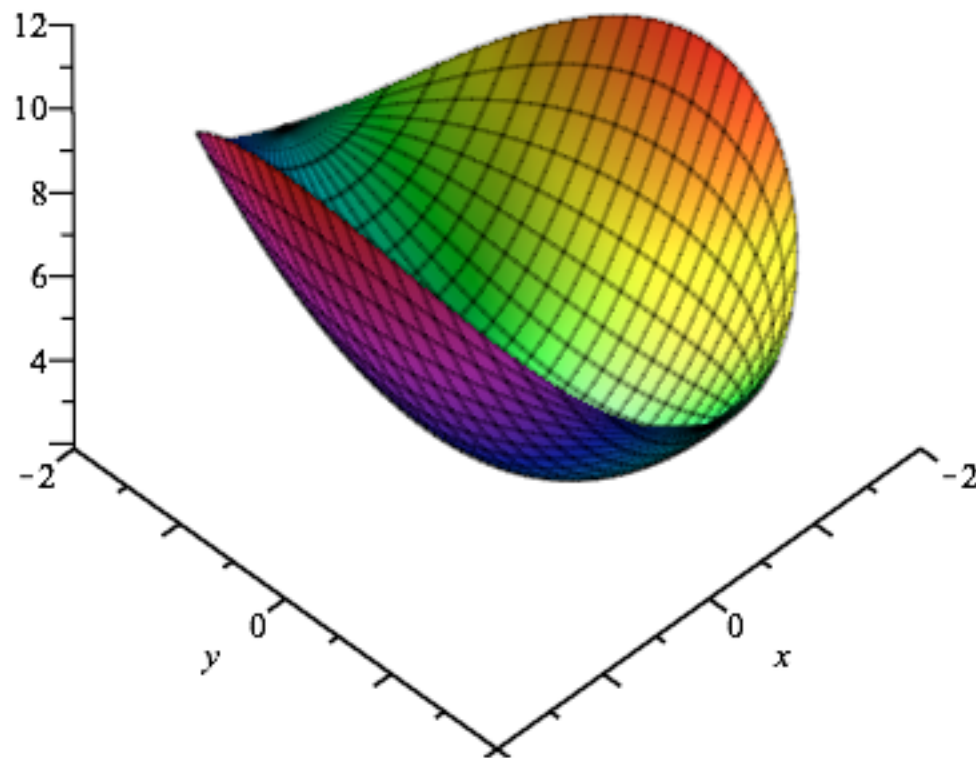
```
> plot3d(2·x2 + x + y2 + 2, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, axes = framed, transparency = 0.3)
```



Synes du fargene var kjedelige? Prøv med `color = x`.

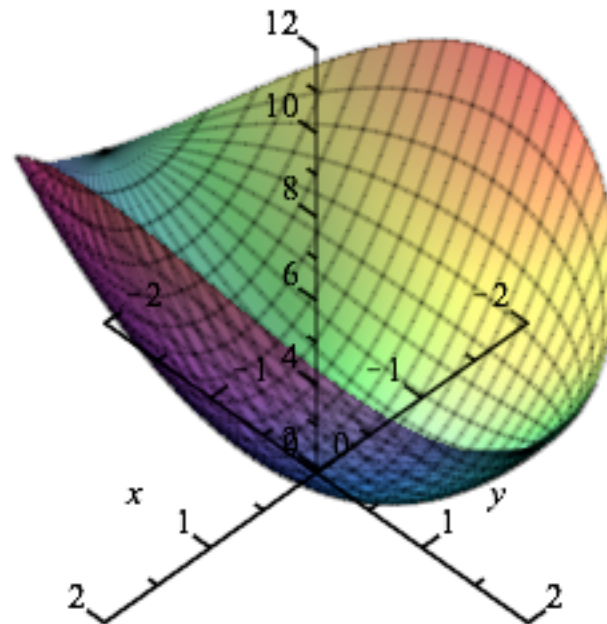
Ville du heller hatt grafen tegnet akkurat på sirkelskiven? Det kan vi fikse på denne måten:

> `plot3d(2·x2 + x + y2 + 2, x=-sqrt(4 - y2) ..sqrt(4 - y2), y=-2 ..2, axes = framed, color = x)`



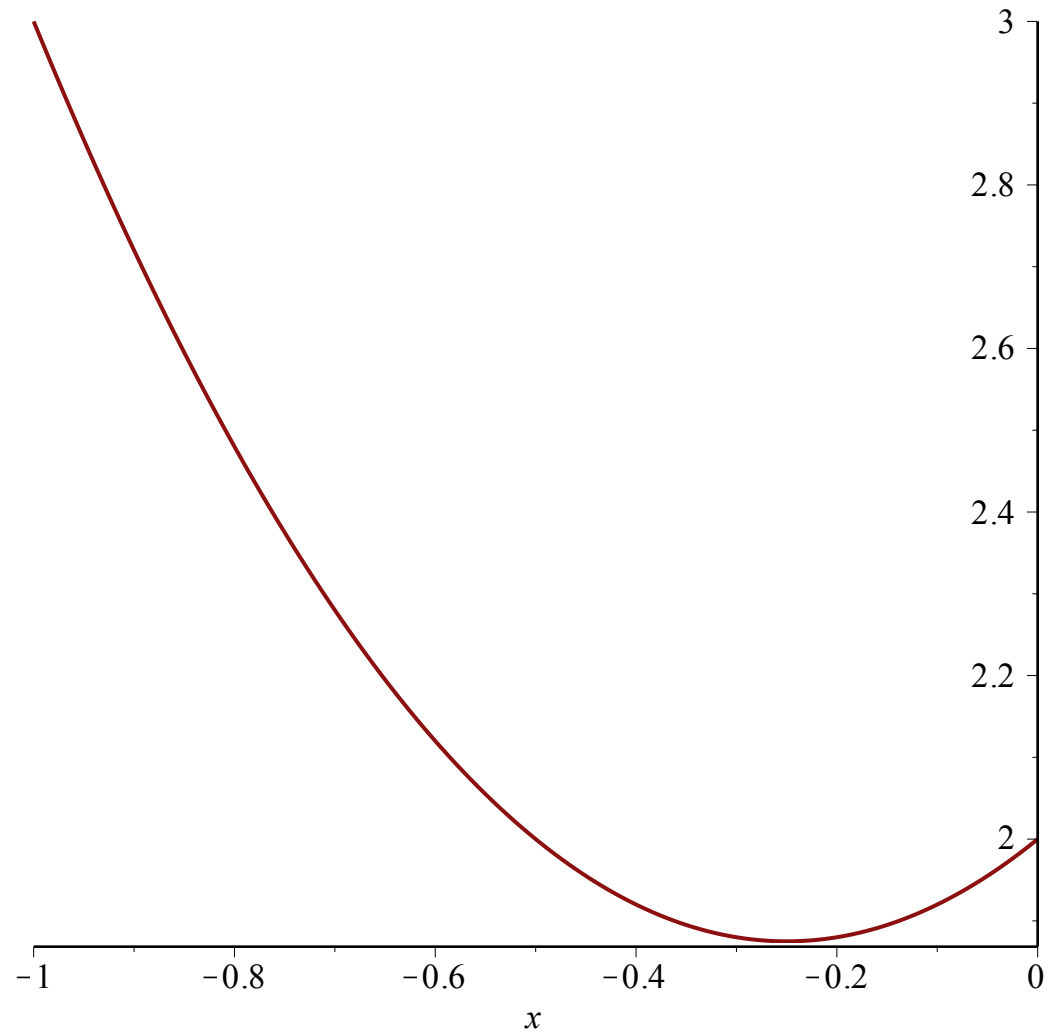
En annen sak er at "vanlige" koordinater antakelig er å foretrekke for å få et mer presist uttrykk for minimum til denne funksjonen:

> `plot3d(2·x2 + x + y2 + 2, x=-sqrt(4 - y2) ..sqrt(4 - y2), y=-2..2, axes = normal, color = x, transparency = 0.3)`

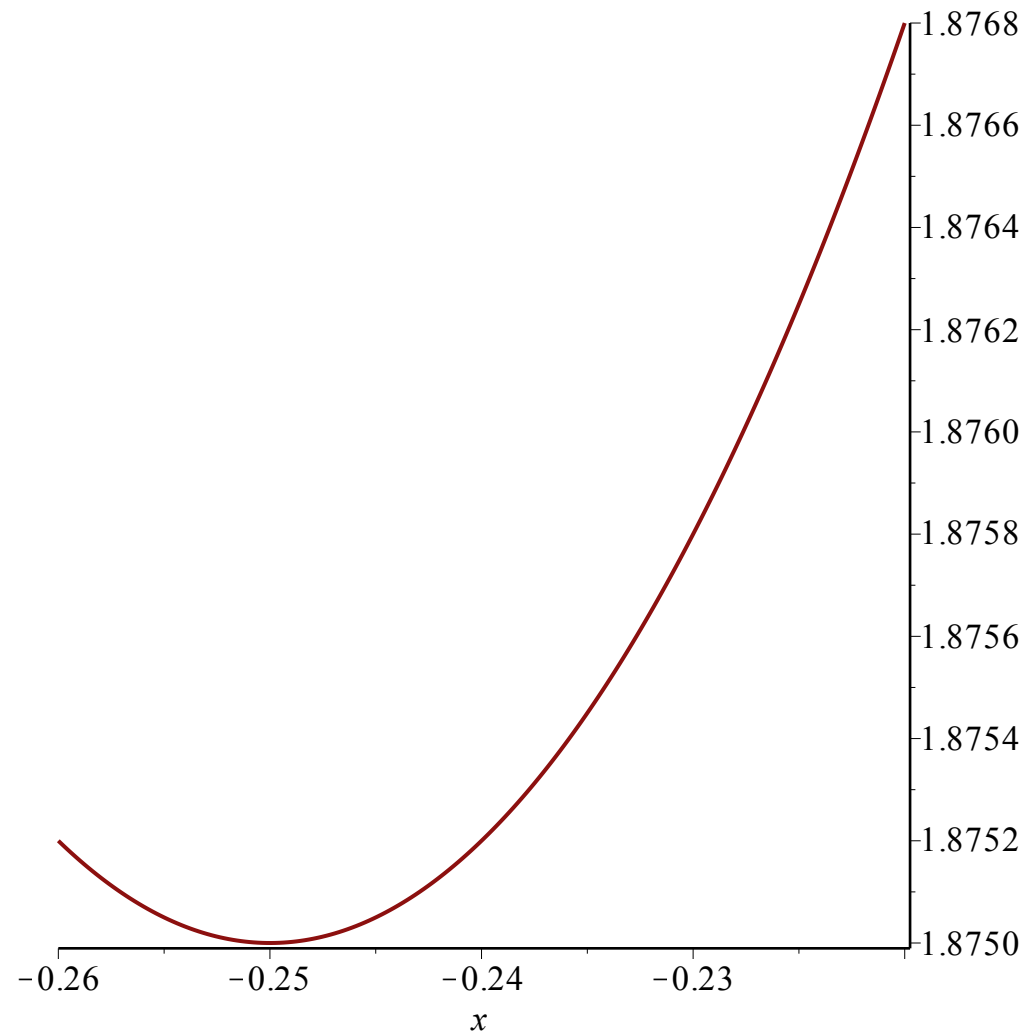


Nå er det bare å dreie og forstørre for å se hvor minimum ligger, noe du kan gjøre ved å først sette cursoren på figuren og klikke, slik at du får en ramme rundt figuren. Det gir deg en ny kommandolinje på toppen av siden der de fire symbolene du trenger ligger til høyre. For meg ser det da ut som om minimumspunktet ligger nær $(x, y) = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. En rask kikk på funksjonsuttrykket viser at minimum nok inntreffer for $y = 0$. Det gjenstår derfor å finne x -verdien i minimumspunktet. Vi tegner derfor grafen til $g(x) = f(x, 0) = 2x^2 + x + 2$:

> $\text{plot}(2 \cdot x^2 + x + 2, x = -1 \dots 0)$



> $\text{plot}(2 \cdot x^2 + x + 2, x = -0.26 \dots -0.22)$



Dette forsterker troen på at minimum for f befinner seg svært nær punktet $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ der funksjonsverdien er ≈ 1.8750 .

Oppgave 10.9.16:

a)

Jeg har valgt å tegne nivåkurvene $f(x, y, z) = \frac{15}{8}$ (som jeg vet er minimum) og kurvene $f(x, y) = c$ for $c = 4, 8$ og 12 . Dessuten tegner jeg inn sirkelranden av området R i blått, slik at jeg ser bedre hvilke punkter som er med i konkurransen. I tillegg tar jeg med nivåkurvene for $c = \frac{14}{8}$ og $c = 2$ i henholdsvis rødt og grønt. (Skift de fargene dersom du er fargeblind!)

```
> P1 := implicitplot(2·x2 + x + y2 + 2 =  $\frac{15}{8}$ , x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = magenta)
```

(2)

```
P1 := PLOT(...)
```

```
> P2 := implicitplot(2·x2 + x + y2 + 2 = 4, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = yellow)
```

(3)

```
P2 := PLOT(...)
```

```
> P3 := implicitplot(2·x2 + x + y2 + 2 = 8, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = brown)
```

(4)

```
P3 := PLOT(...)
```

```
> P4 := implicitplot(2·x2 + x + y2 + 2 = 12, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = black)
```

(5)

```
P4 := PLOT(...)
```

```
> P5 := implicitplot(x2 + y2 = 4, x=-4..4, y=-4..4, color = blue)
```

(6)

```
P5 := PLOT(...)
```

```
> P6 := implicitplot(2·x2 + x + y2 + 2 =  $\frac{14}{8}$ , x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = red)
```

(7)

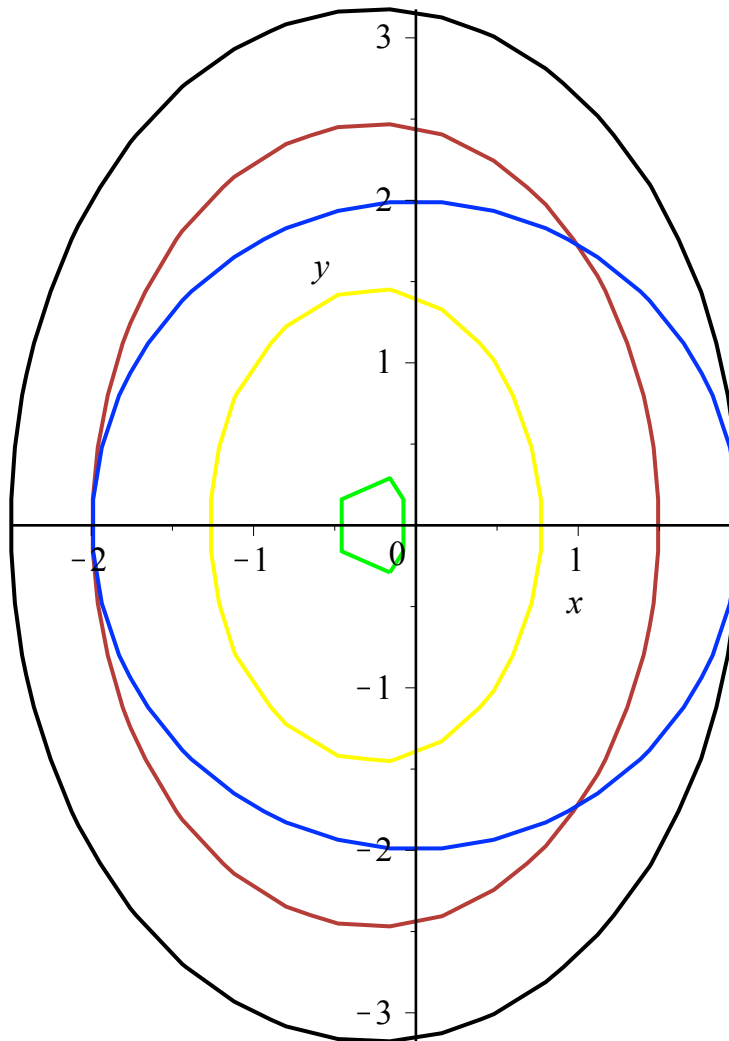
```
P6 := PLOT(...)
```

```
> P7 := implicitplot(2·x2 + x + y2 + 2 = 2, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = green)
```

(8)

```
P7 := PLOT(...)
```

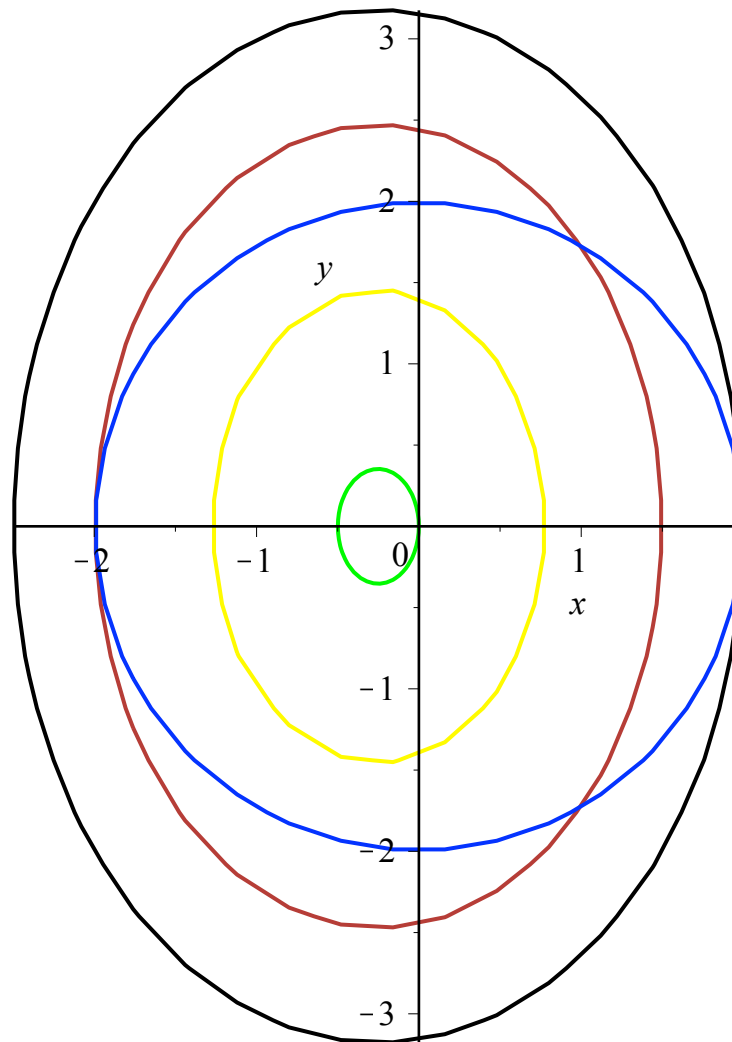
```
> display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)
```



Den grønne kurven ble litt kantet, så jeg tar en *gridrefine* på den:

```
> P7 := implicitplot(2·x2 + x + y2 + 2 = 2, x = -4..4, y = -4..4, scaling = constrained, color = green, gridrefine = 3)
P7 := PLOT(...)
```

```
> display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)
```

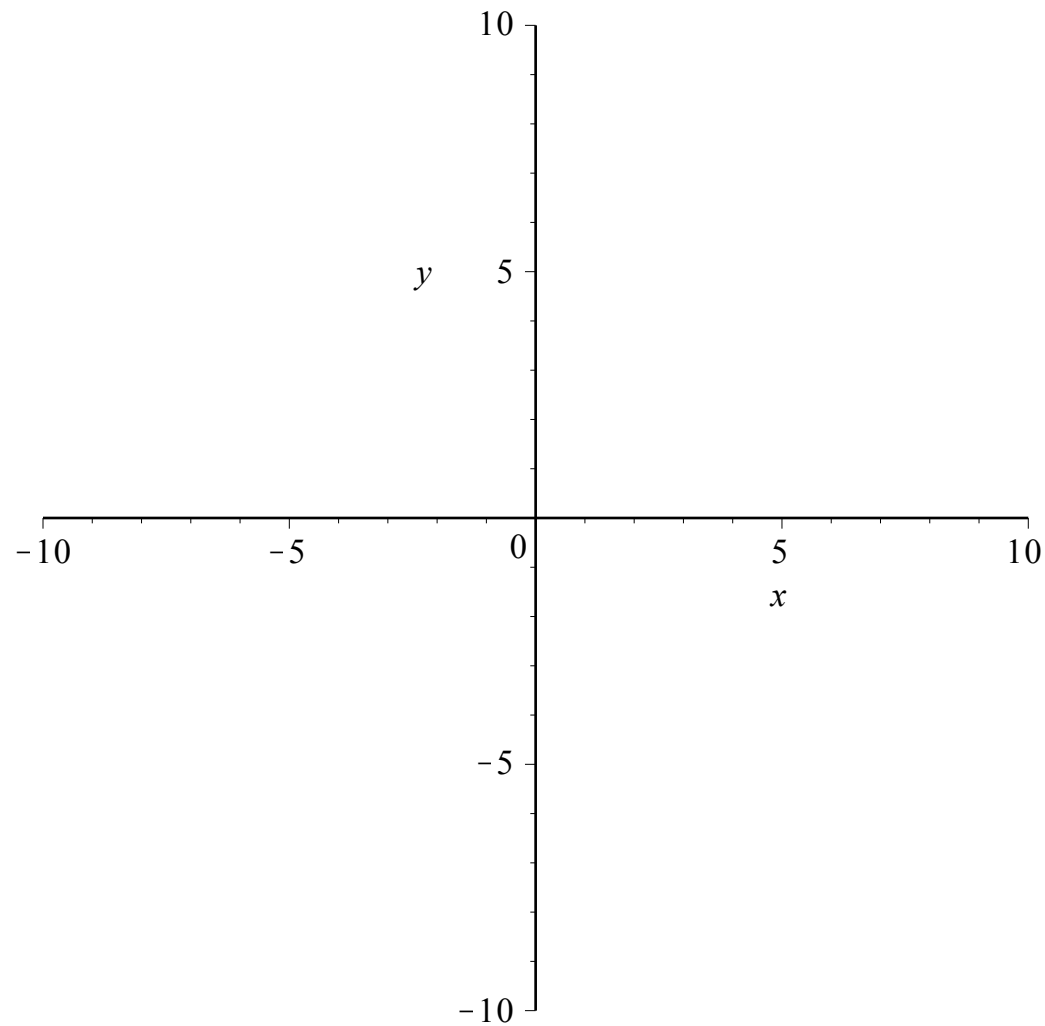


Se på resultatet. Vi ser:

- Den grønne, gule, brune og svarte nivåkurven kommer pent og pyntelig utenfor hverandre, med voksende c -verdi.
- Den blå sirkelen er randen til R . Vi ser at den svarte nivåkurven tangerer denne randen. Ellers ligger den helt utenfor R . Derfor har $f(x, y)$ et maksimum i dette tangeringspunktet, nemlig funksjonsverdien på den svarte nivåkurven som er 12.
- Den brune nivåkurven tangerer også den blå randen til R . Men den brune kurven har noen punkter som ligger utenfor R og noen som ligger innenfor R , så det tangeringspunktet er verken et maksimums- eller et minimumspunkt.

- Hvor ble det av den magenta nivåkurven? Den skulle jo avsløre et minimum for funksjonen? At den ikke vises, må skyldes at den bare er et punkt, og da klarer vi ikke se minimum fra denne figuren.
- Og hvor ble det av den røde kurven? Den skulle jo være en nivåkurve gjennom punkter med lavere funksjonsverdi enn minimumet på R . Det vil si, den må ligge helt utenfor R hvis den i det hele tatt finnes. Så enten finnes den ikke, eller så ligger den utenfor det variasjonsområdet vi har valgt for parametrene. Vi kan jo prøve om den finnes ved å øke variasjonsområdet:

```
> implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 14/8, x=-1000..1000, y=-1000..1000, scaling = constrained, color = red)
```



Det ser lite lovende ut. For å være sikker, kan vi studere likningen $2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = \frac{14}{8}$. Den beste sjansen for å finne punkter, er å sette $y = 0$. Spørsmålet er da om det finnes x slik at $2 \cdot x^2 + x + 2 = \frac{14}{8}$. Vi prøver:

$$> \text{solve}\left(2 \cdot x^2 + x + 2 = \frac{14}{8}, x\right)$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

(10

Som vi ser: det finnes ingen reelle x -verdier som er slik. Altså har den røde nivåkurven ingen punkter.

Den magenta prikken ligger nok innenfor den grønne nivåkurven, for funksjonen vår er kontinuerlig, så det MÅ finnes et minimumspunkt innenfor denne kurven.

Oppgave 10.9.15:

For å plotte disse figurene, henter vi inn Maples plottekommandoer:

```
> with(plots)
```

a)

```
> plot3d(2·x2 + x + y2 + 2, x=-2..2, y=-2..2, axes = framed, transparency = 0.3)
```

Synes du fargene var kjedelige? Prøv med *color = x*.

Ville du heller hatt grafen tegnet akkurat på sirkelskiven? Det kan vi fikse på denne måten:

```
> plot3d(2·x2 + x + y2 + 2, x=-sqrt(4 - y2)..sqrt(4 - y2), y=-2..2, axes = framed, color = x)
```

En annen sak er at "vanlige" koordinater antakelig er å foretrekke for å få et mer presist uttrykk for minimum til denne funksjonen:

```
> plot3d(2·x2 + x + y2 + 2, x=-sqrt(4 - y2)..sqrt(4 - y2), y=-2..2, axes = normal, color = x, transparency = 0.3)
```

Nå er det bare å dreie og forstørre for å se hvor minimum ligger, noe du kan gjøre ved å først sette cursoren på figuren og klikke, slik at du får en ramme rundt figuren. Det gir deg en ny kommandolinje på toppen av siden der de fire symbolene du trenger ligger til høyre. For meg ser det

da ut som om minimumspunktet ligger nær $(x, y) = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. En rask kikk på funksjonsuttrykket viser at minimum nok inntreffer for

$y = 0$. Det gjenstår derfor å finne x -verdien i minimumspunktet. Vi tegner derfor grafen til $g(x) = f(x, 0) = 2x^2 + x + 2$:

```
> plot(2·x2 + x + 2, x=-1..0)
```

```
> plot(2·x2 + x + 2, x=-0.26..-0.22)
```

Dette forsterker troen på at minimum for f befinner seg svært nær punktet $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ der funksjonsverdien er ≈ 1.8750 .

Oppgave 10.9.16:

a)

Jeg har valgt å tegne nivåkurvene $f(x, y, z) = \frac{15}{8}$ (som jeg vet er minimum) og kurvene $f(x, y) = c$ for $c = 4, 8$ og 12 . Dessuten tegner jeg inn sirkelranden av området R i blått, slik at jeg ser bedre hvilke punkter som er med i konkurransen. I tillegg tar jeg med nivåkurvene for $c = \frac{14}{8}$ og $c = 2$ i henholdsvis rødt og grønt. (Skift de fargene dersom du er fargeblind!)

```
> P1 := implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 15/8, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = magenta)
> P2 := implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 4, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = yellow)
> P3 := implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 8, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = brown)
> P4 := implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 12, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = black)
> P5 := implicitplot(x^2 + y^2 = 4, x=-4..4, y=-4..4, color = blue)
> P6 := implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 14/8, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = red)
> P7 := implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 2, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = green)
> display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)
```

Den grønne kurven ble litt kantet, så jeg tar en *gridrefine* på den:

```
> P7 := implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 2, x=-4..4, y=-4..4, scaling = constrained, color = green, gridrefine = 3)
> display(P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7)
```

Se på resultatet. Vi ser:

- Den grønne, gule, brune og svarte nivåkurven kommer pent og pyntelig utenfor hverandre, med voksende c -verdi.
- Den blå sirkelen er randen til R . Vi ser at den svarte nivåkurven tangerer denne randen. Ellers ligger den helt utenfor R . Derfor har $f(x, y)$ et maksimum i dette tangeringspunktet, nemlig funksjonsverdien på den svarte nivåkurven som er 12 .

- Den brune nivåkurven tangerer også den blå randen til R . Men den brune kurven har noen punkter som ligger utenfor R og noen som ligger innenfor R , så det tangeringspunktet er verken et maksimums- eller et minimumspunkt.
- Hvor ble det av den magenta nivåkurven? Den skulle jo avsløre et minimum for funksjonen? At den ikke vises, må skyldes at den bare er et punkt, og da klarer vi ikke se minimum fra denne figuren.
- Og hvor ble det av den røde kurven? Den skulle jo være en nivåkurve gjennom punkter med lavere funksjonsverdi enn minimumet på R . Det vil si, den må ligge helt utenfor R hvis den i det hele tatt finnes. Så enten finnes den ikke, eller så ligger den utenfor det variasjonsområdet vi har valgt for parametrene. Vi kan jo prøve om den finnes ved å øke variasjonsområdet:

```
> implicitplot(2*x^2 + x + y^2 + 2 = 14/8, x=-1000..1000, y=-1000..1000, scaling = constrained, color = red)
```

Det ser lite lovende ut. For å være sikker, kan vi studere likningen $2 \cdot x^2 + x + y^2 + 2 = \frac{14}{8}$. Den beste sjansen for å finne punkter, er å sette $y = 0$. Spørsmålet er da om det finnes x slik at $2 \cdot x^2 + x + 2 = \frac{14}{8}$. Vi prøver:

```
> solve(2*x^2 + x + 2 = 14/8, x)
```

Som vi ser: det finnes ingen reelle x -verdier som er slik. Altså har den røde nivåkurven ingen punkter. Den magenta prikken ligger nok innenfor den grønne nivåkurven, for funksjonen vår er kontinuert, så det MÅ finnes et minimumspunkt innenfor denne kurven.

```
>
```

Oppgave 11.3.16.

Maple kan hjelpe oss med to ting: programmet kan tegne kurvene som avgrenser området, og det kan beregne det itererte integralet. Men å sette opp det itererte integralet må vi klare selv.

Vi starter med å hente inn Maples plottekommandoer, så har vi dem.

a)

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

(1)

Vi tegner først integrasjonsområdet.

For å ha kontroll over hvilken likning som gir hvilken kurve, definerer vi plottene separat, og viser dem med *display*.

Vi lar intervallene for x og y starte på null siden figuren er i første kvadrant, og vi lar dem gå et godt stykke utover for sikkerhets skyld.

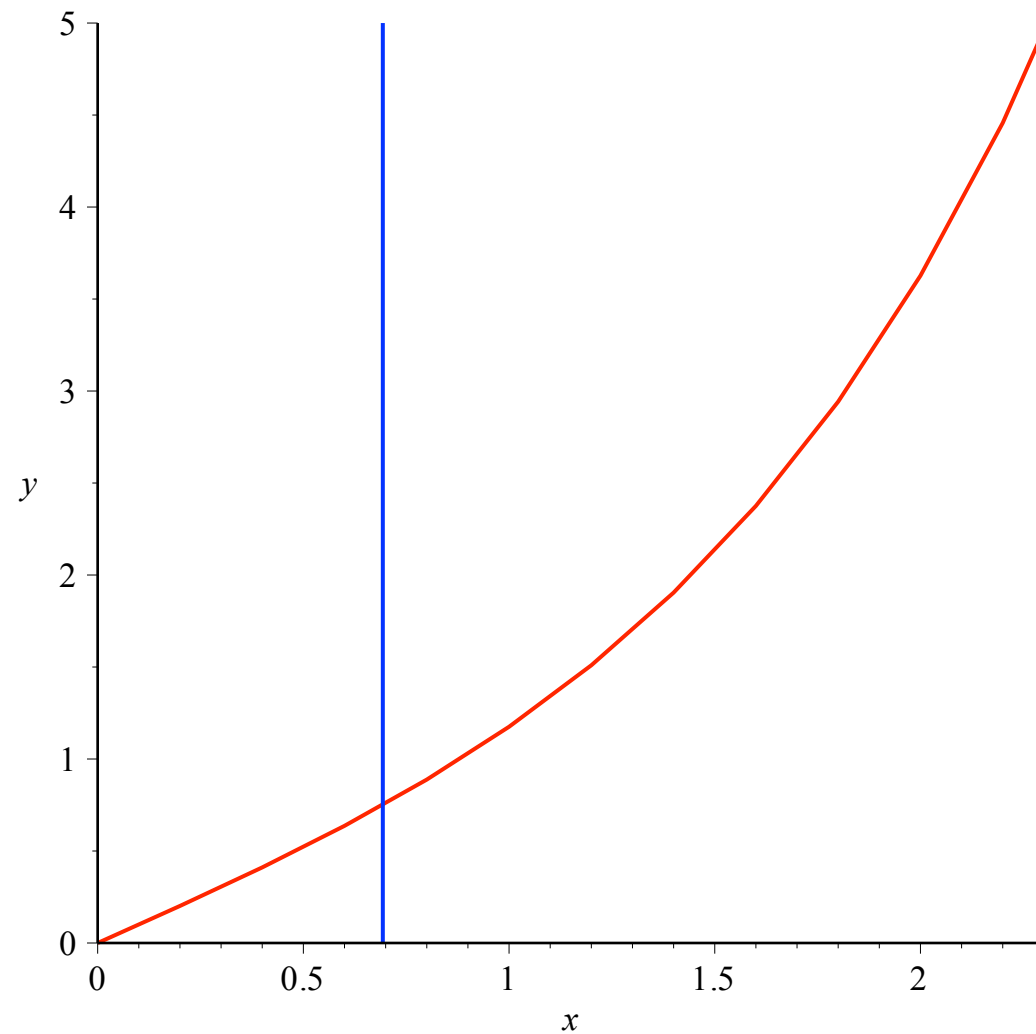
```
> P1 := implicitplot(y = sinh(x), x = 0 ..5, y = 0 ..5, color = red)
                                P1 := PLOT(...)
```

(2)

```
> P2 := implicitplot(x = ln(2), x = 0 ..5, y = 0 ..5, color = blue)
                                P2 := PLOT(...)
```

(3)

```
> display(P1, P2)
```



Aha. Det er det lille trekantede (nesten) området med spiss i origo vi skal integrere over.

Figuren er grei nok, så den lar vi stå.

Vi velger å integrere kolonnevis. Det vil si, y går fra $y = 0$ til kolonnen treffer den røde kurven $y = \sinh(x)$.

For å få med alle kolonnene, må x gå fra 0 til $\ln(2)$.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså

$$\int_{x=0}^{x=\ln(2)} \int_{y=0}^{y=\sinh(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$\begin{aligned} &> \text{int}\left(\text{int}\left(\frac{(x^3 + 1)}{x^2 + 1}, y = 0 \dots \sinh(x)\right), x = 0 \dots \ln(2)\right) \\ &\frac{1}{4} \left(I e^{2I} \text{Ei}(1, I - \ln(2)) + I e^{2I} \text{Ei}(1, I + \ln(2)) - 2 I e^{2I} \text{Ei}(1, I) + e^{2I} \text{Ei}(1, I - \ln(2)) - e^{2I} \text{Ei}(1, I + \ln(2)) - I \text{Ei}(1, \right. \\ &\quad \left. - \ln(2) - I) - I \text{Ei}(1, -I + \ln(2)) + 2 I \text{Ei}(1, -I) + 5 \ln(2) e^I + \text{Ei}(1, -\ln(2) - I) - \text{Ei}(1, -I + \ln(2)) - 3 e^I \right) e^{-I} \end{aligned} \quad (4)$$

$\text{Ei}(x)$ er en funksjon som Maple allerede har i sitt funksjonsarkiv.
 Det ligger utenfor vårt pensum å kjenne til den funksjonen.
 Men siden Maple kan den, kan Maple også beregne funksjonsverdier for den.
 Derfor skriver vi:

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\%) \\ &0.2289666542 - 7.561642600 \cdot 10^{-12} I \end{aligned} \quad (5)$$

Svaret vi fikk ser ut til å være et komplekst tall!!?
 Det kan ikke være korrekt. Vi integrerer jo positive funksjoner over positive intervall.
 Men se på svaret en gang til. Maple har beregnet integralet med 10 sikre sifre, og leddet med I er forsvinnende lite.

Så svaret er nok tilnærmet lik 0.22896665.

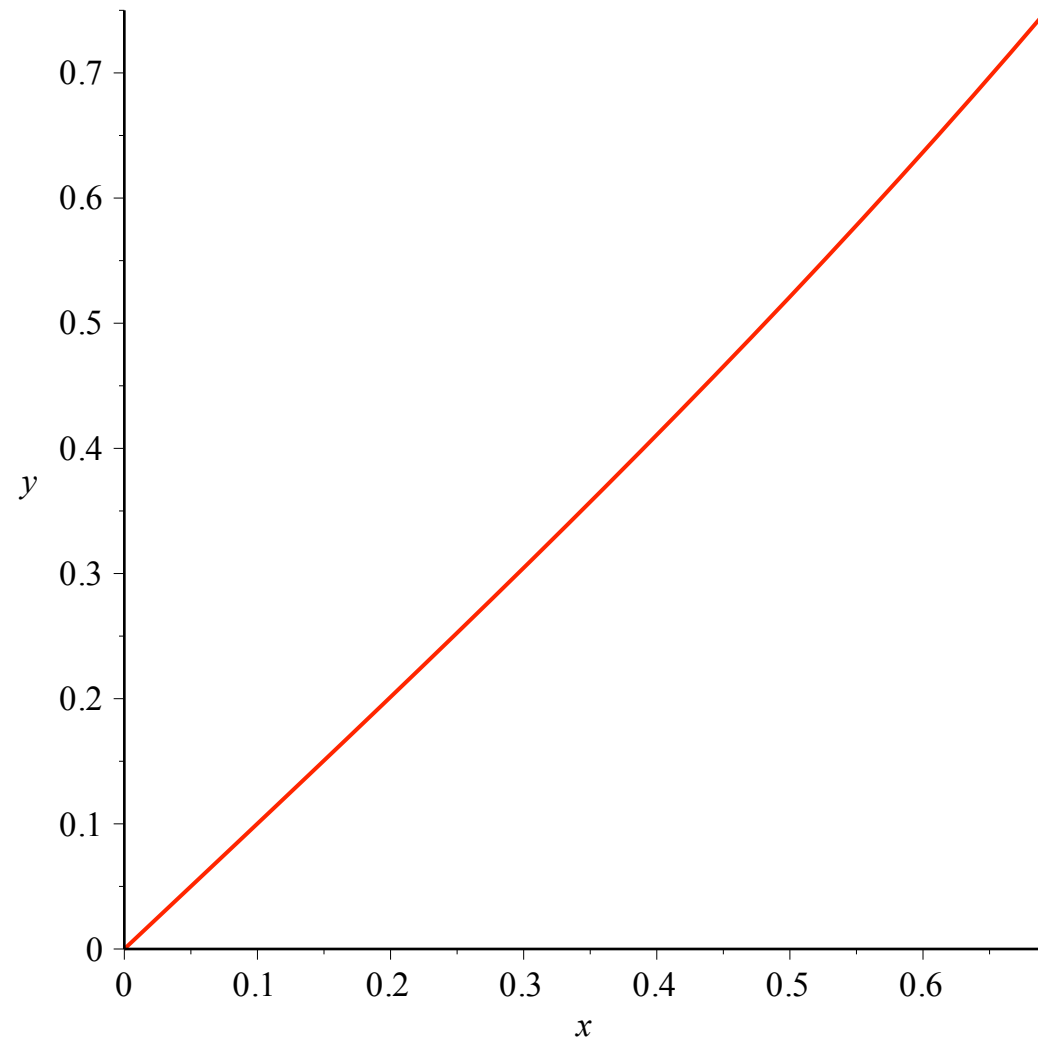
Når vi har skrevet dobbelintegralet som et iterert integral, kan vi også skrive integrasjonsområdet som $0 \leq y \leq \sinh(x)$ for $0 \leq x \leq \ln(2)$.

Det kan vi utnytte til å tegne et penere bilde av integrasjonsområdet (dersom vi har lyst..., vi trenger det jo ikke for å løse oppgaven).

$$\begin{aligned} &> P1 := \text{implicitplot}(y = \sinh(x), x = 0 \dots \ln(2), y = 0 \dots \sinh(\ln(2)), \text{color} = \text{red}) \\ &\quad P1 := \text{PLOT}(\dots) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &> P2 := \text{implicitplot}(x = \ln(2), x = 0 \dots \ln(2), y = 0 \dots \sinh(\ln(2)), \text{color} = \text{blue}) \\ &\quad P2 := \text{PLOT}(\dots) \end{aligned} \quad (7)$$

$$> \text{display}(P1, P2)$$



c)

> $PI := \text{implicitplot}(y = \tan^{-1}(x), x = -50 \dots 50, y = 0 \dots 2, \text{color} = \text{blue})$

$P1 := PLOT(...)$

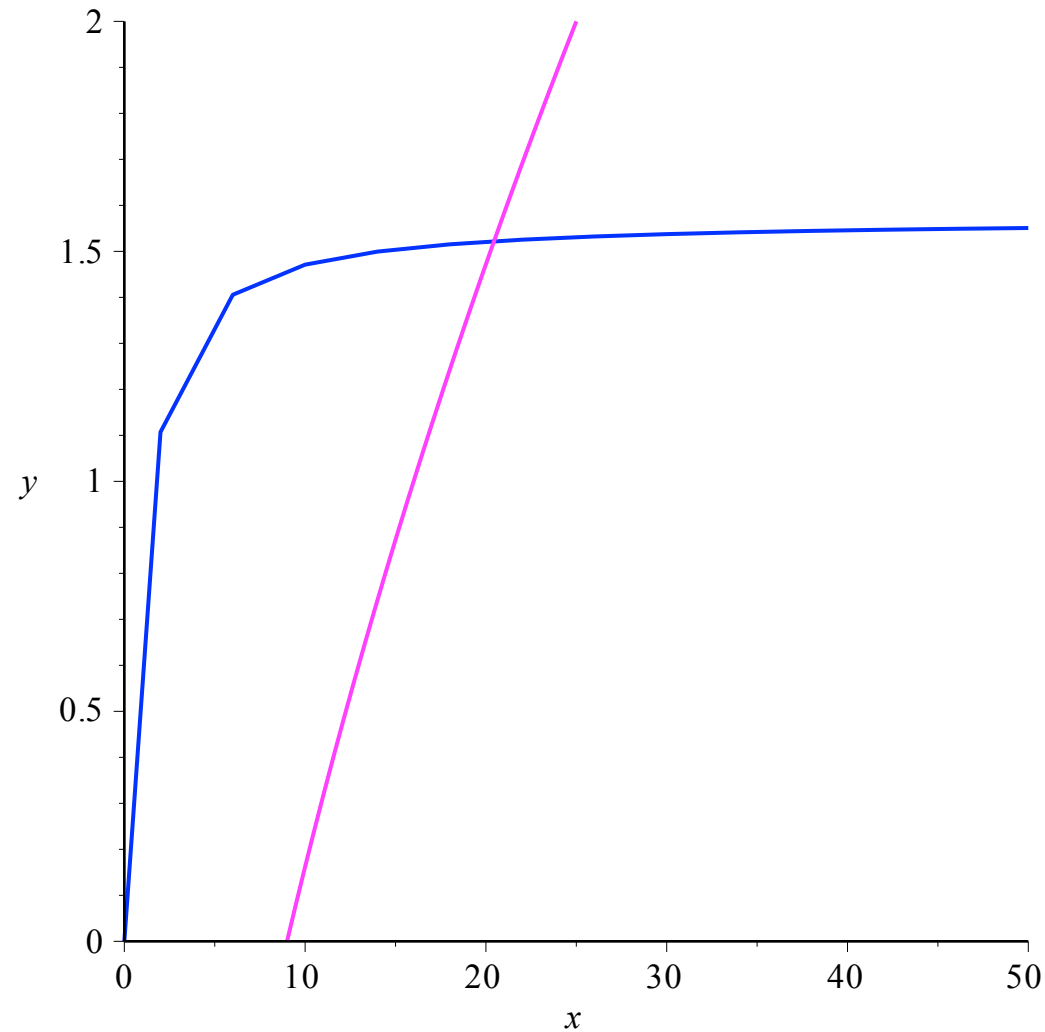
(8

> $P2 := \text{implicitplot}(x = (y + 3)^2, x = -50..50, y = 0..2, \text{color} = \text{magenta})$

$P2 := PLOT(...)$

(9

> $\text{display}(P1, P2)$



Vi skjønner hvilket område vi skal integrere over, nemlig området mellom den blå og den lilla kurven, over x - aksen ($y = 0$).
Her er det absolutt larest å integrere linjevis.

Da må x gå fra den blå kurven ($y = \tan^{-1}(x)$), altså $x = \tan(y)$ $x = (y + 3)^2$.

For å få med alle kolonnene, må y gå fra $y = 0$ til skjæringspunktet mellom de to kurvene som ser ut til å være nær $y = 1.5$.

Vi lager et forstørret plott rundt det skjæringspunktet for å få en bedre verdi for y .

```
> P1 := implicitplot(y = tan-1(x), x = 19 ..21, y = 1.4 ..1.6, color = blue)
```

```
P1 := PLOT(...)
```

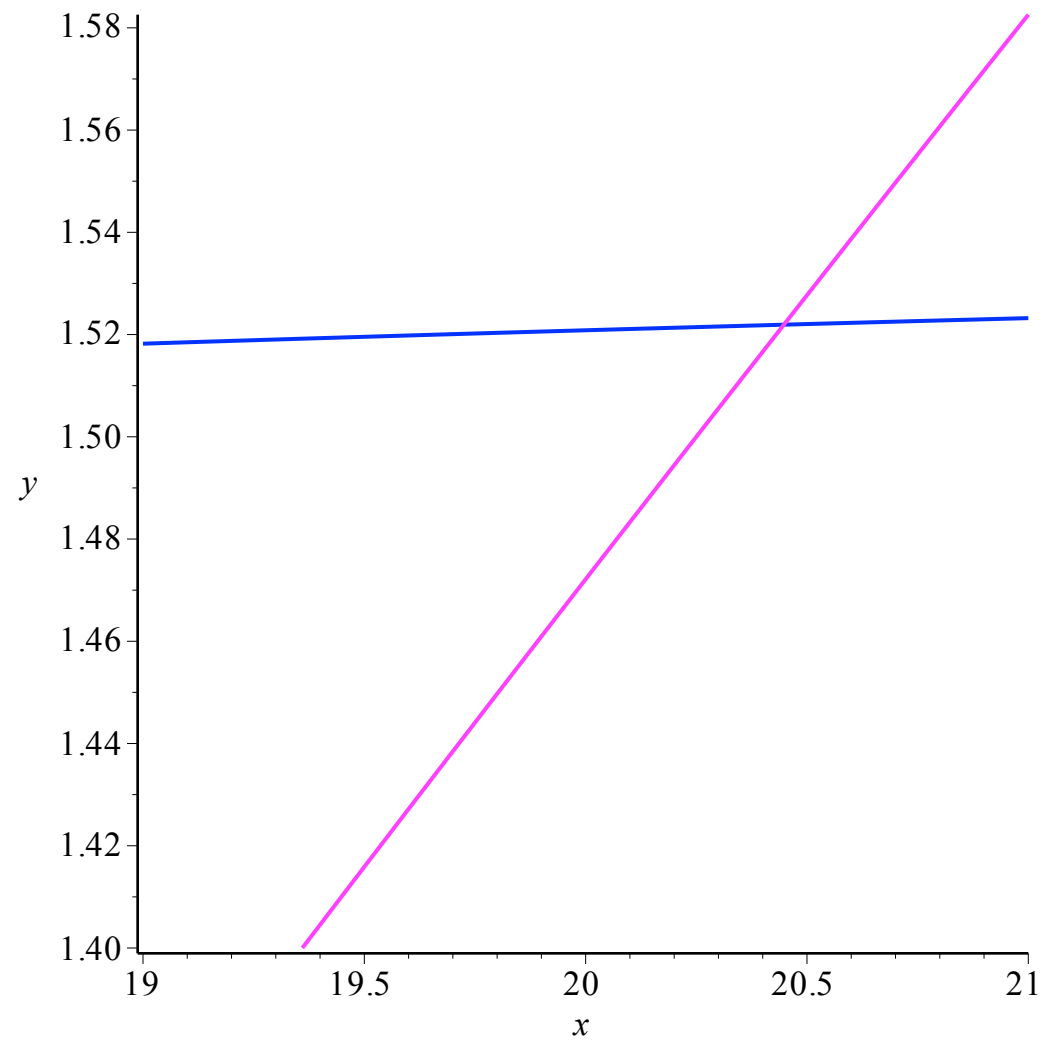
(10

```
> P2 := implicitplot(x = (y + 3)2, x = 19 ..21, y = 1.4 ..1.6, color = magenta)
```

```
P2 := PLOT(...)
```

(11

```
> display(P1, P2)
```



Vi tar $y = 1.52$.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså $\int_{y=0}^{1.52} \int_{x=\tan(y)}^{x=(y+3)^2} f(x, y) \, dx \, dy$

> $\text{int}(\text{int}(x \cdot y, \, x = \tan(y) \dots (y + 3)^2), \, y = 0 \dots 1.52)$

143.9123840

(12

Svaret kom på desimalform fordi vi brukte et desimaltall som integrasjonsgrense.

Det kunne være interessant å se hva Maple får til om vi skriver denne grensen som $\frac{152}{100}$.

> $\text{int}\left(\text{int}(x \cdot y, \quad x = \tan(y) \dots (y + 3)^2), y = 0 \dots \frac{152}{100}\right)$

$$\frac{115261995466}{732421875} - \frac{19}{25} \tan\left(\frac{38}{25}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{38}{25}\right)^2\right)$$

(13

Dette er altså det eksakte svaret (dersom y -verdien $152/100$ var eksakt.

Jeg foretrekker desimalsvaret.

>

>

Oppgave 11.3.16.

Maple kan hjelpe oss med to ting: programmet kan tegne kurvene som avgrenser området, og det kan beregne det itererte integralet.

Men å sette opp det itererte integralet må vi klare selv.

Vi starter med å hente inn Maples plottekommandoer, så har vi dem.

a)

```
> with(plots)
```

Vi tegner først integrasjonsområdet.

For å ha kontroll over hvilken likning som gir hvilken kurve, definerer vi plottene separat, og viser dem med *display*.

Vi lar intervallene for x og y starte på null siden figuren er i første kvadrant, og vi lar dem gå et godt stykke utover for sikkerhets skyld.

```
> P1 := implicitplot(y = sinh(x), x = 0 .. 5, y = 0 .. 5, color = red)
```

```
> P2 := implicitplot(x = ln(2), x = 0 .. 5, y = 0 .. 5, color = blue)
```

```
> display(P1, P2)
```

Aha. Det er det lille trekantede (nesten) området med spiss i origo vi skal integrere over.

Figuren er grei nok, så den lar vi stå.

Vi velger å integrere kolonnevis. Det vil si, y går fra $y = 0$ til kolonnen treffer den røde kurven $y = \sinh(x)$.

For å få med alle kolonnene, må x gå fra 0 til $\ln(2)$.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså
$$\int_{x=0}^{x=\ln(2)} \int_{y=0}^{y=\sinh(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

```
> int(int((x^3 + 1)/(x^2 + 1), y = 0 .. sinh(x)), x = 0 .. ln(2))
```

$Ei(x)$ er en funksjon som Maple allerede har i sitt funksjonsarkiv.

Det ligger utenfor vårt pensum å kjenne til den funksjonen.

Men siden Maple kan den, kan Maple også beregne funksjonsverdier for den.

Derfor skriver vi:

```
> evalf(%)
```

Svaret vi fikk ser ut til å være et komplekst tall!!?

Det kan ikke være korrekt. Vi integrerer jo positive funksjoner over positive intervall.

Men se på svaret en gang til. Maple har beregnet integralet med 10 sikre sifre, og leddet med I er forsvinnende lite.

Så svaret er nok tilnærmet lik 0.22896665.

Når vi har skrevet dobbelintegralet som et iterert integral, kan vi også skrive integrasjonsområdet som $0 \leq y \leq \sinh(x)$ for $0 \leq x \leq \ln(2)$.

Det kan vi utnytte til å tegne et penere bilde av integrasjonsområdet (dersom vi har lyst..., vi trenger det jo ikke for å løse oppgaven).

```
> P1 := implicitplot(y = sinh(x), x = 0 ..ln(2), y = 0 ..sinh(ln(2)), color = red)
```

```
> P2 := implicitplot(x = ln(2), x = 0 ..ln(2), y = 0 ..sinh(ln(2)), color = blue)
```

```
> display(P1, P2)
```

c)

```
> P1 := implicitplot(y = tan-1(x), x = -50 ..50, y = 0 ..2, color = blue)
```

```
> P2 := implicitplot(x = (y + 3)2, x = -50 ..50, y = 0 ..2, color = magenta)
```

```
> display(P1, P2)
```

Vi skjønner hvilket område vi skal integrere over, nemlig området mellom den blå og den lilla kurven, over x -aksen ($y = 0$).

Her er det absolutt larest å integrere linjevis.

Da må x gå fra den blå kurven ($y = \tan^{-1}(x)$), altså $x = \tan(y)$ $x = (y + 3)^2$.

For å få med alle kolonnene, må y gå fra $y = 0$ til skjæringspunktet mellom de to kurvene som ser ut til å være nær $y = 1.5$.

Vi lager et forstørret plott rundt det skjæringspunktet for å få en bedre verdi for y .

```
> P1 := implicitplot(y = tan-1(x), x = 19 ..21, y = 1.4 ..1.6, color = blue)
```

```
> P2 := implicitplot(x = (y + 3)2, x = 19 ..21, y = 1.4 ..1.6, color = magenta)
```

```
> display(P1, P2)
```

Vi tar $y = 1.52$.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså $\int_{y=0}^{1.52} \int_{x=\tan(y)}^{x=(y+3)^2} f(x, y) \, dx \, dy$

> `int(int(x·y, x = tan(y) .. (y + 3)^2), y = 0 .. 1.52)`

Svaret kom på desimalform fordi vi brukte et desimaltall som integrasjonsgrense.

Det kunne være interessant å se hva Maple får til om vi skriver denne grensen som $\frac{152}{100}$.

> `int(int(x·y, x = tan(y) .. (y + 3)^2), y = 0 ..  $\frac{152}{100}$ )`

Dette er altså det eksakte svaret (dersom y -verdien $152/100$ var eksakt.
Jeg foretrekker desimalsvaret.

>

>

Oppgave 11.5.13.

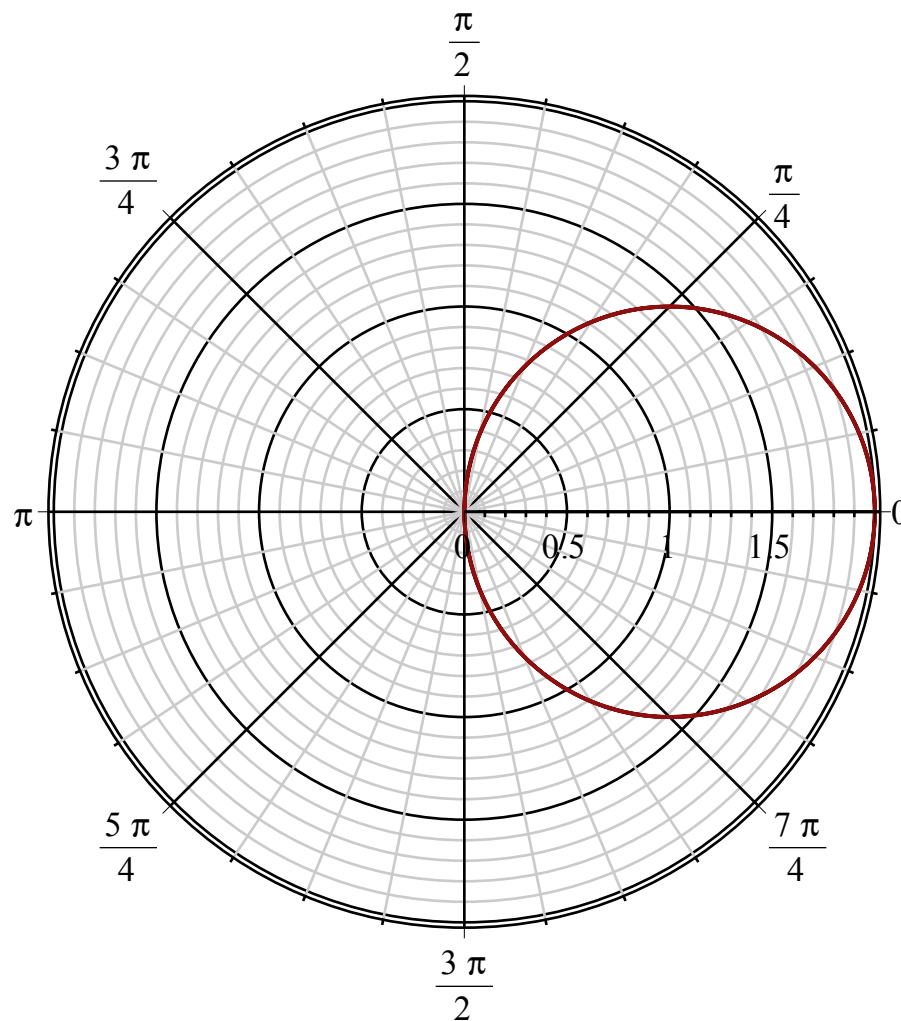
a)

Vi tegner først integrasjonsområdet.

For kurver som er gitt ved $r = g(\theta)$ kan vi bruke kommandoen *polarplot* (som krever at vi henter inn Maples plottekommandoer):

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
> polarplot(2*cos(theta), theta = 0 .. 2*Pi)
```

(1



OBS! Origo er i midten av nettet, men tallene langs ytterkanten er verdiene av θ . (Nullen ytterst til høyre betyr altså at $\theta = 0$, slik at det markerer punktet $(2, 0)$ i polarkoordinater.

Ved nærmere undersøkelse, ser vi at vi bare trenger å la θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$ for at denne sirkelen skal bli beskrevet én gang. ($\cos(\theta) \geq 0$ for disse verdiene av θ .)

Det er viktig å vite når vi skal integrere!!! (Test gjerne hvordan plottet blir for ulike θ -intervaller.)

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den når sirkelen $r = 2 \cos \theta$.

For å få med alle sektorene, lar vi θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.

Når vi skriver opp det itererte integralet, må vi huske at $dA = r \, dr \, d\theta$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet
$$\int_{\theta = -\frac{\pi}{2}}^{\theta = \frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2 \cos \theta} f(r, \theta) \cdot r \cdot dr \, d\theta.$$

Når vi så skriver opp integralet til Maple, kan vi glemme hvor det kommer fra.

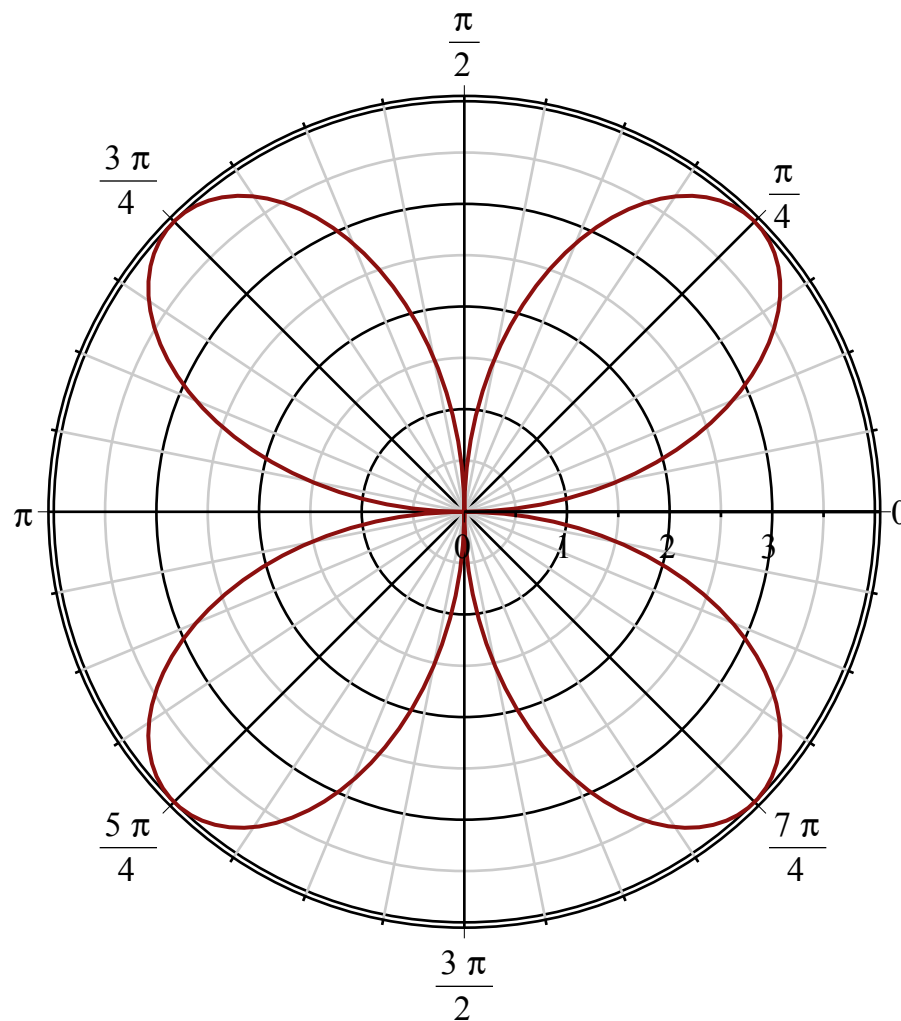
$$> \text{int}\left(\text{int}\left(r^2 \cdot \sin(\theta)^2 \cdot r, r = 0 \dots 2 \cdot \cos(\theta)\right), \theta = -\frac{\text{Pi}}{2} \dots \frac{\text{Pi}}{2}\right)$$
$$\frac{1}{4} \pi$$

(2)

c)

Også her er området begrenset av en kurve gitt ved en likning på formen $r = g(\theta)$:

$$> \text{polarplot}(4 \cdot \sin(2 \cdot \theta), \theta = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi})$$



OBS! Kurven gjennomløpes bare én gang når θ går fra 0 til 2π , men $r = 4 \cdot \sin(2\theta) < 0$ for $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ og for $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$.

Det gjør det litt kinkig å integrere, fordi $dA = r \cdot dr \cdot d\theta < 0$ på disse intervallene.

Vi må derfor dele opp integrasjonsområdet slik at θ ikke skifter fortegn på noe intervall, slik at vi kan kontrollere fortegnet.

På den andre siden kan det være fristende å integrere over „kronbladet” i første kvadrant, og multiplisere resultatet med 4, for kronbladene må være kongruente.

Ja, siden dette kronbladet også er symmetrisk om linjen $y = x$, burde det holde å integrere over det halve kronbladet, for så å multiplisere resultatet med 8.

Men slik er det nok ikke. Riktignok er de 8 kronblad-halvpartene kongruente, men integranden $\frac{r^2 \sin(\theta)^2}{r^2 + 1}$ er avhengig av $\sin(\theta)^2$.

Og $\sin(\theta)^2$ er symmetrisk om de to koordinataksene (slik kronbladene er), men *ikke* om aksene $y = x$ og $y = -x$.

Derfor kan vi integrere over delen av området som ligger i første kvadrant, og så multiplisere det hele med 4.

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den treffer kurven $r = 4 \sin(2\theta)$.

Vi skal ha med sektoren fra $\theta = 0$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet $4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=4 \sin(2\theta)} f(r, \theta) \cdot r \, dr \, d\theta$.

> 4·int(int($\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2 + 1} \cdot r$, r = 0 .. 4·sin(2·theta)), theta = 0 .. $\frac{\text{Pi}}{2}$)

Warning, computation interrupted

Hva skjer nå? Maple regner og regner og regner. Nei, dette er ikke noe å vente på.

Så stans Maple! Det gjør du ved å klikke på stoppskiltet i øverste kommandolinje på arbeidsarket.

(Det er rødt, med en hvit, åpen hånd som holdes opp.)

Jeg avbrøt Maple etter 5 minutter.

Dette integralet ble antakelig for vanskelig for Maple. Maple regnet og regnet uten å komme i mål.

Vi får heller la Maple evaluere det numerisk.

> evalf(4·Int(Int($\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2 + 1} \cdot r$, r = 0 .. 4·sin(2·theta)), theta = 0 .. $\frac{\text{Pi}}{2}$))

Merk at vi skriver *Int* med stor forbokstav når vi integrerer numerisk.

(Ellers prøver Maple å først integrere eksakt, for så å skrive svaret på desimalform.)

Akkurat i denne oppgaven, ser vi at det innerste integralet er et r -integral som slett ikke er vanskelig å bregne.

Derfor kan vi godt la Maple integrere det eksakt, ved å skrive *int* på det innerste integralet. Bare prøv!

Det er θ -integralet vi da får som volder problemet.

d)

Området D må beskrives i polarkoordinater hvis vi skal integrere i polarkoordinater (og det ser jo lurt ut).

Siden $x^2 + y^2 = r^2$, er $x^2 + y^2 \leq 9$ det samme som $r^2 \leq 9$, altså $0 \leq r \leq 3$, altså sirkelskiven med sentrum i origo og radius 3.

Siden $y = r \cdot \sin \theta$, er linjen $y = 1$ det samme som $r \cdot \sin \theta = 1$, altså $r = \frac{1}{\sin \theta}$.

Vi kan ikke plote dette for alle θ , for $\sin \theta = 0$ er litt kinkig.

La oss plote området i kartesiske koordinater først, så vi har en idé om hvordan dette blir.

> *with(plots)*

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

(4)

> $P1 := \text{implicitplot}(x^2 + y^2 = 9, x = -4..4, y = -4..4, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{color} = \text{green})$

$P1 := \text{PLOT}(\dots)$

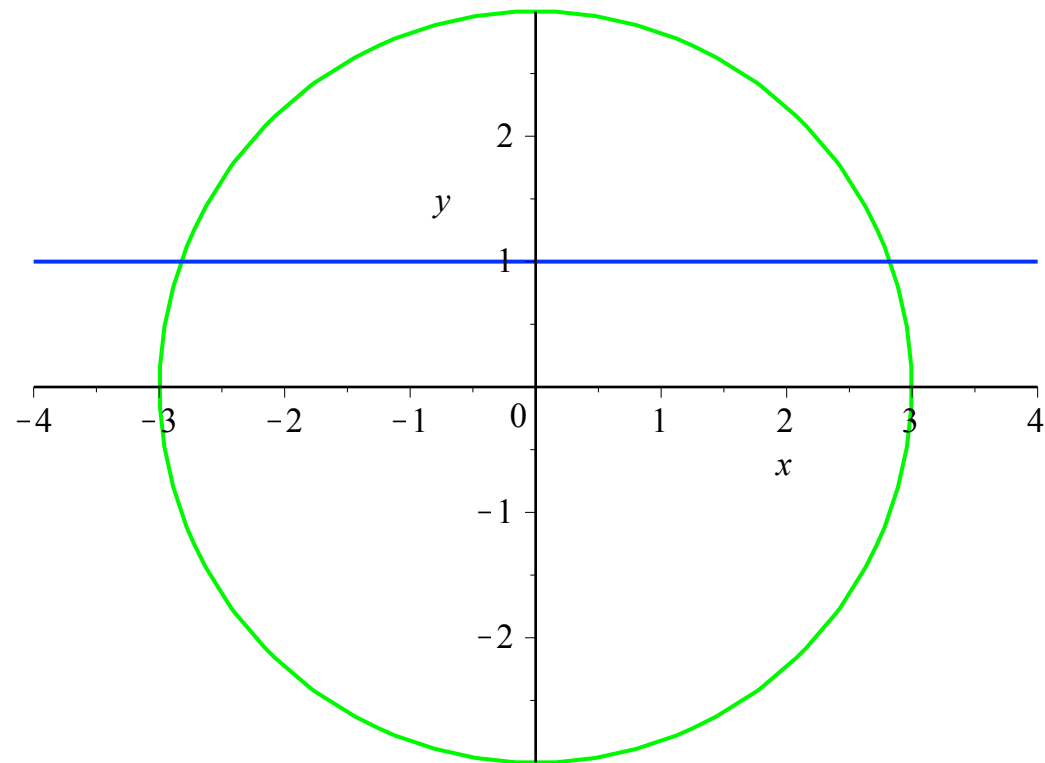
(5)

> $P2 := \text{plot}(1, x = -4..4, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{color} = \text{blue})$

$P2 := \text{PLOT}(\dots)$

(6)

> *display(P1, P2)*



>

Aha! D er den delen av området innenfor sirkelen som ligger ovenfor linjen $y = 1$.
Resten av jobben overlater jeg til deg.

Oppgave 11.5.13.

a)

Vi tegner først integrasjonsområdet.

For kurver som er gitt ved $r = g(\theta)$ kan vi bruke kommandoen *polarplot* (som krever at vi henter inn Maples plottekommandoer):

```
> with(plots)
> polarplot(2*cos(theta), theta = 0..2*Pi)
```

OBS! Origo er i midten av nettet, men tallene langs ytterkanten er verdiene av θ . (Nullen ytterst til høyre betyr altså at $\theta = 0$, slik at det markerer punktet $(2, 0)$ i polarkoordinater.

Ved nærmere undersøkelse, ser vi at vi bare trenger å la θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$ for at denne sirkelen skal bli beskrevet én gang. ($\cos(\theta) \geq 0$ for disse verdiene av θ .)

Det er viktig å vite når vi skal integrere!!! (Test gjerne hvordan plottet blir for ulike θ -intervaller.)

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den når sirkelen $r = 2 \cos \theta$.

For å få med alle sektorene, lar vi θ gå fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.

Når vi skriver opp det itererte integralet, må vi huske at $dA = r \, dr \, d\theta$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet
$$\int_{\theta = -\frac{\pi}{2}}^{\theta = \frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2 \cos \theta} f(r, \theta) \cdot r \cdot dr \, d\theta.$$

Når vi så skriver opp integralet til Maple, kan vi glemme hvor det kommer fra.

```
> int(int(r^2*sin(theta)^2*r, r = 0..2*cos(theta)), theta = -Pi/2..Pi/2)
```

c)

Også her er området begrenset av en kurve gitt ved en likning på formen $r = g(\theta)$:

> `polarplot(4·sin(2·theta), theta = 0..2·Pi)`

OBS! Kurven gjennomløpes bare én gang når θ går fra 0 til 2π , men $r = 4 \cdot \sin(2\theta) < 0$ for $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ og for $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

Det gjør det litt kinkig å integrere, fordi $dA = r \cdot dr \cdot d\theta < 0$ på disse intervallene.

Vi må derfor dele opp integrasjonsområdet slik at θ ikke skifter fortegn på noe intervall, slik at vi kan kontrollere fortegnet.

På den andre siden kan det være fristende å integrere over „kronbladet“ i første kvadrant, og multiplisere resultatet med 4, for kronbladene må være kongruente.

Ja, siden dette kronbladet også er symmetrisk om linjen $y = x$, burde det holde å integrere over det halve kronbladet, for så å multiplisere resultatet med 8.

Men slik er det nok ikke. Riktignok er de 8 kronblad-halvpartene kongruente, men integranden $\frac{r^2 \sin(\theta)^2}{r^2 + 1}$ er avhengig av $\sin(\theta)^2$.

Og $\sin(\theta)^2$ er symmetrisk om de to koordinataksene (slik kronbladene er), men *ikke* om aksene $y = x$ og $y = -x$.

Derfor kan vi integrere over delen av området som ligger i første kvadrant, og så multiplisere det hele med 4.

Vi velger å integrere sektorvis. I hver sektor vil r gå fra 0 til den treffer kurven $r = 4 \sin(2\theta)$.

Vi skal ha med sektoren fra $\theta = 0$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Vi skal altså beregne det itererte integralet $4 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=4 \sin(2\theta)} f(r, \theta) \cdot r \, dr \, d\theta$.

$$> 4 \cdot \text{int} \left(\text{int} \left(\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2 + 1} \cdot r, r = 0 .. 4 \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) \right), \text{theta} = 0 .. \frac{\text{Pi}}{2} \right)$$

Hva skjer nå? Maple regner og regner og regner. Nei, dette er ikke noe å vente på.
Så stans Maple! Det gjør du ved å klikke på stoppskiltet i øverste kommandolinje på arbeidsarket.
(Det er rødt, med en hvit, åpen hånd som holdes opp.)
Jeg avbrøt Maple etter 5 minutter.

Dette integralet ble antakelig for vanskelig for Maple. Maple regnet og regnet uten å komme i mål.
Vi får heller la Maple evaluere det numerisk.

$$> \text{evalf} \left(4 \cdot \text{Int} \left(\text{Int} \left(\frac{r^2 \cdot \sin(\text{theta})^2}{r^2 + 1} \cdot r, r = 0 .. 4 \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) \right), \text{theta} = 0 .. \frac{\text{Pi}}{2} \right) \right)$$

Merk at vi skriver *Int* med stor forbokstav når vi integrerer numerisk.
(Ellers prøver Maple å først integrere eksakt, for så å skrive svaret på desimalform.)
Akkurat i denne oppgaven, ser vi at det innerste integralet er et *r*-integral som slett ikke er vanskelig å bregne.
Derfor kan vi godt la Maple integrere det eksakt, ved å skrive *int* på det innerste integralet. Bare prøv!
Det er *θ*-integralet vi da får som volder problemet.

d)

Området D må beskrives i polarkoordinater hvis vi skal integrere i polarkoordinater (og det ser jo lurt ut).
Siden $x^2 + y^2 = r^2$, er $x^2 + y^2 \leq 9$ det samme som $r^2 \leq 9$, altså $0 \leq r \leq 3$, altså sirkelskiven med sentrum i origo og radius 3.
Siden $y = r \cdot \sin \theta$, er linjen $y = 1$ det samme som $r \cdot \sin \theta = 1$, altså $r = \frac{1}{\sin \theta}$.

Vi kan ikke plote dette for alle θ , for $\sin \theta = 0$ er litt kinkig.
La oss plote området i kartesiske koordinater først, så vi har en idé om hvordan dette blir.

> *with(plots)*

```
> P1 := implicitplot(x2 + y2 = 9, x = -4 .. 4, y = -4 .. 4, scaling = constrained, color = green)
```

```
> P2 := plot(1, x = -4 .. 4, scaling = constrained, color = blue)
```

```
> display(P1, P2)
```

```
>
```

Aha! D er den delen av området innenfor sirkelen som ligger ovenfor linjen $y = 1$.

Resten av jobben overlater jeg til deg.

Oppgave 11.7.13.

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

(1)

a)

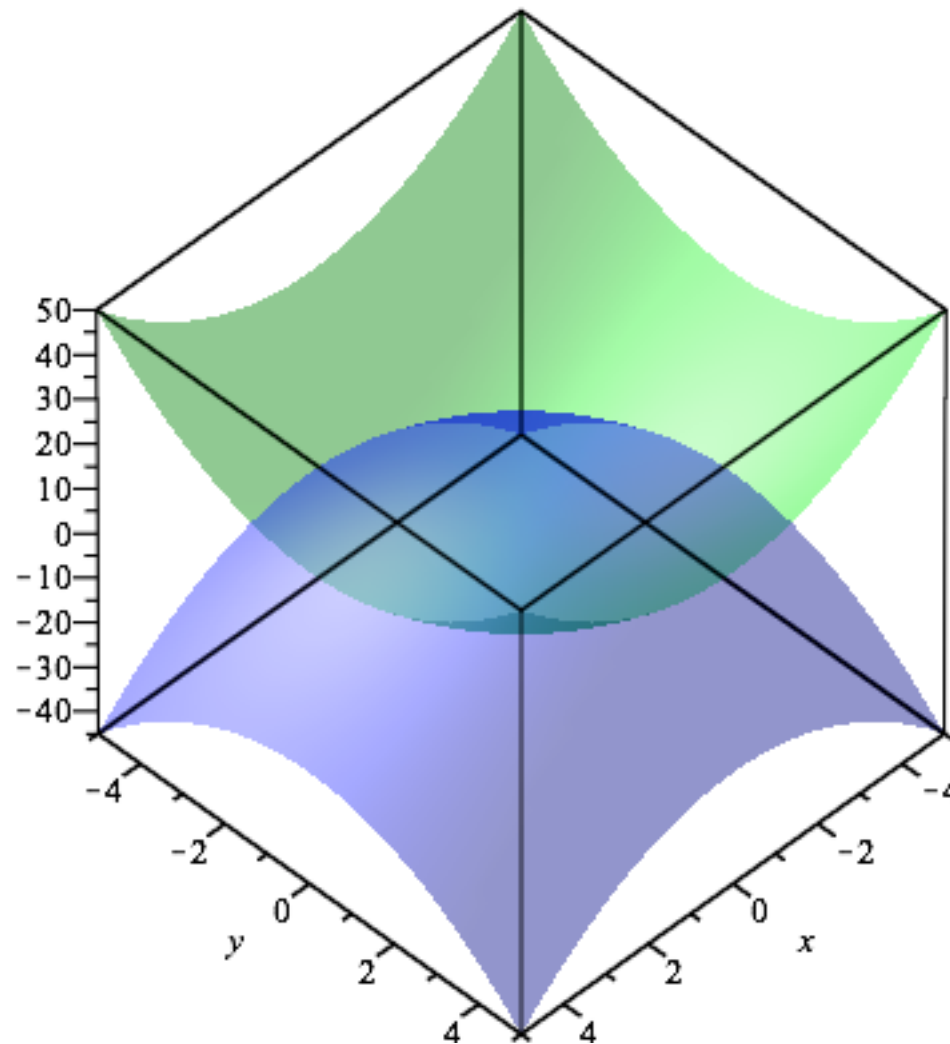
```
> P1 := plot3d( $x^2 + y^2$ , x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, style = surface, transparency = 0.5, color = green)
P1 := PLOT3D(...)
```

(2)

```
> P2 := plot3d( $5 - x^2 - y^2$ , x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, style = surface, transparency = 0.5, color = blue)
P2 := PLOT3D(...)
```

(3)

```
> display(P1, P2)
```



Det ser ut til at dette blir to rotasjonsparaboloider som står mot hverandre, og derved avgrenser et område mellom dem. Ser vi litt næyere på likningene for de to flatene, ser vi at slik er det. De må skjære hverandre langs en sirkel. Vi ser det hele tydeligere om vi skriver likningene i sylinderkoordinater:
P1: $z = r^2$

P2: $z = 5 - r^2$

De skjærer hverandre når $r^2 = 5 - r^2$, altså $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ der høyden er $z = r^2 = \frac{5}{2}$

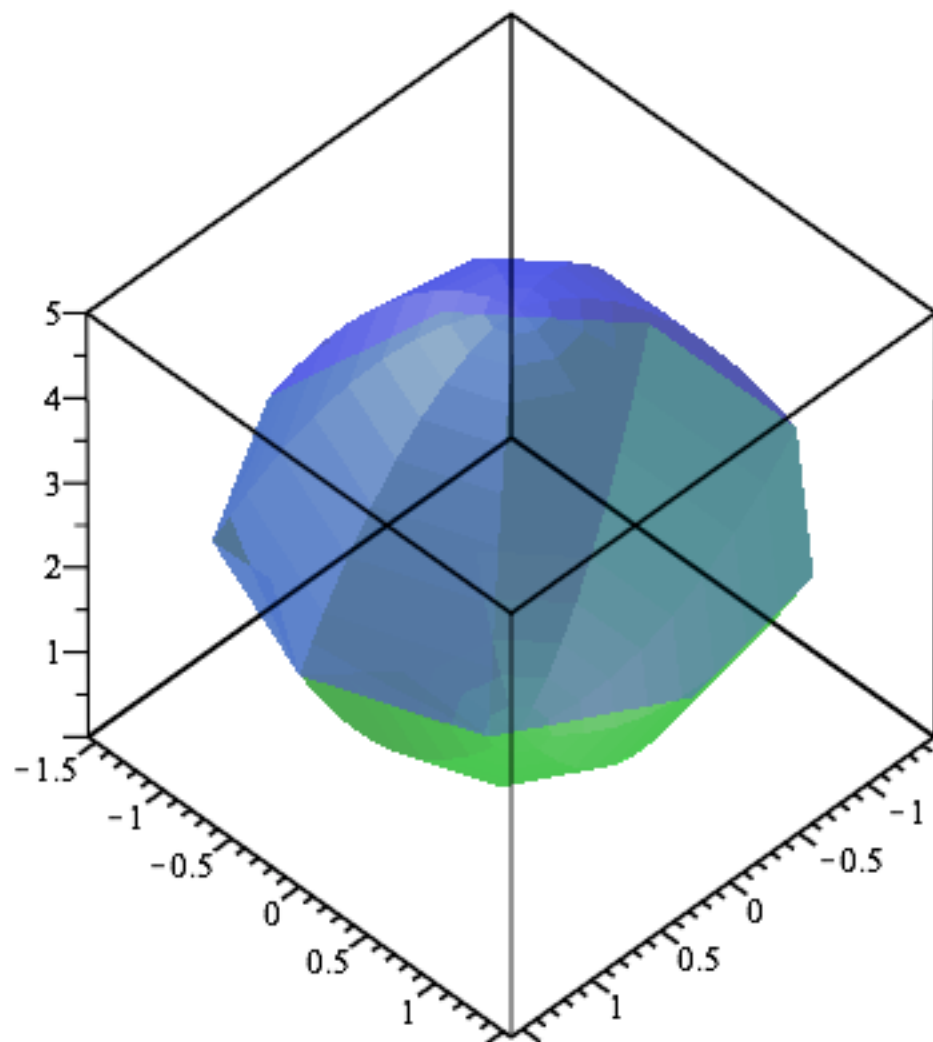
```
> P1 := implicitplot3d(z = r^2, r = 0 .. sqrt(5/2), theta = 0 .. 2*Pi, z = 0 .. 5/2, style = surface, transparency = 0.5, color = green, coords = cylindrical)
```

P1 := PLOT3D(...) **(4)**

```
> P2 := implicitplot3d(z = 5 - r^2, r = 0 .. sqrt(5/2), theta = 0 .. 2*Pi, z = 5/2 .. 5, style = surface, transparency = 0.5, color = blue, coords = cylindrical)
```

P2 := PLOT3D(...) **(5)**

```
> display(P1, P2)
```



Når vi snur og dreier litt på figuren, ser vi tydeligere at z må gå fra den grønne flaten til den blå, altså fra $z = (x^2 + y^2)$ til $z = 5 - (x^2 + y^2)$.

For å få med oss alle søylene, må vi integrere over sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}$ i xy -planet.

Det er klart at det må lønne seg å integrere i sylinderkoordinater, for figuren er begrenset av rotasjonsflater om z -aksen.

I sylinderkoordinater er $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \int_{z=r^2}^{5-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$.

$$\text{> int}\left(\text{int}\left(\text{int}\left(r, z = r^2 \dots 5 - r^2\right), r = 0 \dots \text{sqrt}\left(\frac{5}{2}\right)\right), \text{theta} = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi}\right) \\ \frac{25}{4} \pi$$

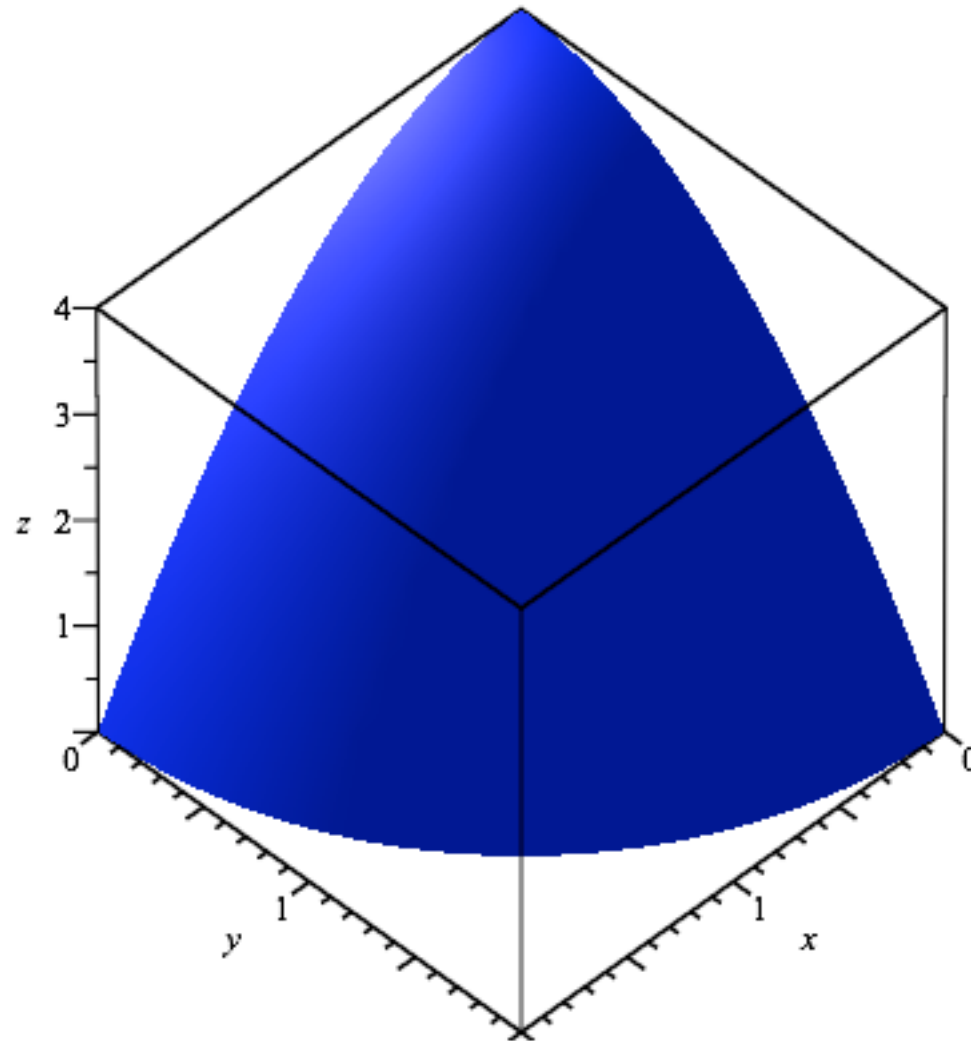
(6

e)

Flatene $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ er de tre koordinatplanene, så her holder det med å tegne flaten $z = 4 - x^2 - y^2$. I sylinderkoordinater skrives den $z = 4 - r^2$.

Vi velger å tegne den i sylinderkoordinater. Men siden vi bare skal ha den delen av flaten som ligger i første oktant, vil θ bare gå fra 0 til $\frac{\pi}{2}$

$$\text{> plot3d}\left(\left[r, \text{theta}, 4 - r^2\right], r = 0 \dots 2, \text{theta} = 0 \dots \frac{\text{Pi}}{2}, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{"blue"}, \text{axes} = \text{boxed}, \text{labels} = [x, y, z]\right)$$



De manglende sidene er de tre koordinatplanene i første oktant, fra origo og ut til den blå flaten. (Drei gjerne litt på figuren for å se hvordan flaten går.)

Volumet til T er derfor

$$> \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}\left(r, z = 0 \dots 4 - r^2\right), r = 0 \dots 2\right), \text{theta} = 0 \dots \frac{\text{Pi}}{2}\right)$$

$$2\pi$$

(7)

For å tegne et skikkelig bilde av T må vi naturligvis ha med de manglende sidene:

$$\begin{aligned} &> P1 := \text{plot3d}\left(\left[r, \text{theta}, 4 - r^2\right], r = 0..2, \text{theta} = 0.. \frac{\text{Pi}}{2}, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{blue}\right) \\ &\quad P1 := \text{PLOT3D}(\dots) \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} &> P2 := \text{plot3d}\left(\left[r, \text{theta}, 0\right], r = 0..2, \text{theta} = 0.. \frac{\text{Pi}}{2}, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{yellow}, \text{transparency} = 0.5\right) \\ &\quad P2 := \text{PLOT3D}(\dots) \end{aligned}$$

(9)

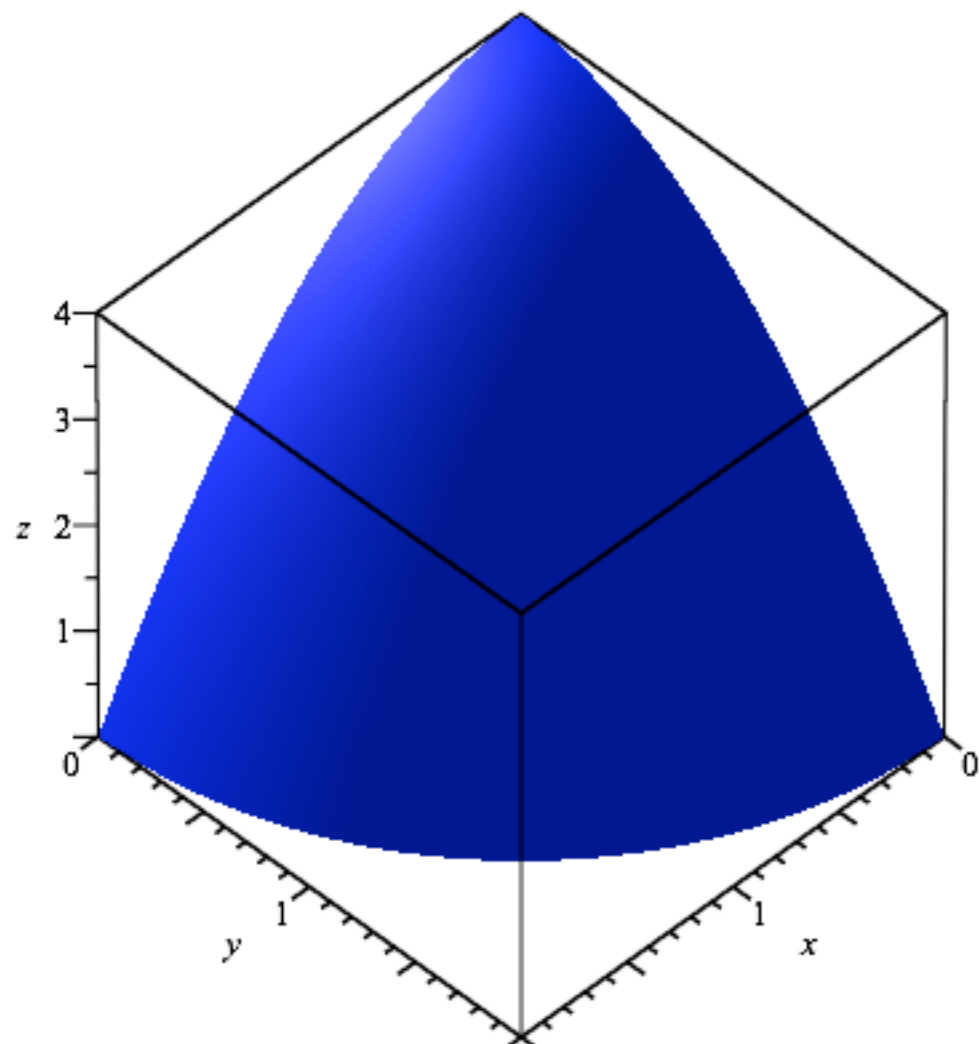
$$\begin{aligned} &> P3 := \text{plot3d}\left(\left[r, \frac{\text{Pi}}{2}, z\right], r = 0..2, z = 0..4 - r^2, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{yellow}, \text{transparency} = 0.5\right) \\ &\quad P3 := \text{PLOT3D}(\dots) \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} &> P4 := \text{plot3d}\left(\left[r, 0, z\right], r = 0..2, z = 0..4 - r^2, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{yellow}, \text{transparency} = 0.5\right) \\ &\quad P4 := \text{PLOT3D}(\dots) \end{aligned}$$

(11)

$$> \text{display}(P1, P2, P3, P4, \text{axes} = \text{boxed}, \text{labels} = [x, y, z])$$



Oppgave 11.7.14.

a)

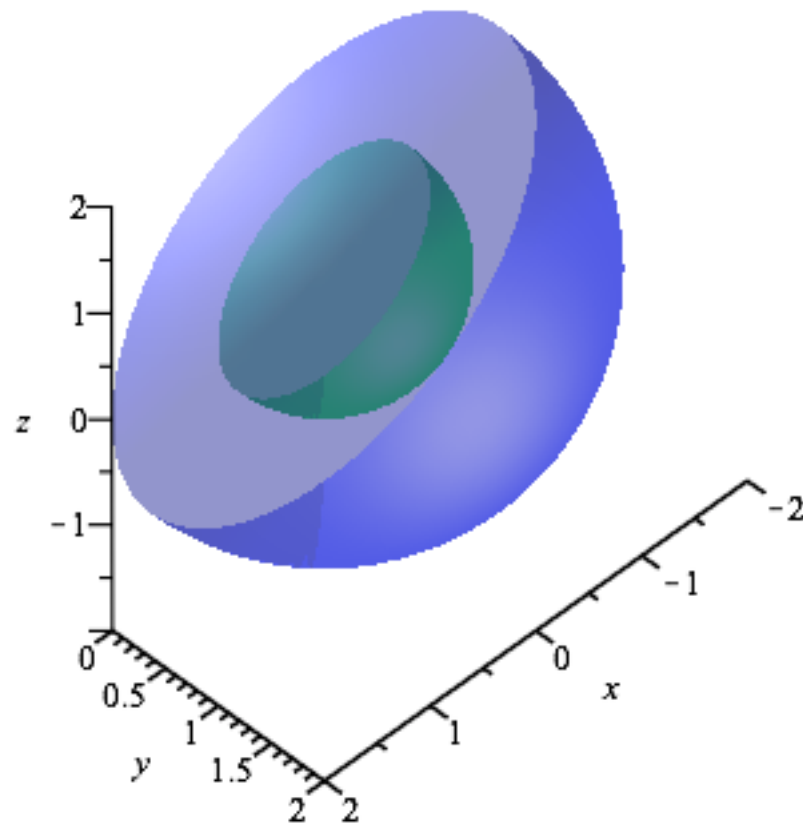
I kulekoordinater er T gitt ved $1 \leq \rho \leq 2$ for $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Det er området mellom to kuleflater med sentrum i origo. Den indre kuleflaten har radius 1, mens den ytre kuleflaten har radius 2.

Det er antakelig letter å se få med begge kuleflatene på figuren om vi bare tegner den delen av figuren som ligger til høyre for xz -planet.

```
> P1 := plot3d(1, theta = 0 .. pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.5, color = green)
P1 := PLOT3D(...) (12)
```

```
> P2 := plot3d(2, theta = 0 .. pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.5, color = blue)
P2 := PLOT3D(...) (13)
```

```
> display(P1, P2, axes = framed, labels = [x, y, z])
```



For å finne volumet av T , trenger vi egentlig ikke å integrere. Volumet av en kule med radius R er jo $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volumet av T er derfor $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28\pi}{3}$.

Men vi kan jo be Maple omå integrere for kontrollens skyld:

```
> int(int(int( $r^2 \cdot \sin(\text{phi})$ ),  $r = 1 \dots 2$ ),  $\text{phi} = 0 \dots \text{Pi}$ ),  $\text{theta} = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi}$ )
```

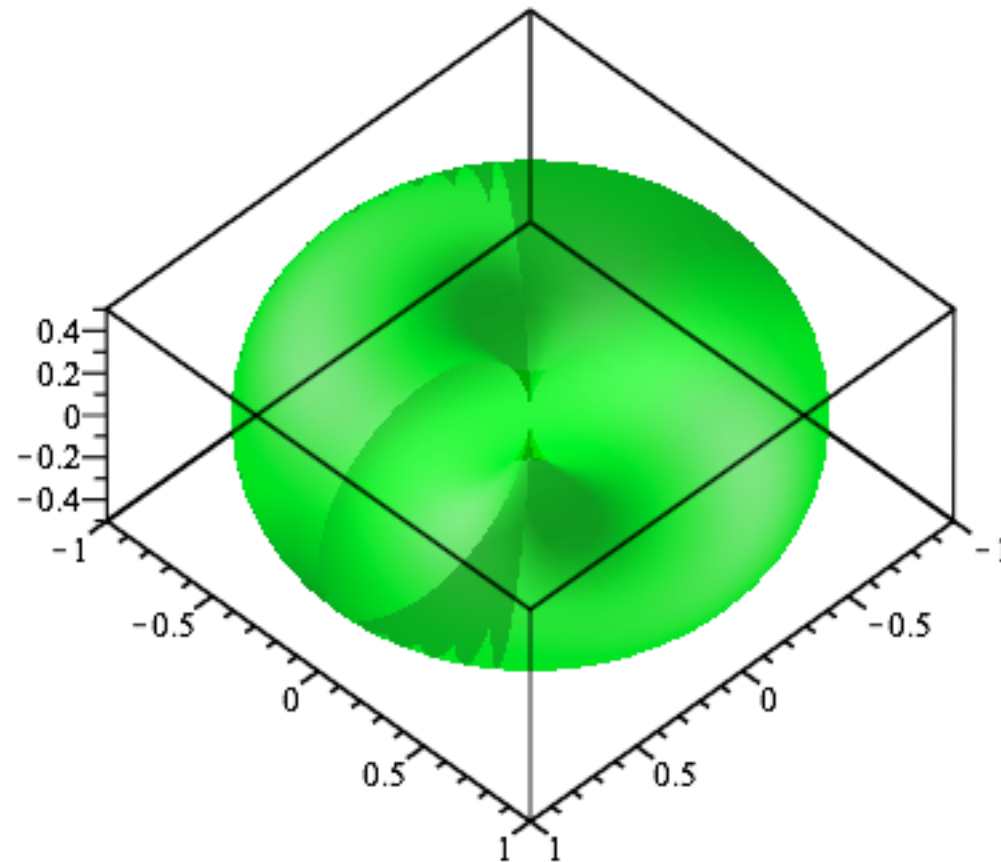
$\frac{28}{3} \pi$

(14

b)

I kulekoordinater er T avgrenset av flaten gitt ved $0 \leq \rho \leq \sin(\text{phi})$ for $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Vi plotter denne flaten:

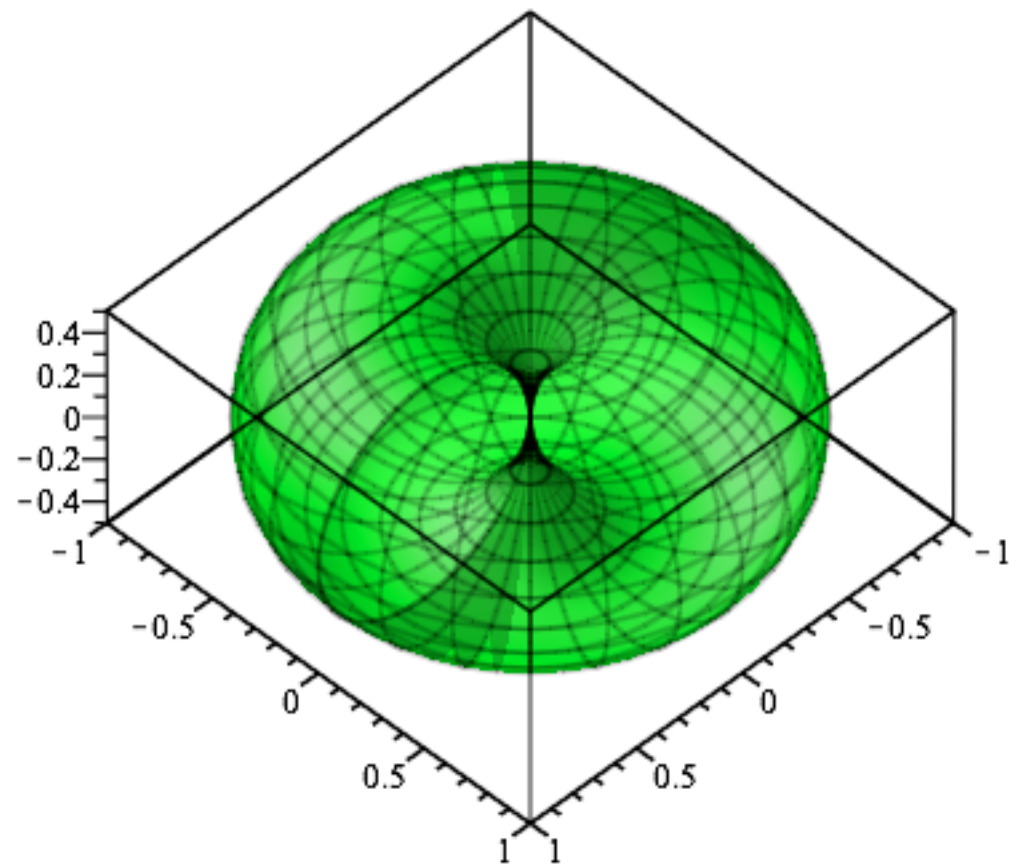
```
> plot3d(sin(phi), theta = 0 .. 2 * pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.3, color = green)
```



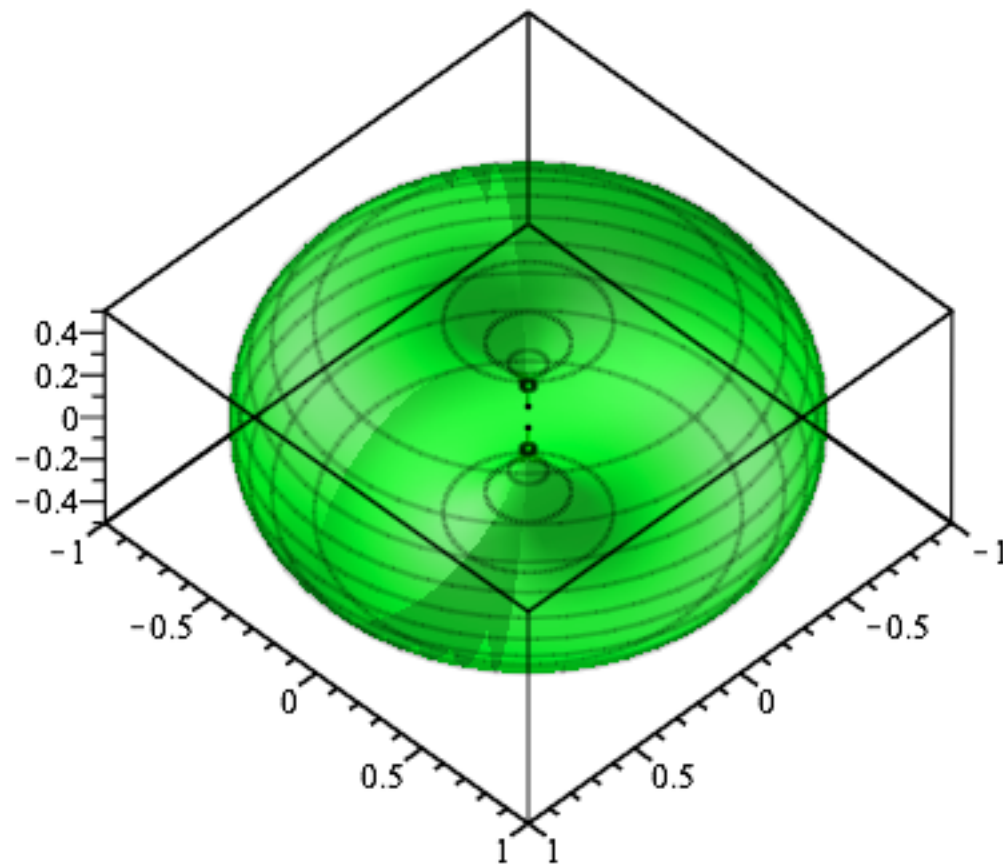
>

Det er ikke så lett å bli klar over hvordan denne figuren ser ut. La oss legge på noen strukturlinjer:

> `plot3d(sin(phi), theta = 0..2·π, phi = 0..π, coords = spherical, scaling = constrained, style = patch, transparency = 0.3, color = green)`



> `plot3d(sin(phi), theta = 0..2*pi, phi = 0..pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surfacecontour, transparency = 0.3, color = green)`



Det er nok en slags smultring med hull langs z-aksen tvers igjennom, unntatt i origo
 Integralet er lettere å regne ut:

$$\left[\begin{array}{l} > \text{int}\left(\text{int}\left(\text{int}\left(\rho^2 \cdot \sin(\phi), \rho = 0 \dots \sin(\phi)\right), \theta = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi}\right), \phi = 0 \dots \text{Pi}\right) \\ & \frac{1}{4} \pi^2 \end{array} \right.$$



Oppgave 11.7.13.

[> *with(plots)*

a)

[> *P1 := plot3d(x² + y², x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, style = surface, transparency = 0.5, color = green)*

[> *P2 := plot3d(5 - x² - y², x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, style = surface, transparency = 0.5, color = blue)*

[> *display(P1, P2)*

Det ser ut til at dette blir to rotasjonsparaboloider som står mot hverandre, og derved avgrenser et område mellom dem.

Ser vi litt nærmere på likningene for de to flatene, ser vi at slik er det.

De må skjære hverandre langs en sirkel.

Vi ser det hele tydeligere om vi skriver likningene i sylinderkoordinater:

$$P1: z = r^2$$

$$P2: z = 5 - r^2$$

De skjærer hverandre når $r^2 = 5 - r^2$, altså $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ der høyden er $z = r^2 = \frac{5}{2}$

> *P1 := implicitplot3d(z = r², r = 0 .. sqrt($\frac{5}{2}$), theta = 0 .. 2·Pi, z = 0 .. $\frac{5}{2}$, style = surface, transparency = 0.5, color = green, coords = cylindrical)*

> *P2 := implicitplot3d(z = 5 - r², r = 0 .. sqrt($\frac{5}{2}$), theta = 0 .. 2·Pi, z = $\frac{5}{2}$.. 5, style = surface, transparency = 0.5, color = blue, coords*

```

    = cylindrical)
> display(P1, P2)

```

Når vi snur og dreier litt på figuren, ser vi tydeligere at z må gå fra den grønne flaten til den blå, altså fra $z = (x^2 + y^2)$ til $z = 5 - (x^2 + y^2)$.

For å få med oss alle søylene, må vi integrere over sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq \frac{5}{2}$ i xy -planet.

Det er klart at det må lønne seg å integrere i sylinderkoordinater, for figuren er begrenset av rotasjonsflater om z -aksen. I sylinderkoordinater er $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$.

Det itererte integralet vi skal beregne er altså
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{\frac{5}{2}}} \int_{z=r^2}^{5-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

```

> int(int(int(r, z = r^2 .. 5 - r^2), r = 0 .. sqrt(5/2)), theta = 0 .. 2 * Pi)

```

e)

Flatene $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ er de tre koordinatplanene, så her holder det med å tegne flaten $z = 4 - x^2 - y^2$. I sylinderkoordinater skrives den $z = 4 - r^2$.

Vi velger å tegne den i sylinderkoordinater. Men siden vi bare skal ha den delen av flaten som ligger i første oktant, vil θ bare gå fra 0 til $\frac{\pi}{2}$.

```

> plot3d([r, theta, 4 - r^2], r = 0 .. 2, theta = 0 .. Pi/2, coords = cylindrical, style = surface, color = "blue", axes = boxed, labels = [x, y,
    z])

```

De manglende sidene er de tre koordinatplanene i første oktant, fra origo og ut til den blå flaten. (Drei gjerne litt på figuren for å se hvordan flaten går.)

Volumet til T er derfor

$$> \int \left(\int \left(\int (r, z = 0..4 - r^2), r = 0..2 \right), \theta = 0.. \frac{\pi}{2} \right)$$

For å tegne et skikkelig bilde av T må vi naturligvis ha med de manglende sidene:

$$> P1 := \text{plot3d} \left([r, \theta, 4 - r^2], r = 0..2, \theta = 0.. \frac{\pi}{2}, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{blue} \right)$$

$$> P2 := \text{plot3d} \left([r, \theta, 0], r = 0..2, \theta = 0.. \frac{\pi}{2}, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{yellow}, \text{transparency} = 0.5 \right)$$

$$> P3 := \text{plot3d} \left(\left[r, \frac{\pi}{2}, z \right], r = 0..2, z = 0..4 - r^2, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{yellow}, \text{transparency} = 0.5 \right)$$

$$> P4 := \text{plot3d} \left([r, 0, z], r = 0..2, z = 0..4 - r^2, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{style} = \text{surface}, \text{color} = \text{yellow}, \text{transparency} = 0.5 \right)$$

$$> \text{display}(P1, P2, P3, P4, \text{axes} = \text{boxed}, \text{labels} = [x, y, z])$$

Oppgave 11.7.14.

a)

I kulekoordinater er T gitt ved $1 \leq \rho \leq 2$ for $0 \leq \varphi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Det er området mellom to kuleflater med sentrum i origo. Den indre kuleflaten har radius 1, mens den ytre kuleflaten har radius 2.

Det er antakelig letter å se få med begge kuleflatene på figuren om vi bare tegner den delen av figuren som ligger til høyre for xz -planet.

```

> P1 := plot3d(1, theta = 0 .. pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.5, color = green)
> P2 := plot3d(2, theta = 0 .. pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.5, color = blue)
> display(P1, P2, axes = framed, labels = [x, y, z])

```

For å finne volumet av T , trenger vi egentlig ikke å integrere. Volumet av en kule med radius R er jo $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volumet av T er derfor $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28\pi}{3}$.

Men vi kan jo be Maple om å integrere for kontrollens skyld:

```

> int(int(int(r^2 * sin(phi), r = 1 .. 2), phi = 0 .. Pi), theta = 0 .. 2 * Pi)

```

b)

I kulekoordinater er T avgrenset av flaten gitt ved $0 \leq \rho \leq \sin(\phi)$ for $0 \leq \phi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Vi plotter denne flaten:

```

> plot3d(sin(phi), theta = 0 .. 2 * pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surface, transparency = 0.3, color = green)
>

```

Det er ikke så lett å bli klar over hvordan denne figuren ser ut. La oss legge på noen strukturlinjer:

```

> plot3d(sin(phi), theta = 0 .. 2 * pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = patch, transparency = 0.3, color = green)
> plot3d(sin(phi), theta = 0 .. 2 * pi, phi = 0 .. pi, coords = spherical, scaling = constrained, style = surfacecontour, transparency = 0.3, color = green)

```

Det er nok en slags smultring med hull langs z -aksen tvers igjennom, unntatt i origo

Integralet er lettere å regne ut:

```
|> int(int(int(ρ2·sin(phi), rho = 0 ..sin(phi) ), theta = 0 ..2·Pi), phi = 0 ..Pi)  
|>
```

Oppgave 11.9.9.

a)

Her er flaten gitt som grafen til funksjonen

$$> f := (x, y) \rightarrow \frac{(x^3 + 2y^2 + 1)}{x^4 + 1}$$

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{x^3 + 2y^2 + 1}{x^4 + 1}$$

(1)

Det er derfor klart at flatedifferensialet er $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$.

Vi beregner dette kvadratrotuttrykket. Siden uttrykket skal integreres, må det få formen av en funksjon:

$$> \text{sqrt}(1 + \text{diff}(f(x, y), x)^2 + \text{diff}(f(x, y), y)^2)$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{3x^2}{x^4 + 1} - \frac{4(x^3 + 2y^2 + 1)x^3}{(x^4 + 1)^2} \right)^2 + \frac{16y^2}{(x^4 + 1)^2}}$$

(2)

Integralet vi skal beregne er derved $\iint_S dS = \iint_S 1 \cdot dS = \iint_D 1 \cdot q(x, y) \, dA$ der D er variasjonsområdet for (x, y) .

Med andre ord, vi skal beregne det itererte integralet $\int_{x=-1}^3 \int_{y=0}^2 q(x, y) \, dy \, dx$:

$$> \text{int} \left(\text{int} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3x^2}{x^4 + 1} - \frac{4(x^3 + 2y^2 + 1)x^3}{(x^4 + 1)^2} \right)^2 + \frac{16y^2}{(x^4 + 1)^2}}, y = 0 .. 2 \right), x = -1 .. 3 \right)$$

Warning, computation interrupted

NEI!!! STOPP MAPLE!!!!

(Klikk på det røde skiltet med hvit hånd i den øverste kommandolinjen på arbeidsarket.)

Dette tar altfor lang tid, Og Maple kommer antakelig ikke frem til et eksakt svar.

Vi prøver heller med en numerisk integrasjon (Husk stor I i *Int*) :

$$\begin{aligned} & \text{evalf} \left(\text{Int} \left(\text{Int} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{3x^2}{x^4 + 1} - \frac{4(x^3 + 2y^2 + 1)x^3}{(x^4 + 1)^2} \right)^2} + \frac{16y^2}{(x^4 + 1)^2}, y = 0 \dots 2 \right), x = -1 \dots 3 \right) \right) \\ & \quad \quad \quad 24.46845407 \end{aligned}$$

(3

Oppgave 11.9.9.

a)

Her er flaten gitt som grafen til funksjonen

$$> f := (x, y) \rightarrow \frac{(x^3 + 2y^2 + 1)}{x^4 + 1}$$

Det er derfor klart at flatedifferensialet er $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$.

Vi beregner dette kvadrattuttrykket. Siden uttrykket skal integreres, må det få formen av en funksjon:

$$> \text{sqrt}(1 + \text{diff}(f(x, y), x)^2 + \text{diff}(f(x, y), y)^2)$$

Integralet vi skal beregne er derved $\iint_S dS = \iint_S 1 \cdot dS = \iint_D 1 \cdot q(x, y) \, dA$ der D er variasjonsområdet for (x, y) .

Med andre ord, vi skal beregne det itererte integralet $\int_{x=-1}^3 \int_{y=0}^2 q(x, y) \, dy \, dx$:

$$> \text{int}\left(\text{int}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{3x^2}{x^4 + 1} - \frac{4(x^3 + 2y^2 + 1)x^3}{(x^4 + 1)^2}\right)^2 + \frac{16y^2}{(x^4 + 1)^2}}, y = 0..2\right), x = -1..3\right)$$

NEI!!! STOPP MAPLE!!!!

(Klikk på det røde skiltet med hvit hånd i den øverste kommandolinjen på arbeidsarket.)

Dette tar altfor lang tid, Og Maple kommer antakelig ikke frem til et eksakt svar.

Vi prøver heller med en numerisk integrasjon (Husk stor I i Int) :

$$> \text{evalf}\left(\text{Int}\left(\text{Int}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{3x^2}{x^4 + 1} - \frac{4(x^3 + 2y^2 + 1)x^3}{(x^4 + 1)^2}\right)^2 + \frac{16y^2}{(x^4 + 1)^2}}, y = 0..2\right), x = -1..3\right)\right)$$

>

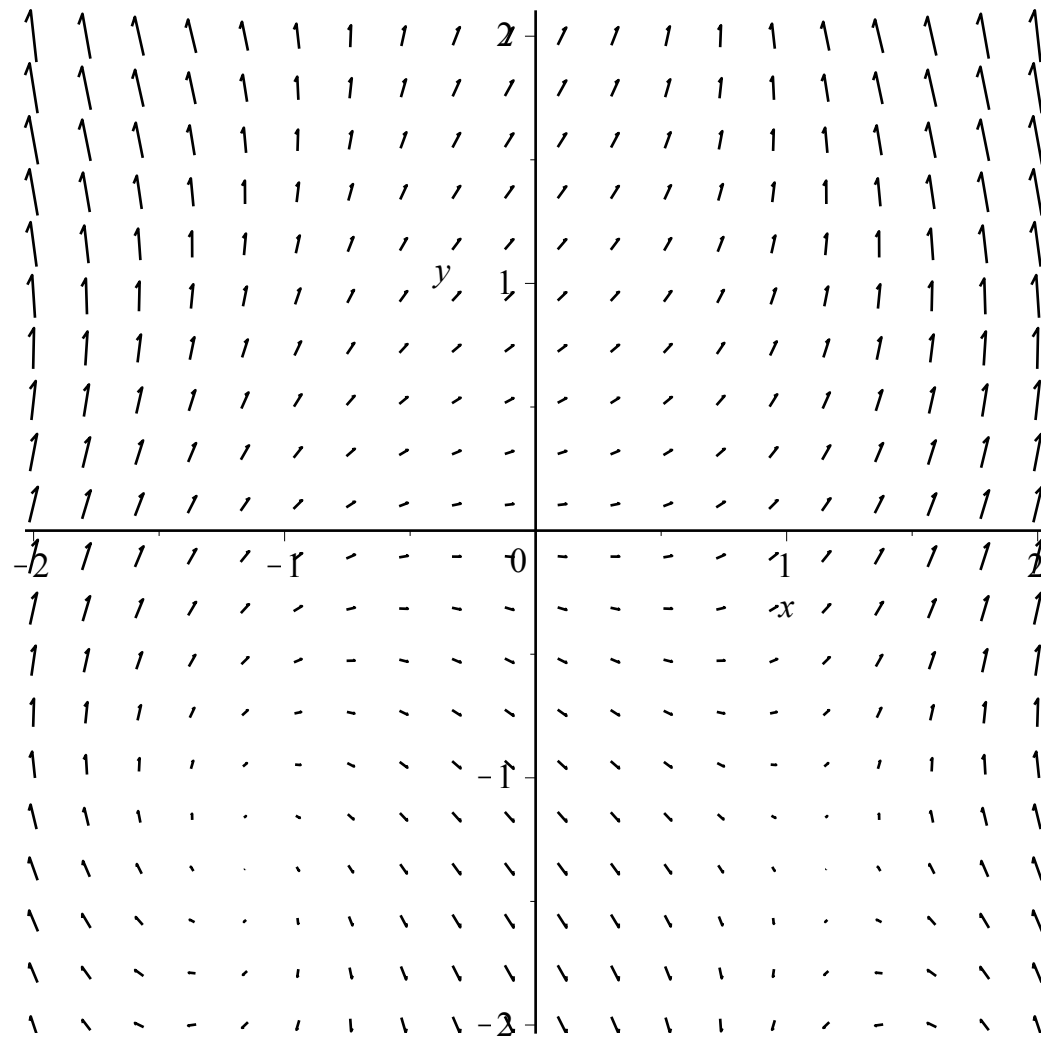
Oppgave 12.1.11.

a)

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,
  contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
  implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,
  loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,
  polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,
  sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

> fieldplot([cos(x·y), x2 + y], x=-2..2, y=-2..2)
```

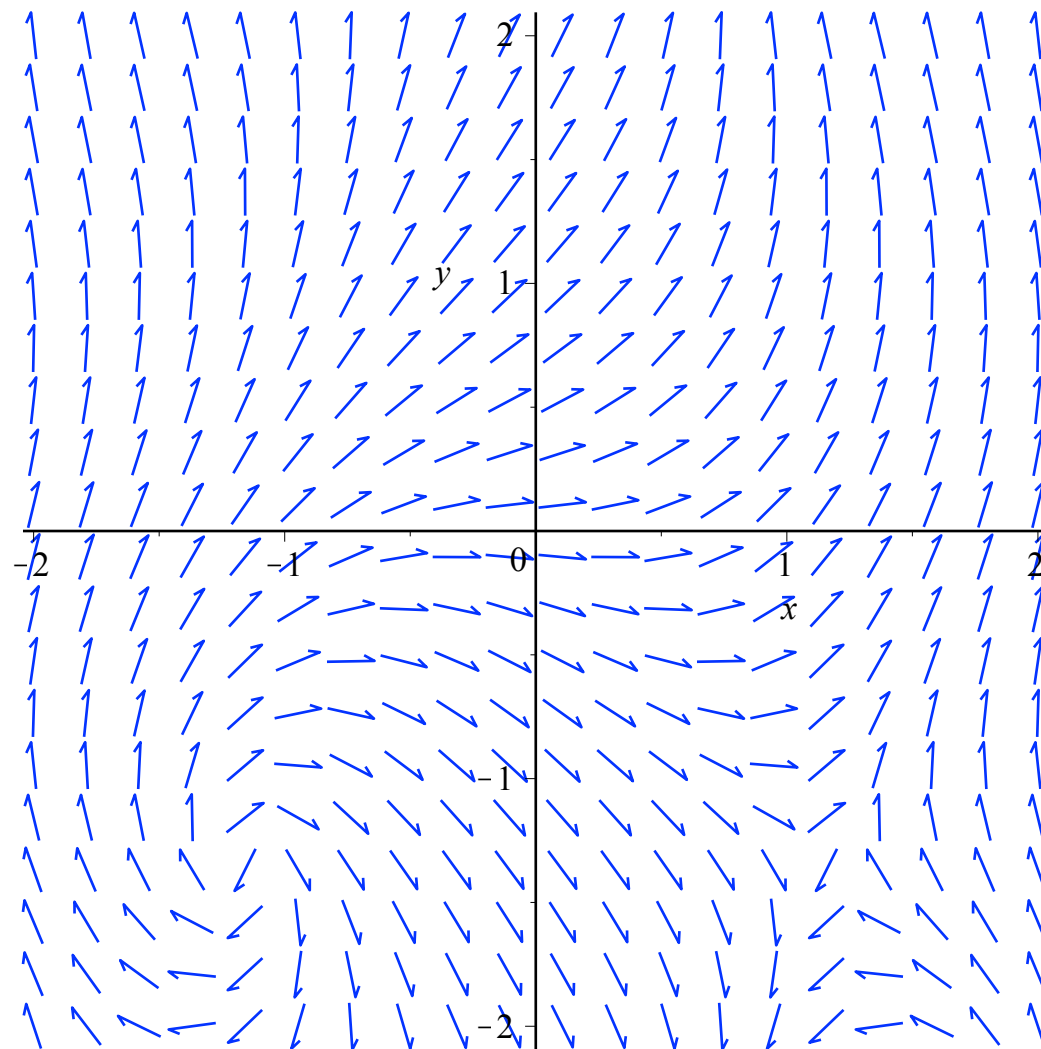
(1



Som du ser, tegner ikke Maple pilene med riktig lengde. De er forkortet for at plottet skal bli oversiktlig. Likevel kan vi se hvor pilene er korte og hvor de er lengre.

Hvis man vil, kan man be om at alle pilene skal ha samme lengde, slik at det er lettere å se retningen der pilene er korte. Vi kan også velge farge på pilene:

> `fieldplot([cos(x·y), x2 + y], x=-2..2, y=-2..2, fieldstrength=fixed, color=blue)`



Oppgave 12.1.11.

a)

```
[> with(plots)
=> fieldplot([cos(x·y), x2 + y], x=-2..2, y=-2..2)
```

Som du ser, tegner ikke Maple pilene med riktig lengde. De er forkortet for at plottet skal bli oversiktlig. Likevel kan vi se hvor pilene er korte og hvor de er lengre.

Hvis man vil, kan man be om at alle pilene skal ha samme lengde, slik at det er lettere å se retningen der pilene er korte. Vi kan også velge farge på pilene:

```
> fieldplot([cos(x·y), x2 + y], x=-2..2, y=-2..2, fieldstrength = fixed, color = blue)
=>
```

Oppgave 12.4.12.

a)

Vi importerer først både vektoranalyse- og plottekommandoene til Maple:

```
> with( VectorCalculus )  
[&x, '*', '+', '-', '^', '<', '>', '<|>', About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, Compatibility, ConvertVector,  
CrossProduct, Curl, Curvature, D, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters,  
GetCoordinates, GetNames, GetPVDDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector,  
IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis, Nabla, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector,  
PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates,  
SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, Tangent, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField,  
VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series ]
```

 (1)

```
> with( plots )  
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot,  
contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,  
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d,  
loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot,  
polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,  
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
```

 (2)

```
> F := VectorField( < x^3*cos(y), x*y*ln(1+x^2+y^2) > )  
Error, (in VectorCalculus:-VectorField) no coordinate names were given
```

Denne feilmeldingen kom opp fordi vi faktisk trenger å fortelle Maple hvilket koordinatsystem dette vektorfeltet er gitt i. Derfor setter vi først at vi jobber med to variable i kartesiske koordinater

```
> SetCoordinates( 'cartesian'[x, y] )
```

*cartesian*_{x, y} (3)

$$\begin{aligned} > F := \text{VectorField}(\langle x^3 \cdot \cos(y), x \cdot y \cdot \ln(1 + x^2 + y^2) \rangle) \\ & \quad F := (x^3 \cos(y)) \bar{e}_x + (x y \ln(x^2 + y^2 + 1)) \bar{e}_y \end{aligned} \quad (4)$$

$> \text{Curl}(F)$
 Error, (in VectorCalculus:-Curl) the input vector field must be three dimensional

Det er egentlig ganske naturlig at Maple vil ha tredimensjonale vektorfelt, for curlen er jo et slags kryss produkt. Men det er lett å fikse. Vi kjører med tre koordinater for vektorfeltet, der den siste koordinaten er lik 0.

$$\begin{aligned} > \text{SetCoordinates}('cartesian'[x, y, z]) \\ & \quad \text{cartesian}_{x, y, z} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} > F := \text{VectorField}(\langle x^3 \cdot \cos(y), x \cdot y \cdot \ln(1 + x^2 + y^2), 0 \rangle) \\ & \quad F := (x^3 \cos(y)) \bar{e}_x + (x y \ln(x^2 + y^2 + 1)) \bar{e}_y \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} > C := \text{Curl}(F) \\ & \quad C := \left(y \ln(x^2 + y^2 + 1) + \frac{2 x^2 y}{x^2 + y^2 + 1} + x^3 \sin(y) \right) \bar{e}_z \end{aligned} \quad (7)$$

Som du ser er C også et vektorfelt (fordi det er strek over enhetsvektoren e_z).

Vi skal plote flaten S og noen utvalgte piler for $\text{curl } F$.

Flaten ligger i xy -planet i denne oppgaven, mens curlen er en vektor parallell med z -aksen. Figuren blir derfor tredimensjonal.

$$\begin{aligned} > P1 := \text{plot3d}([r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), 0], r = 0..4, t = 0..2 \cdot \text{Pi}, \text{color} = \text{red}) \\ & \quad P1 := \text{PLOT3D}(\dots) \end{aligned} \quad (8)$$

Når vi skal plote en vektorpil, må vi først angi startpunktet som en vektor, og så selve vektoren som er vektorpilen. De vektorene vi vil ha tegnet, er vektoren $\text{subs}(x = 1, y = 1, z = 0, C)$ i punkt $\langle 1, 1, 0 \rangle$, og så videre:

$$\begin{aligned} > P2 := \text{arrow}(\langle 1, 1, 0 \rangle, \text{subs}(x = 1, y = 1, z = 0, C), \text{color} = \text{blue}, \text{shape} = \text{arrow}) \\ & \quad P2 := \text{PLOT3D}(\dots) \end{aligned} \quad (9)$$

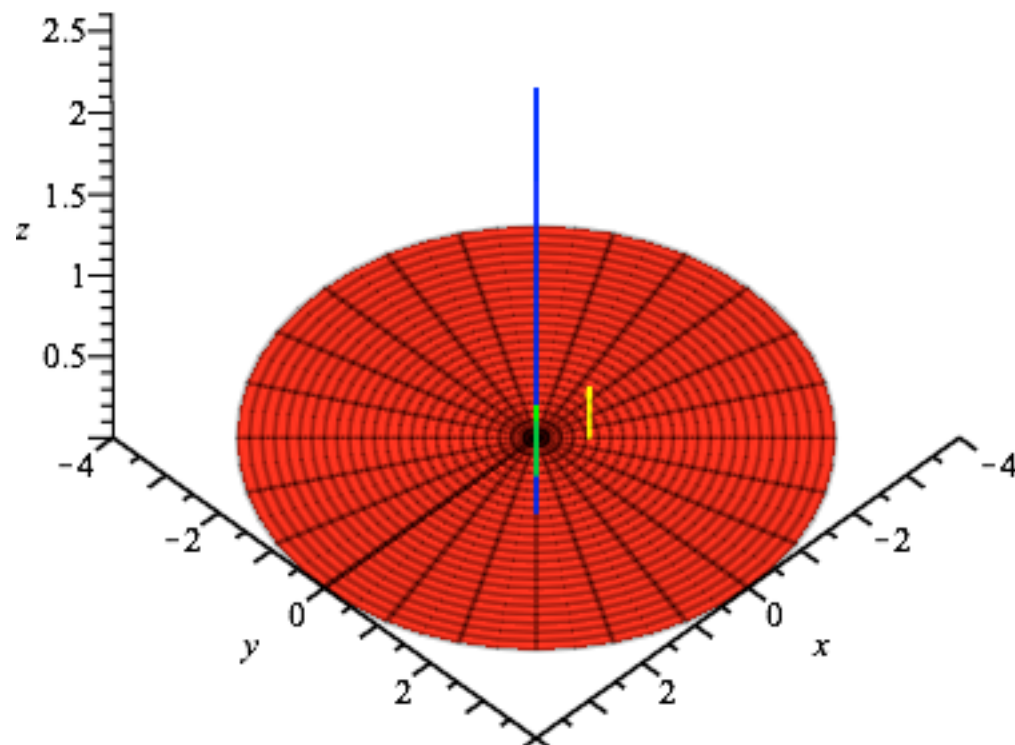
> $P3 := \text{arrow}\left(\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle, \text{subs}\left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0, C\right), \text{color} = \text{green}, \text{shape} = \text{arrow}\right)$
 $P3 := \text{PLOT3D}(\dots)$

(10)

> $P4 := \text{arrow}\left(\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle, \text{subs}\left(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0, C\right), \text{color} = \text{yellow}, \text{shape} = \text{arrow}\right)$
 $P4 := \text{PLOT3D}(\dots)$

(11)

> $\text{display}(P1, P2, P3, P4, \text{axes} = \text{framed}, \text{labels} = [x, y, z])$



Det kan lønne seg å snu litt på figuren, slik at de tre curl-vektorene vises tydeligere.
Hvis du også vil se uttrykkene for gradientvektoren i de tre punktene, kan du naturligvis skrive

➤ $\text{subs}(x = 1, y = 1, z = 0, C)$

$$\left(\ln(3) + \frac{2}{3} + \sin(1) \right) \bar{e}_z$$

og så videre.

b)

> *SetCoordinates*('cartesian'[x, y, z])
*cartesian*_{x, y, z} (13)

> *F* := *VectorField*($\langle x^3 \cdot \cos(y), x^3 \cdot \sin(y), x \cdot y \cdot z \rangle$)
 $F := (x^3 \cos(y)) \bar{e}_x + (x^3 \sin(y)) \bar{e}_y + (x y z) \bar{e}_z$ (14)

> *C* := *Curl*(*F*)
 $C := (x z) \bar{e}_x - y z \bar{e}_y + (3 x^2 \sin(y) + x^3 \sin(y)) \bar{e}_z$ (15)

For å plote flaten, tenker vi flaten som en parametrisert flate der de kartesiske koordinatene (x, y, z) er gitt ved parametrene (r, θ) som rett og slett er polarkoordinatene i xy -planet.

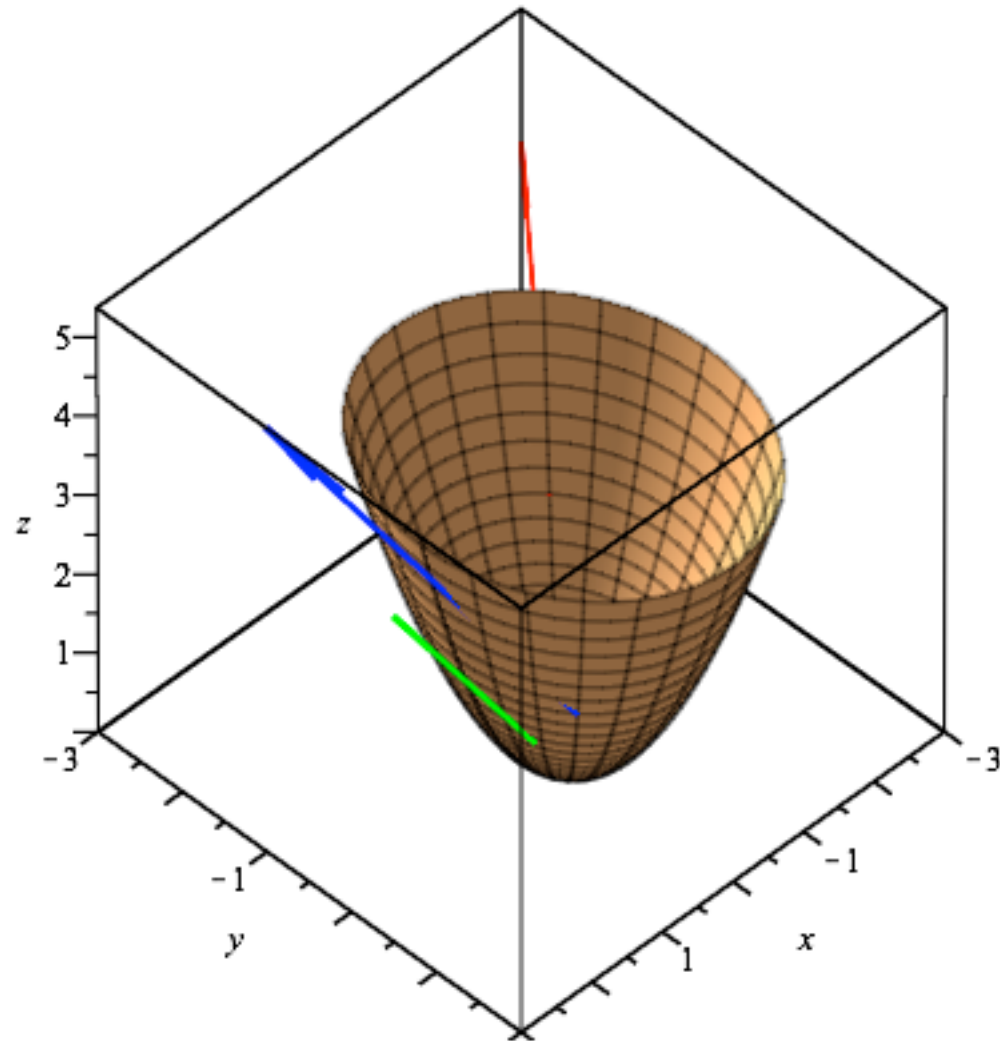
> *P1* := *plot3d*($[r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), r^2]$, $r = 0 \dots 2, t = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi}$, *color* = "SandyBrown", *axes* = *framed*)
P1 := *PLOT3D*(...) (16)

> *P2* := *arrow*($\langle 1, 1, 1^2 + 1^2 \rangle$, *subs*($x = 1, y = 1, z = 1^2 + 1^2, C$), *color* = *blue*, *shape* = *arrow*)
P2 := *PLOT3D*(...) (17)

> *P3* := *arrow*($\langle 1, \frac{1}{2}, 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rangle$, *subs*($x = 1, y = \frac{1}{2}, z = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, C$), *color* = *green*, *shape* = *arrow*)
P3 := *PLOT3D*(...) (18)

> *P4* := *arrow*($\langle -1, -1, 1^2 + 1^2 \rangle$, *subs*($x = -1, y = 1, z = 1^2 + 1^2, C$), *color* = *red*, *shape* = *arrow*)
P4 := *PLOT3D*(...) (19)

> *display*(*P1*, *P2*, *P3*, *P4*, *axes* = *boxed*, *labels* = [x, y, z])



Synes du resultatet ble rart? Husk da at curlen er basert på vektorfeltet, mens flaten er helt uavhengig av vektorfeltet. Det er altså ingen grunn til å forvente at pilene skal stå normalt på flaten!!! Savner du den røde pilen? Har du husket å dreie på figuren?



Oppgave 12.4.12.

a)

Vi importerer først både vektoranalyse- og plottekommandoene til Maple:

```
> with(VectorCalculus)
> with(plots)
> F := VectorField(⟨x3·cos(y), x·y·ln(1 + x2 + y2)⟩)
```

Denne feilmeldingen kom opp fordi vi faktisk trenger å fortelle Maple hvilket koordinatsystem dette vektorfeltet er gitt i. Derfor setter vi først at vi jobber med to variable i kartesiske koordinater

```
> SetCoordinates('cartesian'[x, y])
> F := VectorField(⟨x3·cos(y), x·y·ln(1 + x2 + y2)⟩)
> Curl(F)
```

Det er egentlig ganske naturlig at Maple vil ha tredimensjonale vektorfelt, for curlen er jo et slags kryss produkt. Men det er lett å fikse. Vi kjører med tre koordinater for vektorfeltet, der den siste koordinaten er lik 0.

```
> SetCoordinates('cartesian'[x, y, z])
> F := VectorField(⟨x3·cos(y), x·y·ln(1 + x2 + y2), 0⟩)
> C := Curl(F)
```

Som du ser er C også et vektorfelt (fordi det er strek over enhetsvektoren e_z).

Vi skal plote flaten S og noen utvalgte piler for $\text{curl } F$.

Flaten ligger i xy -planet i denne oppgaven, mens curlen er en vektor parallell med z -aksen. Figuren blir derfor tredimensjonal.

```
> P1 := plot3d([r·cos(t), r·sin(t), 0], r = 0..4, t = 0..2·Pi, color = red)
```

Når vi skal plote en vektorpil, må vi først angi startpunktet som en vektor, og så selve vektoren som er vektorpilen. De vektorene vi vil ha tegnet, er vektoren $\text{subs}(x=1, y=1, z=0, C)$ i punktet $\langle 1, 1, 0 \rangle$, og så videre:

```
> P2 := arrow(⟨1, 1, 0⟩, subs(x=1, y=1, z=0, C), color=blue, shape=arrow)
> P3 := arrow(⟨1/2, 1/2, 0⟩, subs(x=1/2, y=1/2, z=0, C), color=green, shape=arrow)
> P4 := arrow(⟨-1/2, 1/2, 0⟩, subs(x=-1/2, y=1/2, z=0, C), color=yellow, shape=arrow)
> display(P1, P2, P3, P4, axes=framed, labels=[x, y, z])
```

Det kan lønne seg å snu litt på figuren, slik at de tre curl-vektorene vises tydeligere.

Hvis du også vil se uttrykkene for gradientvektoren i de tre punktene, kan du naturligvis skrive

```
> subs(x=1, y=1, z=0, C)
```

og så videre.

b)

```
> SetCoordinates('cartesian'[x, y, z])
> F := VectorField(⟨x³·cos(y), x³·sin(y), x·y·z⟩)
> C := Curl(F)
```

For å plote flaten, tenker vi flaten som en parametrisert flate der de kartesiske koordinatene (x, y, z) er gitt ved parametrene (r, θ) som rett og slett er polarkoordinatene i xy -planet.

```
> P1 := plot3d([r·cos(t), r·sin(t), r²], r=0..2, t=0..2·Pi, color="SandyBrown", axes=framed)
> P2 := arrow(⟨1, 1, 1²+1²⟩, subs(x=1, y=1, z=1²+1², C), color=blue, shape=arrow)
> P3 := arrow(⟨1, 1/2, 1²+(1/2)²⟩, subs(x=1, y=1/2, z=1²+(1/2)², C), color=green, shape=arrow)
> P4 := arrow(⟨-1, -1, 1²+1²⟩, subs(x=-1, y=-1, z=1²+1², C), color=red, shape=arrow)
> display(P1, P2, P3, P4, axes=boxed, labels=[x, y, z])
```

Synes du resultatet ble rart? Husk da at curlen er basert på vektorfeltet, mens flaten er helt uavhengig av vektorfeltet.

Det er altså ingen grunn til å forvente at pilene skal stå normalt på flaten!!!

Savner du den røde pilen? Har du husket å dreie på figuren?



Oppgave 12.6.20.

a)

Vi importerer først vektoranalysekommandoene til Maple:

```
> with(VectorCalculus)
[&x, '*', '+', '-', '^', '<', '>', '<|>', About, AddCoordinates, ArcLength, BasisFormat, Binormal, Compatibility, ConvertVector,
CrossProduct, Curl, Curvature, D, Del, DirectionalDiff, Divergence, DotProduct, Flux, GetCoordinateParameters,
GetCoordinates, GetNames, GetPVDDescription, GetRootPoint, GetSpace, Gradient, Hessian, IsPositionVector, IsRootedVector,
IsVectorField, Jacobian, Laplacian, LineInt, MapToBasis, Nabla, Norm, Normalize, PathInt, PlotPositionVector, PlotVector,
PositionVector, PrincipalNormal, RadiusOfCurvature, RootedVector, ScalarPotential, SetCoordinateParameters, SetCoordinates,
SpaceCurve, SurfaceInt, TNBFrame, Tangent, TangentLine, TangentPlane, TangentVector, Torsion, Vector, VectorField,
VectorPotential, VectorSpace, Wronskian, diff, eval, evalVF, int, limit, series ]
```

(1)

Vi starter akkurat som for curlen til et vektorfelt, men det blir litt enklere etterhvert, for divergensen er bare en vanlig skalar funksjon

```
> SetCoordinates('cartesian'[x, y, z])
```

*cartesian*_{x, y, z}

(2)

```
> F := VectorField( $\left\langle \sin\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \cos(z), \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \cos(z), \ln(\tan(x \cdot y \cdot z)) \right\rangle$ )
```

$F := (\sin(x^{3/2}) \cos(z))\bar{e}_x + (\cos(x^{3/2}) \cos(z))\bar{e}_y + (\ln(\tan(x y z)))\bar{e}_z$

(3)

```
> g := (x, y, z) → Divergence(F)
```

g := (x, y, z) → VectorCalculus:-Divergence(F)

(4)

Vi valgte å lage en funksjon $g(x, y, z)$ som er lik divergensen. Ulempen er at vi da må skrive $g(x, y, z)$ for å se hvordan den ser ut:

```
> g(x, y, z)
```

$$\frac{3}{2} \cos(x^{3/2}) \sqrt{x} \cos(z) + \frac{(1 + \tan(x y z)^2) x y}{\tan(x y z)} \quad (5)$$

$$> \text{subs}\left(x = \pi^{\frac{2}{3}}, y = \pi^{-\frac{2}{3}}, z = \frac{\text{Pi}}{4}, g(x, y, z)\right)$$

$$\frac{3}{2} \cos(\pi) \pi^{1/3} \cos\left(\frac{1}{4} \pi\right) + \frac{1 + \tan\left(\frac{1}{4} \pi\right)^2}{\tan\left(\frac{1}{4} \pi\right)} \quad (6)$$

$$> \text{simplify}(\%)$$

$$-\frac{3}{4} \pi^{1/3} \sqrt{2} + 2 \quad (7)$$

b)

$$> F := \text{VectorField}\left(\left\langle \frac{x^3}{\ln(x)}, x \cdot y \cdot \ln(x), z \cdot \ln(x \cdot y \cdot z) \right\rangle\right)$$

$$F := \left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right) \bar{e}_x + (x y \ln(x)) \bar{e}_y + (z \ln(x y z)) \bar{e}_z \quad (8)$$

$$> g := (x, y, z) \rightarrow \text{Divergence}(F)$$

$$g := (x, y, z) \rightarrow \text{VectorCalculus:-Divergence}(F) \quad (9)$$

$$> g(x, y, z)$$

$$\frac{3 x^2}{\ln(x)} - \frac{x^2}{\ln(x)^2} + x \ln(x) + \ln(x y z) + 1 \quad (10)$$

$$> \text{subs}(x = \exp(1), y = \exp(1), z = \exp(3), g(x, y, z))$$

$$\frac{3 (e)^2}{\ln(e)} - \frac{(e)^2}{\ln(e)^2} + e \ln(e) + \ln((e)^2 e^3) + 1 \quad (11)$$

$$> \text{simplify}(\%)$$



$$2e^2 + e + 6$$

(12

Oppgave 12.6.20.

a)

Vi importerer først vektoranalysekommandoene til Maple:

```
> with(VectorCalculus)
```

Vi starter akkurat som for curlen til et vektorfelt, men det blir litt enklere etterhvert, for divergensen er bare en vanlig skalar funksjon

```
> SetCoordinates('cartesian'[x, y, z])
```

```
> F := VectorField( $\left\langle \sin\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \cos(z), \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \cos(z), \ln(\tan(x \cdot y \cdot z)) \right\rangle$ )
```

```
> g := (x, y, z) → Divergence(F)
```

Vi valgte å lage en funksjon $g(x, y, z)$ som er lik divergensen. Ulempen er at vi da må skrive $g(x, y, z)$ for å se hvordan den ser ut:

```
> g(x, y, z)
```

```
> subs( $x = \pi^{\frac{2}{3}}, y = \pi^{-\frac{2}{3}}, z = \frac{\text{Pi}}{4}, g(x, y, z)$ )
```

```
> simplify(%)
```

b)

```
> F := VectorField( $\left\langle \frac{x^3}{\ln(x)}, x \cdot y \cdot \ln(x), z \cdot \ln(x \cdot y \cdot z) \right\rangle$ )
```

```
> g := (x, y, z) → Divergence(F)
```

```
|> g(x,y,z)
|=
|> subs(x=exp(1),y=exp(1),z=exp(3),g(x,y,z))
|=
|> simplify(%)
|=
|>
```