Vedlegg C:

Løsningsforslag

Kapittel 2

2.1 a) $x = 2, y = 3$ b) $x = 2, y = 0$ c) $x = 1, y = 5$ d) $x = 2, y = -3$
e) Ingen løsning. f) Flere løsninger: $x = 4 + 2t, y = t$

2.2 a) $x_1 = 7, x_2 = 6, x_3 = -1$ b) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$
c) $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1$

2.3 a) $2p + q + r = 0$ b) $-5p + 4q + r = 0$

2.4 a) $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = t$ b) Ingen løsning.
c) $x = -7 - 3t, y = 18 + 7t, z = t$
d) $x_1 = 1 - 7t, x_2 = 16t, x_3 = 2 - 37t, x_4 = t$

2.5 a) Entydig løsning når $v \neq 0$. b) Ingen løsninger når $v = 0$ og $w \neq 2$.
c) Flere løsninger når $v = 0, w = 2$. d) $x = \frac{4}{3}, y = -1, z = -1$
e) $x = 1 - t, y = -1 + t, z = t$

2.6 a) Entydig løsning når $p \notin \{-1, 1\}$. b) Ingen løsning når $p = -1$. c) Flere løsninger når $p = 1$. d) $x = 0, y = -1, z = 2$ e) $x = 2 - t, y = 1 - t, z = t$

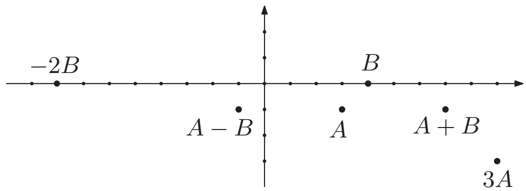
2.8 La a_{ii} være den ledende koeffisienten i rad i, og anta at det er noen ikke-null koeffisienter a_{hi} over den, dvs med $1 \leq h \leq i$. For hver slik h, subtraher $\dfrac{a_{hi}}{a_{ii}}$ ganger rad i fra rad h.

Kapittel 3

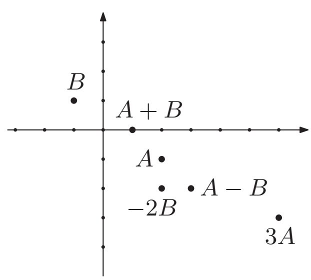
3.1

	$A + B$	$A - B$	$3A$	$-2B$
a)	$(7, -1)$	$(-1, -1)$	$(21, -7)$	$(-20, 0)$
b)	$(1, 0)$	$(3, -2)$	$(14, -7)$	$(5, -5)$
c)	$(0, 5, -1)$	$(2, 1, -7)$	$(7, 21, -28)$	$(5, -10, -15)$
d)	$(1, 0, 6)$	$(3, -2, 4)$	$(14, -7, 35)$	$(5, -5, -5)$

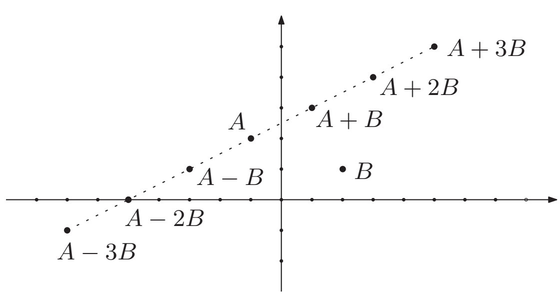
3.2 a) $A = (3, -1)$, $B = (4, 0)$



b) $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$



3.3 $A = (-1, 2)$, $B = (2, 1)$



3.4

	$A \cdot A$	$A \cdot B$	$B \cdot B$
a)	10	12	16
b)	5	-3	2
c)	26	-7	14
d)	30	2	3

3.5 a) Perpendikulære: $(\pi, 2, 1) \cdot (2, -\pi, 0) = 0$ b) Perpendikulære: $(1, -1, 1) \cdot (2, 3, 1) = 0$ c) Ikke perpendikulære: $(1, -1, 1) \cdot (2, 1, 5) = 6$ d) Ikke perpendikulære: $(-5, 2, 7) \cdot (3, -1, 2) = -3$

3.6

	$\dfrac{B\cdot A}{A\cdot A}A$	$\dfrac{A\cdot B}{B\cdot B}B$
a)	$\frac{6}{5}(3,-1)$	$(3,0)$
b)	$-\frac{3}{5}(2,-1)$	$-\frac{3}{2}(-1,1)$
c)	$-\frac{7}{26}(1,3,-4)$	$-\frac{1}{2}(-1,2,3)$
d)	$\frac{1}{15}(2,-1,5)$	$\frac{2}{3}(-1,1,1)$

3.7 La $A=(a_1,a_2,a_3)$. Ved bruk av den pytagoreiske formelen finner vi at punktet rett under eller over A har distansen

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

til origo, og ved samme formel finner vi distansen fra origo til A:

$$\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2+a_3^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=|A|$$

3.8 $|A+B|^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+2A\cdot B+B^2=A^2+B^2=|A|^2+|B|^2$ så sant $A\cdot B=0$.

3.9 Velg A_i og betrakt $0=A_i\cdot\mathcal{O}=A_i\cdot(c_1A_1+\cdots+c_nA_n)=c_iA_i^2$. Men siden A_i ikke er $\mathcal{O}$, må c_i være null.

3.10 Vi har $\cos\theta=\frac{A\cdot B}{|A||B|}$ der θ er vinkelen mellom to sider A,B i trekanten, betraktet som lokaliserte vektorer.

a) $\{(2,-2,5),(-1,2,1),(3,1,1)\}$

1. $A=(-1,2,1)-(2,-2,5)=(-3,4,-4)$,
   $B=(3,1,1)-(2,-2,5)=(1,3,-4)$
   $\cos\theta_1=\frac{25}{\sqrt{41}\sqrt{26}}\approx 0.765705$
2. $A=(2,-2,5)-(-1,2,1)=(3,-4,4)$,
   $B=(3,1,1)-(-1,2,1)=(4,-1,0)$
   $\cos\theta_2=\frac{16}{\sqrt{41}\sqrt{17}}\approx 0.606043$
3. $A=(2,-2,5)-(3,1,1)=(-1,-3,4)$,
   $B=(-1,2,1)-(3,1,1)=(-4,1,0)$
   $\cos\theta_3=\frac{1}{\sqrt{26}\sqrt{17}}\approx 0.0475651$

b) $\{(3,-4,-4),(2,-1,1),(1,-3,-5)\}$

1. $A=(2,-1,1)-(3,-4,-4)=(-1,3,5)$,
   $B=(1,-3,-5)-(3,-4,-4)=(-2,1,-1)$
   $\cos\theta_1=\frac{0}{\sqrt{35}\sqrt{6}}=0$

2. $A = (3, -4, -4) - (2, -1, 1) = (1, -3, -5)$,
   $B = (1, -3, -5) - (2, -1, 1) = (-1, -2, -6)$
   $\cos\theta_2 = \frac{35}{\sqrt{35}\sqrt{41}} \approx 0.923936$
3. $A = (3, -4, -4) - (1, -3, -5) = (2, -1, 1)$,
   $B = (2, -1, 1) - (1, -3, -5) = (1, 2, 6)$
   $\cos\theta_3 = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{41}} \approx 0.382546$

3.11 $A = (1, 1), B = (1, 0), C = (0, 1)$

3.12 $(A + cB) \cdot (A + cB) = A^2 + c^2B^2 \geq A \cdot A$ når $A \cdot B = 0$, så $|A + cB| = \sqrt{(A + cB) \cdot (A + cB)} \geq \sqrt{A \cdot A} = |A|$

3.13 Vi har $|A + cB| \geq |A|$ hvis og bare hvis $(A + cB) \cdot (A + cB) \geq A \cdot A$, eller ekvivalent $A \cdot A + 2cA \cdot B + c^2B \cdot B \geq A \cdot A$, som forenkles til

$$2cA \cdot B + c^2B \cdot B \geq 0$$

Men dette polynomet i c er negativt i det åpne intervallet mellom 0 og $-\frac{2A \cdot B}{B \cdot B}$, så med mindre $A \cdot B = 0$ kan ulikheten ikke tilfredsstilles for alle c.

3.14 En linje gjennom to punkter A og B har parametrisk ligning $A + t(B - A)$:
a) $(-1, -1, 1) + t(-1, 5, 7)$ b) $(3, -4, 1) + t(-4, 9, 1)$ c) $(1, 1, -1) + t(-3, 0, 4)$

3.15 En linje gjennom P og perpendikulær til Q har ligning $(X - P) \cdot Q = 0$:
a) $((x, y) - (3, 2)) \cdot (-5, 4) = 0$ eller $5x - 4y = 7$
b) $((x, y) - (-5, 3)) \cdot (1, -1) = 0$ eller $x - y = -8$

3.16 Hvis $a = 0$ eller $b = 0$ er setningen opplagt sann. Anta derfor at både a og b er forskjellige fra null: Linjen passerer gjennom punktene $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ og $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$, så la oss sjekke: $(a, b) \cdot \left(\left(0, -\frac{c}{b}\right) - \left(-\frac{c}{a}, 0\right)\right) = (a, b) \cdot \left(\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}\right) = c - c = 0$.

3.17 To linjer $ax + by = c$ og $dx + ey = f$ er ortogonale nøyaktig når deres normalvektorer (a, b) og (d, e) er ortogonale, dvs $(a, b) \cdot (d, e) = 0$:
a) $5x + 3y = 7$ og $3x - 5y = 1$ er ortogonale
b) $2x + y = 2$ og $3x - 5y = 1$ er ikke ortogonale
c) $2x + 7y = 1$ og $x - y = 5$ er ikke ortogonale
d) $-x + y = 2$ og $x + y = 9$ er ortogonale

3.18 $N \cdot (X - P) = 0$:
a) $(-1, 3, 6) \cdot ((x, y, z) - (2, 3, 7)) = 0$ eller $-x + 3y + 6z = 49$
b) $(1, -1, 3) \cdot ((x, y, z) - (4, 2, -1)) = 0$ eller $x - y + 3z = -1$
c) $(-3, -2, 4) \cdot ((x, y, z) - (2, 3, -5)) = 0$ eller $-3x - 2y + 4z = -32$

3.19 En normalvektor kan beregnes som $N = (A - B) \times (C - B)$ i hvert tilfelle. Derfra kan metoden fra forrige øvelse anvendes:

a) $N = ((2,2,3) - (-4,-1,1)) \times ((-2,3,-1) - (-4,-1,1)) = (6,3,2) \times (2,4,-2) = (-14,16,18)$. Ligning: $-14x+16y+18z = 58$ eller $-7x+8y+9z = 29$.
b) $N = ((4,1,-1)-(2,1,1)) \times ((3,-1,1)-(2,1,1)) = (2,0,-2) \times (1,-2,0) = (-4,-2,-4)$. Ligning: $-4x - 2y - 4z = -14$ eller $2x + y + 2z = 7$.
c) $N = ((1,2,-1) - (-5,-1,2)) \times ((3,-1,2) - (-5,-1,2)) = (6,3,-3) \times (8,0,0) = (0,-24,-24)$. Ligning: $-24y - 24z = -24$ eller $y + z = 1$.

3.20 Kryssproduktet er greit å bruke her. a) $(-1,-5,7)$ b) $(3,-9,-5)$

3.21 a) $(x,y,z,w) = (1,2,3,4) + t(1,1,1,1) = (1+t, 2+t, 3+t, 4+t)$
b) $\sqrt{(t-3)^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+3)^2} = 2\sqrt{t^2+5}$
c) Nærmest for $t = 0$: $R = P = (1,2,3,4)$.
d) $(Q - R) \cdot A = (3,1,-1,-3) \cdot (1,1,1,1) = 0$
e) $|Q - R| = \sqrt{(3,1,-1,-3) \cdot (3,1,-1,-3)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

3.22 Løsning av ligningssystemet på parametrisk form avslører i hvert tilfelle en vektor som er parallell med snittlinjen:
a) Løsning: $(x,y,z) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) + t\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1\right)$. Parallell vektor: $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1\right)$.
b) Løsning: $(x,y,z) = (1,0,0) + t\left(-\frac{11}{7}, -\frac{13}{7}, 1\right)$. Parallell vektor: $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{13}{7}, 1\right)$.

3.23 Vinkelen mellom to plan er lik vinkelen mellom deres normalvektorer:
a) $N_1 = (-1,-1,1)$, $N_2 = (2,1,1)$, $\cos\theta = \dfrac{N_1 \cdot N_2}{|N_1|\,|N_2|} = -0.471405$
b) $N_1 = (2,3,-1)$, $N_2 = (1,-1,1)$, $\cos\theta = \dfrac{N_1 \cdot N_2}{|N_1|\,|N_2|} = -0.308607$
c) $N_1 = (-1,3,1)$, $N_2 = (1,2,-1)$, $\cos\theta = \dfrac{N_1 \cdot N_2}{|N_1|\,|N_2|} = 0.492366$
d) $N_1 = (1,-1,-1)$, $N_2 = (1,1,1)$, $\cos\theta = \dfrac{N_1 \cdot N_2}{|N_1|\,|N_2|} = -\dfrac{1}{3}$

3.24 $\frac{P+Q}{2}$

3.25 a) $\frac{P+Q}{2} = (-2,12,-5)$ b) $\frac{2P+Q}{3} = (-3,9,-3)$ c) $\frac{P+2Q}{3} = (-1,15,-7)$

3.26 a) $(-1,-1,1) \times (-2,4,8) = (-12,6,-6)$
b) $(3,-4,1) \times (-1,5,2) = (-13,-7,11)$
c) $(1,1,-1) \times (-2,1,3) = (4,-1,3)$

3.27 a) $E_1 \times E_2 = E_3$ b) $E_2 \times E_3 = E_1$ c) $E_3 \times E_1 = E_2$
d) $E_1 \times (E_1 \times E_2) = -E_2$ e) $(E_1 \times E_1) \times E_2 = \mathcal{O}$

Kapittel 4

4.1 Produktet av to ikke-null rasjonaltall er et ikke-null rasjonaltall, multiplikasjon er assosiativt, $q \cdot 1 = q$, inversoperasjonen $\frac{1}{q}$ gir et ikke-null rasjonaltall såfremt q er det, $q \cdot \frac{1}{q} = 1$, og multiplikasjon er kommutativt, så dette er en abelsk gruppe.

4.2 Summen av to partall er et partall, addisjon er assosiativt, $a + 0 = a$, $a - a = 0$, og addisjon er kommutativt, så dette er en abelsk gruppe.

4.3 De naturlige tallene $\mathbb{N}$ danner *ikke* en gruppe under addisjon. De er lukket under addisjon, og addisjon er assosiativt, men det finnes hverken noe additivt identitetselement eller en passende inversoperasjon som oppfyller gruppeaksiomene. Identitetselementet $\mathbf{e}$ måtte i så fall tilfredsstille

$$\mathbf{e} + \mathbf{e} = \mathbf{e},$$

men det er ikke tilfelle for noe naturlig tall $\mathbf{e}$.

4.4 a) Tillukning er opplagt, 1 er identiteten, hvert element er sin egen invers, og multiplikasjon er assosiativt.
b) Dette er den sykliske gruppen generert av $\{-1\}$ under multiplikasjon.
c) Det er nøyaktig to permutasjoner på $\{1, 2\}$; identitetspermutasjonen ι og permutasjonen som bytter om 1 og 2, som vi kan kalle χ. Avbildningen

$$h : \begin{cases} -1 \mapsto \chi \\ 1 \mapsto \iota \end{cases}$$

er bijektiv og er en gruppehomomorfi, så de to gruppene er isomorfe.

$$\begin{aligned}
h((-1)\cdot(-1)) &= h(1) = \iota = \chi \circ \chi = h(-1) \circ h(-1) \\
h((-1)\cdot 1) &= h(-1) = \chi = \chi \circ \iota = h(-1) \circ h(1) \\
h(1\cdot(-1)) &= h(-1) = \chi = \iota \circ \chi = h(1) \circ h(-1) \\
h(1\cdot 1) &= h(1) = \iota = \iota \circ \iota = h(1) \circ h(1)
\end{aligned}$$

4.5 $\{a, b\} = \{1, 3\}$

4.6 G er lukket under multiplikasjon fordi

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{2}\right) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2},$$

multiplikasjon er assosiativt, vi har

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot 1 = a + b\sqrt{2}$$

og

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}.$$

(Merk at $a^2 \neq 2b^2$ for $a, b \in \mathbb{Q}$.) Dessuten er multiplikasjon kommutativt, så dette er en abelsk gruppe.

4.7 Tillukning og assosiativitet er opplagt, identitetsavbildningen $x \mapsto x$ er bijektiv, og enhver bijektiv avbildning har en invers avbildning. Gruppen er ikke nødvendigvis abelsk, jf for eksempel rotasjon av planet fulgt av translasjon, sammenlignet med vice versa.

4.8 I lys av teorem 4.31 finnes det en permutasjon

$$p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

slik at for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$g_i{}^{-1} = g_{p(i)},$$

derfor

$$\begin{aligned} \rho \star \rho &= (g_1 \star \cdots \star g_n) \star (g_1 \star \cdots \star g_n) \\ &= (g_1 \star \cdots \star g_n) \star \big(g_{p(1)} \star \cdots \star g_{p(n)}\big) \\ &= \big(g_1 \star g_{p(1)}\big) \star \cdots \star \big(g_n \star g_{p(n)}\big) \\ &= \mathbf{e} \star \cdots \star \mathbf{e} = \mathbf{e} \end{aligned}$$

4.9 La $f(x) = |x|$ for $x \in \mathbb{R}$. Dette er en gruppehomomorfi, fordi

$$f(xy) = |xy| = |x|\,|y| = f(x)f(y)$$

Det er ikke en gruppeisomorfi, for eksempel $1 \mapsto 1$ og $-1 \mapsto 1$.

4.10 La $f : \langle \mathbb{R}, + \rangle \to \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ være avbildningen $f(x) = e^x$. Dette er en gruppehomomorfi, fordi

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$$

Det er også en gruppeisomorfi, fordi det er en bijeksjon. Den inverse er den naturlige logaritmen.

4.11 Tillukning: Anta at a, b er med i senteret, og la $x \in G$: $a \bullet b \bullet x = a \bullet x \bullet b = x \bullet a \bullet b$. Assosiativitet arves direkte fra G. Identitetselementet e tilfredsstiller $e \bullet x = x \bullet e$. Inverterbarhet: $e \bullet x = x \bullet e$ medfører $a \bullet a^{-1} \bullet x = x \bullet a \bullet a^{-1} = a \bullet x \bullet a^{-1}$. På grunn av teorem 4.30 får vi $a^{-1} \bullet x = x \bullet a^{-1}$. Dermed er beviset for at senteret er en subgruppe komplett.

4.12 Hele $\mathbb{Z}$.

4.13 Alle partallene.

4.14 a) Tillukning er opplagt ut fra definisjonen. Assosiativitet: $((g_1, h_1) \otimes (g_2, h_2)) \otimes (g_3, h_3) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2) \otimes (g_3, h_3) = (g_1 * g_2 * g_3, h_1 \bullet h_2 \bullet h_3) = (g_1, h_1) \otimes (g_2 * g_3, h_2 \bullet h_3) = (g_1, h_1) \otimes ((g_2, h_2) \otimes (g_3, h_3))$. Identitet: elementet $1 = (1_G, 1_H)$ er slik at $(g, h) \otimes 1 = 1 \otimes (g, h)$. Inverterbarhet: for hvert element $(g, h) \otimes (g^{-1}, h^{-1}) = 1 = (g^{-1}, h^{-1}) \otimes (g, h)$.

b) La $\phi : \{(g, 1_H)\} \to G$ være slik at $\phi(a, 1_H) = a$, og la $\psi : \{(1_G, h)\} \to H$ være slik at $\psi(1_G, a)$. Begge er åpenbart isomorfier.

c) Det direkte produktet av $\langle \mathbb{R}, +\rangle$ med seg selv er isomorft med $\langle \mathbb{R}^2, +\rangle$.

d) Hvis E og F er kropper, og a er et element av E forskjellig fra null, så er elementet $(a, 0)$ forskjellig fra $(0, 0)$ men har ingen invers, siden 0 ikke har noen invers; derfor er det direkte produktet $E \times F$ ingen kropp.

4.15 Anta $a^2 = 2b^2$, med $a = \frac{h}{k}$, $b = \frac{m}{n}$, $h, k, m, n \in \mathbb{Z}$, $kn \neq 0$, og $h \neq 0$ eller $m \neq 0$. Da er

$$h^2 n^2 = 2m^2 k^2,$$

i strid med entydig primtallsfaktorisering av heltall.

4.16

- Addisjon:
  Tillukning: $(a + b\rho) + (c + d\rho) = (a + c) + (b + d)\rho$

  Assosiativitet: $(a+b\rho)+((c+d\rho)+(e+f\rho)) = (a+c+e)+(b+d+f)\rho = ((a + b\rho) + (c + d\rho)) + (e + f\rho)$

  Identitet: $(a + b\rho) + (0 + 0\rho) = (0 + 0\rho) + (a + b\rho)$

  Invers: $(a + b\rho) + (-a - b\rho) = (-a - b\rho) + (a + b\rho) = 0$
- Multiplikasjon:
  Tillukning: $(a + b\rho)(c + d\rho) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\rho$

  Assosiativitet: $(a + b\rho)((c + d\rho)(e + f\rho)) = ((a + b\rho)(c + d\rho))(e + f\rho)$

  Identitet: $(a + b\rho)(1 + 0\rho) = (1 + 0\rho)(a + b\rho)$

  Invers: $(a + b\rho)\left(\frac{a-b\rho}{a^2-2b^2}\right) = \left(\frac{a-b\rho}{a^2-2b^2}\right)(a + b\rho) = 1$ når $a + b\rho \neq 0$.
- Distributivitet: $(a+b\rho)((c+d\rho)+(e+f\rho)) = (a+b\rho)(c+d\rho)+(a+b\rho)(e+f\rho)$

4.17 Det nye elementet ε måtte ha hatt en multiplikativ invers, men anta at det finnes en $\varepsilon^{-1} = x$. Da må $\varepsilon x = 1$ og følgelig $\varepsilon^2 x = \varepsilon$, som betyr $\varepsilon = 0$, i strid med den oppgitte premissen.

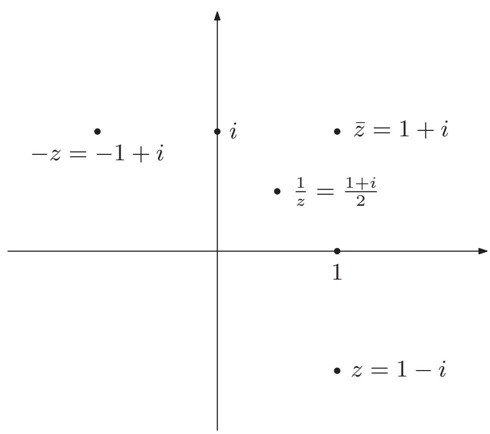
4.18 Vises ved inspeksjon av addisjons- og multiplikasjonstabellene for K:

$+$	0	1	κ	$1+\kappa$
0	0	1	κ	$1+\kappa$
1	1	0	$1+\kappa$	κ
κ	κ	$1+\kappa$	0	1
$1+\kappa$	$1+\kappa$	κ	1	0

$\cdot$	0	1	κ	$1+\kappa$
0	0	0	0	0
1	0	1	κ	$1+\kappa$
κ	0	κ	$1+\kappa$	1
$1+\kappa$	0	$1+\kappa$	1	κ

Kapittel 5

5.1



5.2 a) i b) $\frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$ c) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{11}{2} + \frac{3}{2}i$ e) -1 f) -1 g) $-5 + 12i$ h) $-4i$ i) $2 - 3i$

5.3 a) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2$
b) $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i) = b_1 + b_2 = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2$
c) $\mathrm{Re}(kz) = \mathrm{Re}(k(a + bi)) = ka = k\,\mathrm{Re}\, z$ for $k \in \mathbb{R}$
d) $\mathrm{Im}(kz) = \mathrm{Im}(k(a + bi)) = ka = k\,\mathrm{Im}\, z$ for $k \in \mathbb{R}$
e) Moteksempel: $k = z = i$ f) Moteksempel: $k = z = i$
g) Moteksempel: $z_1 = z_2 = i$

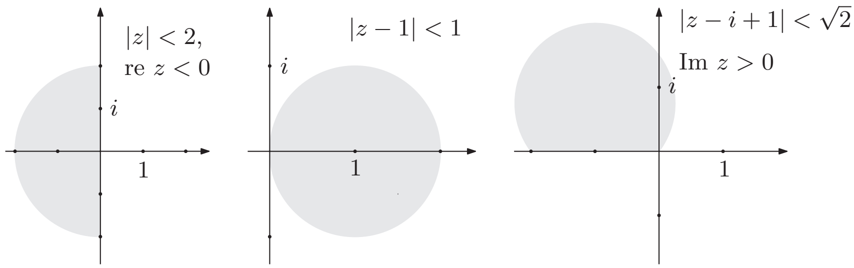
5.4 a) $z = \pm 7i$ b) $z = 1 \pm i\sqrt{3}$ c) $z = -3 \pm 5i$ d) $z = \pm\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.5 a) $z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $z_1 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $z_2 = -i$ b) $z_0 = -\sqrt{3} - i$, $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2i$
c) $z_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$, alternativt $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

5.6 $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 1$, $\bar{\bar{z}} = z$

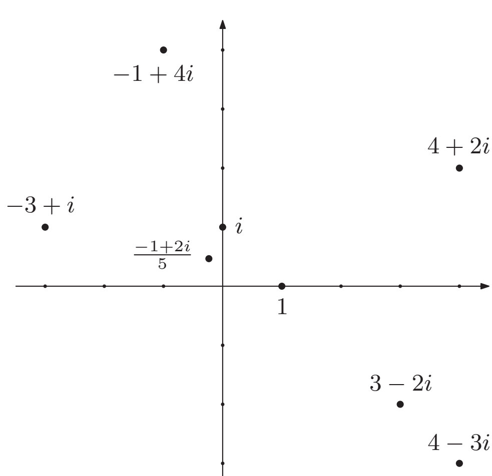
5.7 La $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$: $|z_1 z_2| = \left|r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2}\right| = |r_1 r_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

5.8 a) Punktet $3 = 3 + 0i$. b) Den imaginære aksen.



c) d) e)

5.9 Referer til definisjon 5.6.
a) $i(4+i) = -1 + 4i = \sqrt{17} e^{i(\arctan(-4)+\pi)}$. Modulus $\sqrt{17} \approx 4.12311$.
Argument $\arctan(-4) + \pi \approx 104.036°$
b) $-3 + i = \sqrt{10} e^{i(\arctan(-1/3)+\pi)}$. Modulus $\sqrt{10} \approx 3.16228$.
Argument $\arctan(-1/3) + \pi \approx 161.565°$
c) $3 - 2i = \sqrt{13} e^{i \arctan(-2/3)}$. Modulus $\sqrt{13} \approx 3.60555$.
Argument $\arctan(-2/3) \approx 326.31°$
d) $4 + 2i = 2\sqrt{5} e^{i \arctan(1/2)}$. Modulus $2\sqrt{5} \approx 2.23607$.
Argument $\arctan(1/2) \approx 26.5651°$
e) $\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{-1+2i}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} e^{i(\arctan(-2)+\pi)}$. Modulus $\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447214$.
Argument $\arctan(-2) + \pi \approx 116.565°$
f) $\frac{(2+i)^2}{i} = 4 - 3i = 5e^{i \arctan(-3/4)}$. Modulus 5. Argument $\arctan(-3/4) \approx 323.13°$



5.10

1. Umiddelbart fra definisjonen.
2. $a_1\overline{(b_1+c_1)} + \cdots + a_n\overline{(b_n+c_n)} = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n} + a_1\overline{c_1} + \cdots + a_n\overline{c_n}$
3. $ca_1\overline{b_1} + \cdots + ca_n\overline{b_n} = c(a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n})$ og $a_1\overline{cb_1} + \cdots + a_n\overline{cb_n} = \overline{c}(a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n})$
4. Hvis $A = O$ så er $0\overline{0} + \cdots + 0\overline{0} = 0$, ellers er $a_1\overline{a_1} + \cdots + a_n\overline{a_n} = \sum_{1\le i\le n} |a_i|^2 \in \mathbb{R}$ og $\sum_{1\le i\le n} |a_i|^2 > 0$.

Kapittel 6

6.1

$$(p+q)^2 = (p+q)(p+q) = p^2 + pq + qp + q^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$(p-q)^2 = (p-q)(p-q) = p^2 - pq - qp + q^2 = p^2 - 2pq + q^2$$
$$(p+q)(p-q) = p^2 - pq + qp - q^2 = p^2 - q^2$$

6.2 $2 - 5i + 8i^{-4} = 2 - 5i + 8 = 10 - 5i$

$$1 + i^3 + i^5 = 1 - i + i(-1)^2 = 1$$
$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = -i$$

6.3 a) $x_1 = -2, x_2 = 1$ b) $x_1 = 3, x_2 = 7$ c) $x_1 = -13, x_2 = 17$ d) $x_1 = -19$, $x_2 = 11$

6.4 a) $z_1 = i, z_2 = -i$ b) $z_1 = i, z_2 = -5 - 3i$ c) $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + i$ d) $z_1 = 2i, z_2 = 1 + i$

6.5 $2x^2 + 3x - 2$ har røtter $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$, så

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 2(x-3)(x+2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

6.6 $(x^2 + 10x + 21) : (x + 3) = x + 7$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 + 3x} \\ \qquad\quad 7x + 21 \\ \qquad\quad \underline{7x + 21} \\ \qquad\qquad\quad\ 0 \end{array}$$

6.7 $(z^2 + 14z + 45) : (z + 9) = z + 5$

$$\begin{array}{l} \underline{z^2 + 9z} \\ \qquad\quad 5z + 45 \\ \qquad\quad \underline{5z + 45} \\ \qquad\qquad\quad\ 0 \end{array}$$

6.8 a) $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = (x-3)(x^2 - 4x + 5)$ over $\mathbb{R}$.
b) $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = (z-3)(z-2+i)(z-2-i)$ over $\mathbb{C}$.

6.9 i $\mathbb{Z}_3$:

$$
\begin{array}{llllll}
(x^5 & & + \; x^2 & & + 1) : (x+2) = x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2 \\
\underline{x^5 + 2x^4} & & & & \\
\quad x^4 & & & & \\
\quad \underline{x^4 + 2x^3} & & & & \\
\qquad x^3 + \; x^2 & & & & \\
\qquad \underline{x^3 + 2x^2} & & & & \\
\qquad\quad 2x^2 & & & & \\
\qquad\quad \underline{2x^2 + \; x} & & & & \\
\qquad\qquad 2x + 1 & & & & \\
\qquad\qquad \underline{2x + 1} & & & & \\
\qquad\qquad\quad 0 & & & &
\end{array}
$$

6.10 Hvis $ax + b$ med $a \neq 0$ dividerer $x^2 + 2$ i $\mathbb{Z}_5$, så er $x + \frac{b}{a}$ også en divisor, så vi kan like gjerne se etter en lineær faktor på formen $x + c$.

$$
\begin{array}{l}
(x^2 \qquad\quad + 2) : (x + c) = x - c \\
\underline{x^2 + \; cx} \\
\qquad -cx + 2 \\
\qquad \underline{-cx - c^2} \\
\qquad\qquad 2 + c^2
\end{array}
$$

For at $x + c$ skal være en faktor, må vi ha $2 + c^2 = 0 \mod 5$, men dette er ikke tilfelle for noen $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

6.11

$$
\begin{array}{l}
(6z^4 + 5z^3 \qquad\quad + 3z - 5) : (3z^2 - 2z) = 2z^2 + 3z + 2 + \dfrac{7z - 5}{3z^2 - 2z} \\
\underline{6z^4 - 4z^3} \\
\qquad 9z^3 + 0z^2 \\
\qquad \underline{9z^3 - 6z^2} \\
\qquad\qquad 6z^2 + 3z \\
\qquad\qquad \underline{6z^2 - 4z} \\
\qquad\qquad\quad 7z - 5
\end{array}
$$

6.12 a) $x^4 - 2x^3 + 3 = (x+1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 6$ i $\mathbb{R}[x]$.

b) $z^3 - (2+i)z^2 + 5 = (iz - 1)(-iz^2 - (2-2i)z + 2 + 2i) + 7 + 2i$ i $\mathbb{C}[z]$.

c) $y^3 + 4y + 1 = (y+2)(y^2 + 3y + 3)$ i $\mathbb{Z}_5[y]$.

d) $y^3 + 4y + 1 = (2y+1)(3y^2 + y + 4) + 2$ i $\mathbb{Z}_5[y]$.

6.13 a) $4z + 3 + \dfrac{2}{3z-2}$ b) $2z - 3 + \dfrac{3}{2z-1}$ c) $3z + 7 + \dfrac{26}{z-3}$

d) $2z^2 + z + 6 - \dfrac{38}{z+3}$ e) $2z + 5$ f) $z^3 + 3z^2 + 9z + 27$

g) $4z^3 + 16z^2 + 60z + 246 + \dfrac{984}{z-4}$ h) $6z^2 + 3z - 1 - \dfrac{3z-1}{3z^2+1}$ i) $z^2 - 4z + 1 + \dfrac{4z-1}{2z^3+1}$

6.14 La $p, q, r, s, t, u \in F[x]$ for en kropp F, la O være det konstante polynomet $0 \in F[x]$, og la I være det konstante polynomet $1 \in F[x]$.

- Addisjon:
  Tillukning: $\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s} = \dfrac{ps + qr}{qs}$
  Assosiativitet: $\left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s}\right) + \dfrac{t}{u} = \dfrac{p}{q} + \left(\dfrac{r}{s} + \dfrac{t}{u}\right)$
  Identitet: $\dfrac{p}{q} + O = O + \dfrac{p}{q} = \dfrac{p}{q}$
  Invers: $\dfrac{p}{q} + \dfrac{-p}{q} = O = \dfrac{-p}{q} + \dfrac{p}{q}$

- Multiplikasjon:
  Tillukning: $\dfrac{p}{q}\dfrac{r}{s} = \dfrac{pr}{qs}$
  Assosiativitet: $\left(\dfrac{p}{q}\dfrac{r}{s}\right)\dfrac{t}{u} = \dfrac{p}{q}\left(\dfrac{r}{s}\dfrac{t}{u}\right)$
  Identitet: $\dfrac{p}{q}I = I\dfrac{p}{q} = \dfrac{p}{q}$
  Invers: $\dfrac{p}{q}\dfrac{q}{p} = \dfrac{q}{p}\dfrac{p}{q} = I$ når $\dfrac{p}{q} \neq O$.

- Distributivitet: $\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{r}{s} + \dfrac{t}{u}\right) = \dfrac{p}{q}\dfrac{r}{s} + \dfrac{p}{q}\dfrac{t}{u}$

6.15 a) $z^3 - 3z + 2 = (z-1)^2(z+2)$

b) $z^3 - 2z + 4 = (z+2)(z-(1+i))(z-(1-i))$

c) $z^3 + 13z + 116 = (z+4)(z-(2-5i))(z-(2+5i))$

d) $z^3 - 37z + 84 = (z-3)(z-4)(z+7)$

e) $z^3 - iz + 1 - i = (z+1)(z+i)(z-(1+i))$

f) $z^3 - 91z + 330 = (z-5)(z-6)(z+11)$

g) $z^3 - 7z + 6 = (z-1)(z-2)(z+3)$

h) $z^3 - 49z + 120 = (z-3)(z-5)(z+8)$

i) $z^3 - 237z - 884 = (z+4)(z+13)(z-17)$

6.16 I $\mathbb{Z}_3[x]$ er koeffisientene $\{0, 1, 2\}$, og aritmetikken er modulo 3:

$$\begin{aligned}
(x^2+x+2)+(x^2+2x+1) &= 2x^2 \\
(x^2+x+2)-(x^2+2x+1) &= 2x+1 \\
(x^2+x+2)(x^2+2x+1) &= x^4+2x^2+2x+2
\end{aligned}$$

6.17 Koeffisientene må være enten 0 eller 1, så det er bare to muligheter for $ax+b$ med $a \neq 0$, nemlig $b=0$ og $b=1$. Siden $x(x+1) = x^2+x$ og $(x+1)(x+1) = x^2+x+x+1 = x^2+1$ i $\mathbb{Z}_2[x]$, har vi at

$$\begin{aligned}
x^2 &= x \cdot x \\
x^2+1 &= (x+1)(x+1) \\
x^2+x &= x(x+1) \\
x^2+x+1 & \quad \text{er irredusibelt.}
\end{aligned}$$

Kapittel 7

7.1 a) Merk at $cv = c(\mathcal{O}+v) = c\mathcal{O}+cv$ og subtraher cv fra begge sider.

b) Anta at $cv = \mathcal{O}$ med $c \neq 0$. Da er $c^{-1}cv = c^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$, så $v = \mathcal{O}$.

c) Anta at $v+w = \mathcal{O}$. Da er $v+w-w = \mathcal{O}-w$, så $v=-w$.

d) Anta at $v+w=v$. Da er $-v+v+w = -v+v$, så $w = \mathcal{O}$.

7.2 Jf teorem 7.6. Betrakt i hvert tilfelle $(x, y)+(z, w) = (x+z, y+w) \in \mathbb{R}^2$, og $c(x, y) = (cx, cy)$ med $c \in \mathbb{R}$.

a) $\{(x, y) \mid x-y=0\}$: Vi har $x+z-(y+w) = (x-y)+(z-w) = 0+0 = 0$, og $cx-cy = c(x-y) = 0$.

b) $\{(x, y) \mid x+4y=0\}$: Vi har $(x+z)+4(y+w) = (x+4y)+(z+4w) = 0+0 = 0$, og $cx+4cy = c(x+4y) = 0$.

7.3 V har dimensjon 0, 1 eller 2. Det trivielle rommet $V=\{0\}$ har dimensjon 0, og ethvert underrom av dimensjon 1 har en basis $\{b\}$ med $b \in \mathbb{R}^2$, så hvert element x i et slikt underrom kan skrives $x = tb$. Men dette er den parameteriserte ligningen for en rett linje gjennom origo. Det gjenstår å vise at ethvert underrom av dimensjon 2 er $\mathbb{R}^2$ selv: dette følger fra teorem 7.19.

7.4 Jf teorem 7.6. I hvert tilfelle, betrakt $(x, y, z)+(u, v, w) = (x+u, y+v, z+w) \in \mathbb{R}^3$, og $c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$ med $c \in \mathbb{R}$.

a) $\{(x, y, z) \mid y=0\}$: $y+w = 0+0 = 0$ og $cy = c0 = 0$

b) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 0\}$: $x + u + 2(y + v) + 3(z + w) = x + 2y + 3z + u + 2v + 3w = 0 + 0 = 0$ og $cx + 2cy + 3cz = c0 = 0$.

c) $\{(x, y, z) \mid x = 2y \text{ og } y = 3z\}$: $x + u = 2y + 2v = 2(y + v)$ og $cx = c2y = 2cy$ og $y + v = 3z + 3w = 3(z + w)$ og $cy = c3z = 3cz$.

d) $\{(x, y, z) \mid x + 2y = 3z\}$: $(x + u) + 2(y + v) = x + 2y + u + 2v = 3z + 3w = 3(z + w)$ og $cx + 2cy = c(x + 2y) = c3z = 3cz$.

7.5 Løsningen av det siste punktet viser mønsteret: $(1, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$, og $(1, 1, 0)$ er lineært uavhengige, fordi hvis $a(1, 1, 1) + b(0, 1, -1) + c(1, 1, 0) = \mathcal{O}$, så

$$\begin{aligned} a \qquad + c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ a - b \qquad &= 0 \end{aligned}$$

og dette systemet har den entydige løsningen $a = b = c = 0$.

7.6 Løsningen av det første punktet viser mønsteret: $x_1 A + x_2 B = X$ svarer til de følgende ligningene:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 \qquad &= 4 \end{aligned}$$

som har den entydige løsningen $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

7.7 a) La $ad - bc = 0$ og la $x = d - c$, $y = a - b$. Da er $x(a, b) + y(c, d) = (ad - ac, bd - bc) + (ac - bc, ad - bd) = (ad - bc, ad - bc) = (0, 0)$ så (a, b) og (c, d) er lineært avhengige.

b) La $ad - bc \neq 0$. Anta at det finnes $x, y \neq 0$ slik at $x(a, b) + y(c, d) = (0, 0)$, men i så fall er

$$\begin{aligned} ax + cy &= 0 \\ bx + dy &= 0 \end{aligned}$$

eller ekvivalent

$$\begin{aligned} adx + cdy &= 0 \\ -bcx - cdy &= 0 \end{aligned}$$

Summen av disse ligningene er

$$(ad - bc)x = 0$$

som, siden $x \neq 0$, betyr $ad - bc = 0$ i strid med den gitte premissen, så (a, b) og (c, d) er lineært uavhengige.

7.8 For å vise at A og B er lineært uavhengige, anta at det finnes $x, y \neq 0$ slik at $xA + yB = \mathcal{O}$. Men i så fall er $-\frac{x}{y}A = B$, i strid med den gitte premissen. Det følger fra teorem 7.19 at underrommet spent ut av $\{A, B\}$ er $\mathbb{R}^2$ selv. La nå V_A og

V_B være underrommene generert av A og B, henholdsvis. Ved teorem 7.33 er det tilstrekkelig å vise at $V_A \cap V_B = \{\mathcal{O}\}$. For å se dette, anta at det finnes $C \neq \mathcal{O}$ slik at $C = aA$ og $C = bB$ med $a, b \neq 0$. Men da ville vi hatt $\frac{a}{b}A = B$, i strid med premissen gitt ovenfor.

7.9 Begge vektorparene U, V og U, W oppfyller betingelsene i foregående problem.

7.10 Ved teorem 7.33 er det tilstrekkelig å vise at $V \cap W = \{\mathcal{O}\}$. Anta for motsigelse at det finnes tall $a, b, c \in F$ forskjellig fra 0 slik at $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) = c(1, 0, 0)$. Men dette systemet system har den entydige løsningen $a = b = c = 0$.

7.11 a) Dette er teorem 7.36.
b) Jfr teorem 7.6. Tillukning med hensyn til vektoraddisjon og skalering følger direkte fra definisjon 7.37.
c) Hvis V har en basis $\{v_1, \ldots, v_m\}$ og hvis W har basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$, så spenner vektorene

$$((v_1, 0), \ldots, (v_m, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_n))$$

ut rommet U, og er åpenbart lineært uavhengige, så

$$\dim U = \dim V + \dim W$$

7.12 Ved lineær avhengighet finnes det tall $a, b \in F$, ikke begge null, slik at $av + bu = 0$. Siden $u \neq \mathcal{O}$ følger det at $a \neq 0$, så ta $c = -\frac{b}{a}$.

7.13 Ved teorem 7.6 er tillukning med hensyn til addisjon og skalering nødvendig og tilstrekkelig. Addisjon: $(B_1 + B_2) \cdot A_1 = B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot A_1 = 0 + 0 = 0$, og tilsvarende for A_2. Skalering: $(cB) \cdot A_1 = c(B \cdot A_1) = c0 = 0$, og tilsvarende for A_2.

7.14 Ved teorem 7.6 er tillukning med hensyn til addisjon og skalering nødvendig og tilstrekkelig. La $1 \leq i \leq m$: Addisjon: $(B_1 + B_2) \cdot A_i = B_1 \cdot A_i + B_2 \cdot A_i = 0 + 0 = 0$. Skalering: $(cB) \cdot A_i = c(B \cdot A_i) = c0 = 0$

7.15 Betrakt

$$a_1 A_1 + \cdots + a_m A_m = \mathcal{O}$$

der vi kan danne skalarproduktet med A_i på begge sider. Vi får:

$$a_i A_i \cdot A_i = \mathcal{O} \cdot A_i = 0$$

Siden $A_i \neq \mathcal{O}$ har vi $A_i \cdot A_i > 0$, og $a_i = 0$ følger.

7.16
$$\begin{aligned}\int_{|z|\le 1} z^h \overline{z^k}\,\mathrm{d}z &= \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}} r^h e^{hi\theta} r^k e^{-ki\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0\le r\le 1} r^{h+k}\,\mathrm{d}r \int_{0\le\theta<2\pi} e^{(h-k)i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{h+k+1}\int_{0\le\theta<2\pi} e^{(h-k)i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{hvis } h\neq k \\ \frac{2\pi}{2k+1} & \text{hvis } h=k \end{cases}\end{aligned}$$

7.17 Vektorrommets egenskaper, jf definisjon 7.1, er en delmengde av egenskapene til en kropp, jf definisjon 4.35.

7.18 Hvert tilfelle refererer til ligningen

$$af(t) + bg(t) = \mathscr{O}(t) = 0 \tag{1}$$

der $a, b \in \mathbb{R}$ og f, g er de gitte funksjonene. De to indikerte verdiene av t vil i hvert tilfelle gjøre (1) til to lineære ligninger i a, b med den entydige løsningen $a = b = 0$, noe som viser lineær uavhengighet av de gitte funksjonene.

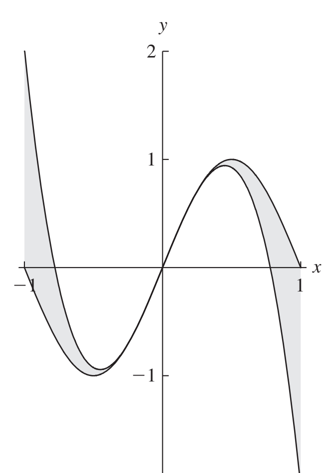
a) $1, t$: ta $t = 0$ og $t = 1$ b) t^4, t: ta $t = -1$ og $t = 1$

c) e^t, t: ta $t = 0$ og $t = 1$ d) te^t, e^{2t}: ta $t = 0$ og $t = 1$

e) $\cos t, \sin t$: ta $t = 0$ og $t = \frac{\pi}{2}$ f) $\cos t, t$: ta $t = 0$ og $t = \frac{\pi}{2}$

g) $\sin t, \sin 3t$: ta $t = \frac{\pi}{6}$ og $t = \frac{\pi}{2}$

7.19 a) Vi har $\|\sin(\pi x) - \hat{s}(x)\| = 0.0937029$, jf figur 7.3, og $\|\sin(\pi x) - \hat{t}(x)\| = 0.895358$, jf figur C.1.

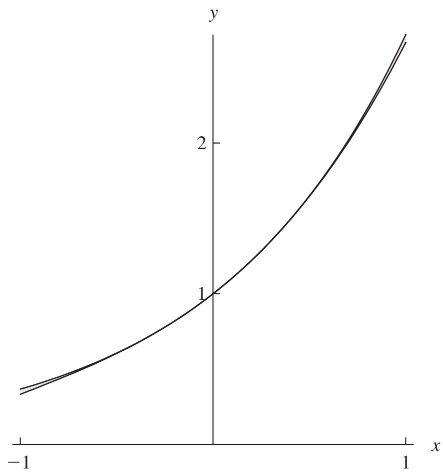


Figur C.1 $\sin(\pi x)$ vs $\hat{t}(x) = 3.14159x - 5.16771x^3$

b) Sammenlign koeffisientene til de approksimerende polynomene, jf ligning (7.12):

$$\frac{\int_{-1}^{1}(f+h)g_i \mathrm{d}x}{\|g_i\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} f g_i \mathrm{d}x}{\|g_i\|^2} + \frac{\int_{-1}^{1} h g_i \mathrm{d}x}{\|g_i\|^2}$$

c) Vi har $\|e^x - \hat{e}(x)\| = 0.020509$, jf figur C.2.

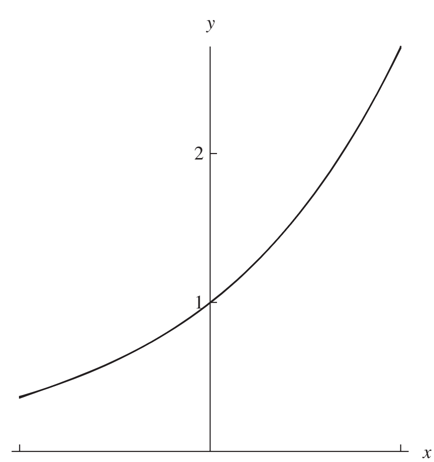


Figur C.2 e^x vs $\hat{e}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

Minste kvadraters polynomapproksimasjon er

$$\hat{\varepsilon}(x) = 0.996294 + 0.997955x + 0.536722x^2 + 0.176139x^3$$

og vi har $\|e^x - \hat{\varepsilon}(x)\| = 0.00472111$, jf figur C.3.

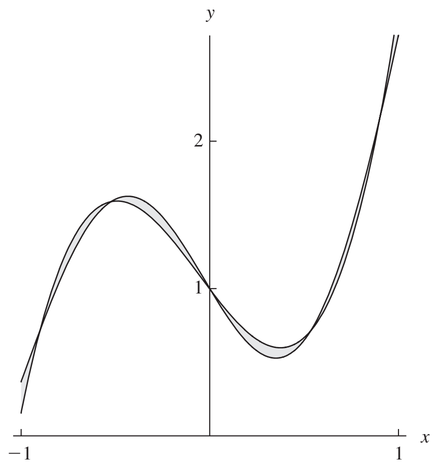


Figur C.3 e^x vs $\hat{\varepsilon}(x) = 0.996294 + 0.997955x + 0.536722x^2 + 0.176139x^3$

d) Minste kvadraters approksimasjon til $e^x - \sin(\pi x)$ er

$$\hat{\varepsilon}(x) - \hat{s}(x) = 0.996294 - 1.69434x + 0.536722x^2 + 3.07174x^3$$

med $\|(e^x - \sin(\pi x)) - (\hat{\varepsilon}(x) - \hat{s}(x))\| = 0.0933535$, jf figur C.4.



Figur C.4 $e^x - \sin(\pi x)$ vs $0.996294 - 1.69434x + 0.536722x^2 + 3.07174x^3$

Kapittel 8

8.1 $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 11 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$,
$B - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \end{pmatrix}$, $3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -8 \\ -2 & 5 & 24 \end{pmatrix}$

8.2 $A + B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$, $-3B = \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 27 & 12 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$,
$B - A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -12 & -9 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$,
$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(A + B)^T = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$

8.3 $(c(A^T))_{ij} = c(A^T)_{ij} = c(A)_{ji} = (c(A))_{ji} = (cA^T)_{ij}$

8.4 $(A + B)^T_{ij} = (A + B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A^T_{ij} + B^T_{ij} = (A^T + B^T)_{ij}$

8.5 $A_{ij} = A^T_{ji} = (A^T)^T_{ij}$

8.6 $(A + A^T)_{ij} = A_{ij} + A^T{}_{ij} = A^T{}_{ji} + (A^T)^T_{ji} = A^T{}_{ji} + A_{ji} = (A^T + A)_{ji} = (A + A^T)_{ji}$

8.7 a) Dette er lemma 8.4. Bevis:

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_h A_{jh}B_{hi} = \sum_h B^T_{ih}A^T_{hj} = (B^T A^T)_{ij}$$

b) $(ABC)^T = C^T(AB)^T = C^T B^T A^T$ c) $\left(\prod_{0\le k<n} A_k\right)^T = \prod_{0\le k<n} A^T_{n-k}$

8.8 a) A^T er inverterbar. b) $(AB)^T = B^T A^T$, så med $B = A^{-1}$ blir $(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$. Multiplikasjon fra høyre med $(A^T)^{-1}$ gir $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
c) Erstatt A^T med A i forrige punkt.

8.9 I dette og de følgende problemene, la $\underbrace{\overbrace{hk}}$ betegne en matrise slik at

$$\underbrace{\overbrace{hk}}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } h = i \text{ og } k = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .$$

Det er 6 ulike slike matriser av dimensjon 2×3:

$$\underbrace{\overbrace{11}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underbrace{\overbrace{23}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{og 4 til.}$$

Disse er opplagt lineært uavhengige, og det er klart at de danner en basis. Dimensjonen til rommet er derfor 6.

8.10 $\left\{\underbrace{\overbrace{hk}} \mid 1 \le h \le m, 1 \le k \le n\right\}$ danner en basis, med mn elementer.

8.11 $\left\{m\underbrace{\overbrace{hh}} \mid 1 \le h \le n\right\}$ danner en basis, med n elementer.

8.12 $\left\{\underbrace{\overbrace{hk}} \mid 1 \le h \le k \le n\right\}$ danner en basis, med $\frac{n(n+1)}{2}$ elementer.

8.13 $\left\{\underbrace{\overbrace{hk}} + \underbrace{\overbrace{kh}} \mid 1 \le h \le k \le n\right\}$ danner en basis, med $\frac{n(n+1)}{2}$ elementer.

8.14 $AI_n = A, \quad I_n B = B$

8.15 $AO_n = O_n B = O_n$

8.16 a) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ b) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -19 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -69 & 128 \\ -16 & 65 \end{pmatrix}$

8.17 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$,
$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$

8.18 Moteksempel i hvert tilfelle: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

8.19 a) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$
c) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$

8.20 a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.21 a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.22 a) $A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
b) $A\mathbf{e}_k = k$-te kolonne i A.
c) $\mathbf{e}_1^T B = (7, 1, 2)$, $\mathbf{e}_2^T B = (1, 0, 2)$, $\mathbf{e}_3^T B = (4, 3, 1)$
d) $\mathbf{e}_k^T B = k$-te rad i B.

8.23 a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

8.24 Konjugert symmetri:

$$AM\overline{B}^T = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} A_i M_{ij} \overline{B_j} = \sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le n}} \overline{B_j M_{ji}} A_i = \sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le n}} \overline{B_j M_{ji} \overline{A_i}} = \overline{BM\overline{A}^T}$$

Linearitet i første argument:

$$(A_1 + A_2)M\overline{B}^T = A_1 M\overline{B}^T + A_2 M\overline{B}^T$$

Moteksempel mot positivitet:

$$A = (1 \quad -1), \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle A, A \rangle = AM\overline{A}^T = -4$$

Moteksempel mot definitthet:

$$A = (1 \quad 1) \neq O, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle A, A \rangle = 0$$

8.25 La $B = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$. Da er $AB = BA = I_n$.

8.26 $(I - A)(I + A + \cdots + A^{n-1} + A^n) = I - A^{n+1} = I$ og $(I + A + \cdots + A^{n-1} + A^n)(I - A) = I - A^{n+1} = I$.

8.27 **bytt**: $(T_{hk}A)_{ij} = \begin{cases} A_{kj} & \text{hvis } i = h \\ A_{hj} & \text{hvis } i = k \\ A_{ij} & \text{ellers} \end{cases}$ bytter om rader h og k.

skaler: $(T_h(c)A)_{ij} = \begin{cases} cA_{ij} & \text{hvis } i = h \\ A_{ij} & \text{ellers} \end{cases}$ multipliserer rad h med c.

kombiner: $(T_{hk}(c)A)_{ij} = \begin{cases} A_{hj} + cA_{kj} & \text{hvis } i = h \\ A_{ij} & \text{ellers} \end{cases}$ legger c ganger rad k til rad h.

8.28 a) $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$ b) $T_i(c)^{-1} = T_i\left(\frac{1}{c}\right)$ c) $T_{ij}(c)^{-1} = T_{ij}(-c)$

8.29 Høyre multiplikasjon resulterer i elementære kolonneoperasjoner, analoge med elementære radoperasjoner.

8.30 Dette er bare en omformulering av ekvivalensen mellom betingelser 1 og 2 i teorem 8.12.

8.31 a) -17 b) 27 c) 4 d) -692 e) -20 f) -5 g) -45

8.32 a) $5t^2 + 7t - 2$ b) $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$

8.33 $\prod_{1 \le i \le n} a_{ii}$

8.34 a) $x = -1, y = 2, z = -1$ b) $x = 5/12, y = -1/12, z = 1/12$
c) $x = 11/2, y = -38/5, z = 1/10, w = 2$
d) $x = -5/24, y = 97/48, z = 1/3, w = -25/48$

8.35 Determinanten er en lineær kombinasjon av x, y, z, og 1, så ligningen beskriver et plan i $\mathbb{R}^3$. Når (x, y, z) erstattes med enten A, B eller C, blir matrisen singulær (to identiske rader), med determinant null.

Kapittel 9

9.1 De lineære avbildningene er gitt ved disse matrisene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

9.2 a) Speiling om y-aksen, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Speiling om x-aksen, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Skalering med en faktor c i x-retningen, $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Rotasjon av planet med en vinkel $-\frac{\pi}{2}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

e) Rotasjon av planet med en vinkel $-\upsilon$, $\begin{pmatrix} \cos\upsilon & \sin\upsilon \\ -\sin\upsilon & \cos\upsilon \end{pmatrix}$.

9.3 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

9.4 Vi har $N\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq -N\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i alle tilfellene:

	(a)	(b)	(c)	(d)
$N\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$-N\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

9.5 a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

9.6 a) Ved Gauss-Jordan-eliminasjon på systemet $A\mathbf{x} = \mathscr{O}$ fås

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så $\dim \ker L = 1$. Ligning for $\ker L$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{med} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Etter teorem 9.19 er $\dim \operatorname{img} L = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker L = 2$, så $\operatorname{img} L$ er et plan. Ligning for planet finnes f.eks. ved å anvende L på standardbasisen, som gir kolonnene i matrisen A, og plukke ut 2 lineært uavhengige verdier:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{med} \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Eliminasjon av p, q gir denne alternative formen:

$$x + y - z = 0$$

9.7 Jfr teorem 9.19: a) 4 b) 3

9.8 Hvis L er surjektiv så er $\operatorname{img} L = W$, derfor $\dim \operatorname{img} L = \dim W$. For å se det motsatte, anta $\dim \operatorname{img} L = \dim W = n$ og la $\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ være en basis for $\operatorname{img} L$. Elementene w_i er lineært uavhengige, så $\mathscr{B}$ er også basis for W i følge teorem 7.18. Velg $v_1, \ldots, v_n$ slik at $Lv_i = w_i$, $1 \le i \le n$, og betrakt en vilkårlig $w = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n \in W$. Ved linearitet er $L(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = w$, så L er surjektiv.

9.9

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
rang	1	1	2	1	2	3	2	3	3
nullitet	1	2	0	1	1	0	2	1	2

9.10 Betrakt standardbasisen $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_j \mid 1 \le j \le n\}$ på K^n. Da er $L_A \mathbf{e}_j$ lik kolonne j i A, og tilsvarende for L_B og B. Hvis $L_A = L_B$, må altså A og B ha parvis like kolonner, så $A = B$.

9.11 a) nei b) ja c) ja d) nei e) rang 1, nullitet 1

f) basis for $\ker L$: $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$, basis for $\operatorname{img} L$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

9.12 a) $D(f+g) = Df + Dg$ og $D(cf) = cDf$. b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$, så $D(6x^3 - 5x^2 + x - 17) = 18x^2 - 10x + 1$.

d) D^2 er sammensetningen av to lineære operatorer D og D, så den er lineær.

e) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, så $A^2 \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, og

$$D^2(2x^3 - 7x^2 + 11x - 5) = 12x - 14.$$

9.13 a) P^n har dimensjon $n + 1$.

b) $$\begin{aligned} L(p(x) + q(x)) &= x^2((p(x) + q(x))') = x^2 p'(x) + x^2 q'(x) \\ &= L(p(x)) + L(q(x)) \\ L(cp(x)) &= x^2((cp(x))') = cx^2 p'(x) = cL(p(x)) \end{aligned}$$

c) $L_0 : P^0 \to P^1$ har matrisen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. d) L_1 har matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) L_2 har matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

f) Nulliteten til L_n er 1. Kjernen består av alle konstante polynomer. Basis $\{1\}$.

g) Rangen til L_n er n. Basis for img L_n er $\{x^2, \ldots, x^{n+1}\}$.

9.14 a) La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} L(A + B) &= \begin{pmatrix} a + e + b + f & b + f + c + g \\ a + e + d + h & b + f + d + h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b & b + c \\ a + d & b + d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e + f & f + g \\ e + h & f + h \end{pmatrix} \\ &= L(A) + L(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(xA) &= \begin{pmatrix} xa + xb & xb + xc \\ xa + xd & xb + xd \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a + b & b + c \\ a + d & b + d \end{pmatrix} \\ &= xL(A) \end{aligned}$$

b) ker L inneholder bare matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) img L er hele rommet av 2×2 matriser, og har basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

9.15 Anta først at $L : V \to W$ er inverterbar. Vi viser at bildet av en basis er en basis: La $\{v_1, \ldots, v_n\}$ være en basis for V, og velg en vilkårlig $w \in W$. På grunn av surjektivitet finnes det en $v \in V$ slik at $Lv = w$. Vi kan skrive

$$Lv = L(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1 L v_1 + \cdots + c_n L v_n,$$

så mengden $\{Lv_1, \ldots, Lv_n\}$ spenner ut W. Det gjenstår å vise lineær uavhengighet. Anta for selvmotsigelse at det finnes skalarer $d_1, \ldots, d_n$, ikke alle lik 0, slik at

$$d_1 L v_1 + \cdots + d_n L v_n = \mathcal{O}.$$

Ved linearitet følger det at $L(d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n) = \mathcal{O}$, og ettersom $\dim \ker L = 0$ i lys av injektivitet, får vi

$$d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n = \mathcal{O},$$

i strid med forutsetningen om lineær uavhengighet av $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dermed har vi vist at L avbilder basiser på basiser.

For å vise den motsatte implikasjonen tar vi en vilkårlig basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ for V, og antar at bildet $\{Lv_1, \ldots, Lv_n\}$ er basis for W. Vi må vise surjektivitet og injektivitet av L: For surjektivitet, la $w \in W$. Vi har da

$$w = c_1 L v_1 + \cdots + c_n L v_n$$

og ved linearitet

$$L(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = w$$

så L er surjektiv. Injektivitet vises slik: Anta $Lu = Lv$. Vi har da

$$Lu = a_1 L v_1 + \cdots + a_n L v_n \quad \text{og} \quad Lv = b_1 L v_1 + \cdots + a_n L v_n$$

for skalarer a_i, b_j, $1 \leq i, j \leq n$. Da gjelder

$$Lu - Lv = (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = \mathcal{O},$$

men basisvektorene er lineært uavhengige, så det følger at $a_i = b_i$, $1 \leq i \leq n$ og derfor $u = v$, som godtgjør injektivitet.

9.16 Kolonne j i begge matrisene er koordinatiseringen av $L(v_j)$ i basisen $\{w_1, \ldots, w_m\}$, så de to matrisene har parvis like kolonner, og er derfor like.

9.17 La $L : V \to W$ med $\dim V = n$, og velg en basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for V. Vi viser at mengden $\{L(v_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ spenner ut $\operatorname{img} L$. Ta vilkårlig $w = L(v)$. Da er $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ for skalarer $\{c_i\}$, og $w = L(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) \in \operatorname{img} L$. Bruk linearitet:

$$w = c_1 L(v_1) + \cdots + c_n L(v_n) \in \operatorname{img} L$$

for vilkårlig $w \in \operatorname{img} L$. Det følger at $\dim \operatorname{img} L \le n$.

9.18 Anta $v_{\mathscr{B}'} = C v_{\mathscr{B}} = D v_{\mathscr{B}}$ for alle v. Da følger $C v_{\mathscr{B}} - D v_{\mathscr{B}} = (C - D) v_{\mathscr{B}} = \mathscr{O}$ for alle v, så $C - D = O$, med andre ord $C = D$.

9.19 a) $D(f + g) = Df + Dg$ og $D(cf) = cDf$. b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, og $A^2 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, så

$$D^2(7e^x - 5xe^x + 3x^2e^x) = 3e^x + 7xe^x + 3x^2e^x.$$

9.20 Anta for selvmotsigelse at det finnes to skalarer c, d, ikke begge null, slik at

$$cL(v) + dL(w) = \mathscr{O}.$$

Ved linearitet er da $L(cv + dw) = \mathscr{O}$, og siden nulliteten er 0 på grunn av surjektivitet og teorem 9.19, må også $cv + dw = \mathscr{O}$, i strid med forutsetningen om lineær uavhengighet.

Kapittel 10

10.1 a) Egenverdier $\{-3, 3\}$, egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Egenverdier $\{4, -1\}$, egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Egenverdier $\{2, 0\}$, egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Egenverdier $\{2, 0\}$, egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

e) Egenverdier $\{2, 1\}$, egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

f) Egenverdier $\left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$, egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ \frac{\sqrt{5}+3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ \frac{\sqrt{5}-3}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

g) Egenverdi 0, egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

h) Egenverdier $\{1, 3, -2\}$, egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

i) Egenverdier $\{2, -1 - i\sqrt{2}, -1 + i\sqrt{2}\}$,

egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{2} \\ -1 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 - i\sqrt{2} \\ -1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

10.2 Karakteristisk polynom $\prod_{i=1}^{n}(a_i - \lambda)$, egenverdier $\{a_i\}_{i=1}^n$, egenvektorer $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$.

10.3 Karakteristisk polynom $\prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$, egenverdier $\{a_{ii}\}_{i=1}^n$, og $\mathbf{e}_1$ er egenvektor med egenverdi a_{11}.

10.4 Samme karakteristiske polynom: $\left|A^T - \lambda I\right| = \left|(A - \lambda I)^T\right| = |A - \lambda I|$.

10.5 Det karakteristiske polynomet er $(\lambda - 1)^2$, så 1 er eneste egenverdi. Egenverdiene er løsningene av ligningssystemet

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

med andre ord systemet

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

som har rang 1. Løsningene er generert av egenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og løsningsrommet har altså dimensjon 1.

10.6 La C være en matrise som har 4 lineært uavhengige egenvektorer som svarer til egenverdiene $2, -1, -i, -2i$ til kolonner, og la D være diagonalmatrisen som har de tilsvarende egenverdiene $2, -1, -i, -2i$ på diagonalen. Da er $CDC^{-1} = A$, med andre ord $C^{-1}AC = D$.

10.7 L har i følge teorem 10.3 n lineært uavhengige egenvektorer, og de utgjør en basis i følge teorem 7.18.

10.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ med $a \neq 0$ er forutsatt. Anta for selvmotsigelse at det finnes en inverterbar matrise $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ og en diagonalmatrise $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ slik at $C^{-1}AC = D$, eller ekvivalent $AC = CD$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Det følger at

$$\begin{pmatrix} c_{11} + ac_{21} & c_{12} + ac_{22} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}d_1 & c_{12}d_2 \\ c_{21}d_1 & c_{22}d_2 \end{pmatrix}$$

Minst en av c_{21} og c_{22} må være forskjellig fra null, for ellers er C singulær. Hvis $c_{21} \neq 0$, følger $a = 0$ av $c_{11} + ac_{21} = c_{11}d_1$ og $c_{21} = c_{21}d_1$, ellers er $c_{22} \neq 0$, og $a = 0$ følger av $c_{12} + ac_{22} = c_{12}d_2$ og $c_{22} = c_{22}d_2$.

10.9 Det karakteristiske polynomet er $\lambda^4 - 1$, som har røtter $\pm 1, \pm i$, jf ligning (5.14).

10.10 I koeffisientmatrisen $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{pmatrix}$ sier at hubrobestanden vil reduseres med en faktor 0.5 i et år uten mus, og at musebestanden vil øke med en faktor 1.1 i et år uten hubro. Faktoren 0.4 uttrykker hvordan en stor musebestand bidrar til å styrke hubrobestanden, og tallet -0.104 uttrykker hvordan musebestanden reduseres når det er mange hubro. Modellen kan derfor synes plausibel.

Koeffisientmatrisen har egenverdier 0.58 og 1.02, med tilhørende egenvektorer hhv $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$. Disse er lineært uavhengige, så de danner en basis for løsningsrommet. Dermed kan vi uttrykke initialverdien $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ som $a \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ og

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} 0.58^n + b \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} 1.02^n$$

der det siste leddet dominerer for store n. Veksten ser altså ut til å ville stabilisere seg på 2 % pr år for begge bestandene, og det vil da være ca 1300 skogmus for hver hubro. (Men denne modellen sier naturligvis ingenting om økologisk bærekraft over lang tid.)

10.11 Koeffisientmatrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.15 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.95 \end{pmatrix}$ stipulerer en forplantningsrate på 0.33 kalv årlig per voksen hjort, en overlevelsesrate på 0.15 fra kalv til ungdyr, en overlevelsesrate på 0.45 for ungdyr fra leveår 2 til leveår 3, en overlevelsesrate på 0.75 fra ungdyr i leveår 3 til voksent dyr, og at voksne dyr har overlevelsesrate på 0.95 årlig. Disse tallene kan synes plausible. Hjortebestanden vil få utviklingen

$$H_n = av_1\lambda_1^n + bv_2\lambda_2^n + cv_3\lambda_3^n$$

der

$$H_0 = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Fordi $|\lambda_1| > 1$, mens $|\lambda_2| < 1$ og $|\lambda_3| < 1$ vil det første leddet dominere for store n. Egenverdien $\lambda_1 = 1.015$ viser at tilveksten vil stabilisere seg på om lag 1.5 % årlig, og fordi $v_1 = \begin{pmatrix} 0.325 \\ 0.086 \\ 1 \end{pmatrix}$ vil det da være om lag 325 kalver og 86 ungdyr per 1000 voksne hjort.

10.12 Nei, ingen.

10.13 I følge teorem 10.9 tilfredsstiller A sitt eget karakteristiske polynom:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = \mathbf{0}$$

Det følger at

$$-a_0 A^{-1} = A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-1} + \cdots + a_2 A + a_1 I_n$$

10.14 I hvert punkt er matrisene A, C, C^{-1}, D listet opp, der C er satt sammen av kolonner som er lineært uavhengige egenvektorer til A, og $D = C^{-1}AC$ har de tilsvarende egenverdiene på diagonalen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2i \\ 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.15 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A$

10.16 Merk at ligning (10.8) gjelder en kvadratisk form på $\mathbb{R}^2$:

1. Konjugert symmetri er opplagt fordi dette er et reelt indreprodukt.
2. Linearitet i første argument:

$$\left\langle c\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle = cx_1x_2 - 2cx_1y_2 - 2cy_1x_2 + 5cy_1y_2 = c\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle\\ &\quad = (x_1+u_1)x_2 - 2(x_1+u_1)y_2 - 2(y_1+v_1)x_2 + 5(y_1+v_1)y_2\\ &\quad = x_1x_2 + u_1x_2 - 2x_1y_2 - 2u_1y_2 - 2y_1x_2 - 2v_1x_2 + 5y_1y_2 + 5v_1y_2\\ &\quad = \left\langle\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle\end{aligned}$$

3. Positivitet: La $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \mathcal{O}$: Da er $\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle = x^2 - 4xy + 5y^2 = f(x, y)$, som har globalt minimum $f(0, 0) = 0$.
4. Definitthet: $x^2 - 4xy + 5y^2 = 0$ bare når $x = y = 0$, jf forrige punkt.

10.17 a)
$$\begin{aligned}Q(u+v) + Q(u-v) &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle\\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle\\ &\quad + \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle\\ &= 2\langle u, u\rangle + 2\langle v, v\rangle\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}Q(u+v) &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle\\ &= \langle u, u\rangle + 0 + 0 + \langle v, v\rangle = Q(u) + Q(v)\end{aligned}$$

10.18 a) Egenverdier $\{3, 2\}$, egenvektorer $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\right\}$, løsninger $x(t) = k_1e^{3t} + 5k_2e^{2t}$, $y(t) = k_2e^{2t}$

b) Egenverdier $\{4, 1\}$, egenvektorer $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$, løsninger $x(t) = 4k_1e^{4t} + 2k_2e^{t}$, $y(t) = 4k_1e^{4t} - k_2e^{t}$

c) Egenverdier $\{4, 2\}$, egenvektorer $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, løsninger $x(t) = 4k_1e^{4t} - 2k_2e^{2t}$, $y(t) = 4k_1e^{4t} + 2k_2e^{2t}$

10.19 La operatoren være $L : V \to V$, la $\mathcal{B}$ være en ortonormal basis for vektorrommet V over kroppen K, og la L være representert ved matrisen A med hensyn på $\mathcal{B}$. Betrakt nå avbildningen M som er definert ved matrisen $\overline{A^T}$, og la v, w være vektorer, koordinatisert med hensyn på $\mathcal{B}$, det vil si kolonnevektorer i K^n, der $\dim V = n$. Vi har

$$\langle Lv, w\rangle = (Av)^T\overline{w} = v^TA^T\overline{w} = v^T\overline{\overline{A^T}w} = \left\langle v, \overline{A^T}w\right\rangle$$

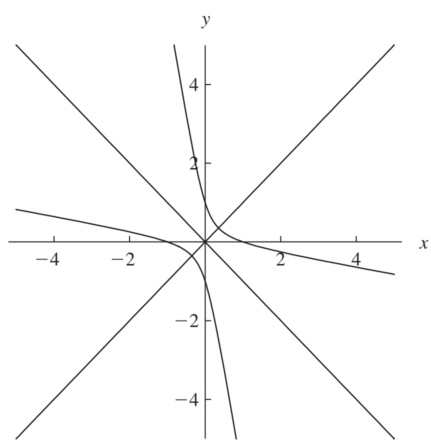
som viser at $L^* = M$. På side 179 er det vist at L^* er entydig når den finnes. Siden M er en avbildning definert ved matrisemultiplikasjonen $v \mapsto \overline{A^T} v$, følger det at M er en lineær avbildning.

10.20 a) $2x^2 + 3xy - 5xz + 7yz = (\,x \quad y \quad z\,) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -5/2 \\ 3/2 & 0 & 7/2 \\ -5/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) $-x^2 + 11xy - 13y^2 = (\,x \quad y\,) \begin{pmatrix} -1 & 11/2 \\ 11/2 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

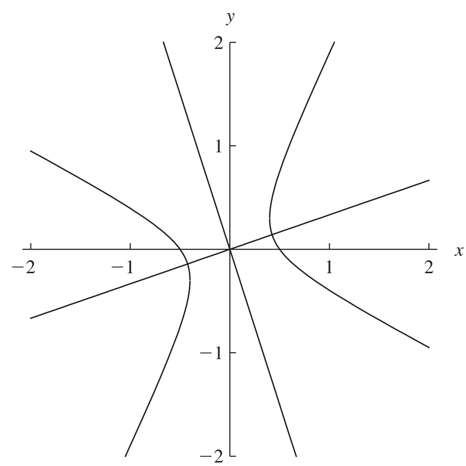
c) $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 5xy + 6yz = (\,x \quad y \quad z\,) \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & 0 \\ -5/2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

10.21 a) $x^2 + 6xy + y^2 = (\,x \quad y\,) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$, egenverdier $\{4, -2\}$, ortonormale egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$, rotasjon $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi/4$, figur C.5



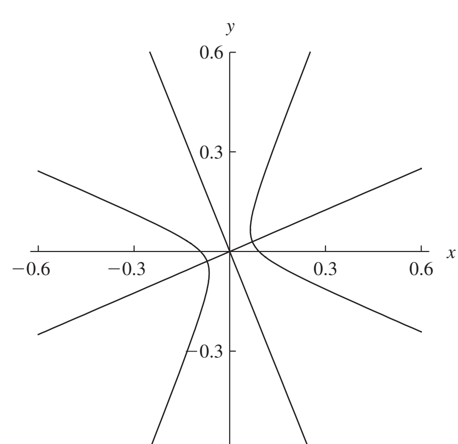
Figur C.5 En hyperbel rotert $\pi/4$.

b) $4x^2 + 6xy - 4y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$, egenverdier $\{5, -5\}$, ortonormale egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \right\}$, rotasjon $\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = 18.4349°$, figur C.6



Figur C.6 En hyperbel rotert 18.4349°.

c) $119x^2 + 240xy - 119y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 119 & 120 \\ 120 & -119 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$,
egenverdier $\{169, -169\}$, ortonormale egenvektorer $\left\{ \begin{pmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{pmatrix} \right\}$,
rotasjon $\arccos \frac{12}{13} = 22.6199°$, figur C.7



Figur C.7 En hyperbel rotert 22.6199°.