Oppgaver til kapittel 4.

Oppgave 04.01.
Bestem integralet $\int_a^b f(x)dx$.

a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \qquad [a,b] = [-2,2]$.

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x < 1, \\ 1 & \text{for } x \geq 1. \end{cases} \qquad [a,b] = [-2,2]$.

Oppgave 04.02.
Bestem det uegentlige integralet $\int_a^b f(x)dx$ eller påvis at det divergerer.

a) $f(x) = \ln|x|, \qquad [a,b] = [-2,2]$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad [a,b) = [-1,\infty)$.

c) $f(x) = \tan x, \qquad [a,b] = [-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

d) $f(x) = e^{-x}, \qquad [a,b) = [\ln 2, \infty)$.

Oppgave 04.03.
Finn arealet av området i xy-planet avgrenset av de gitte kurvene.

a) $y = \sin x$ og $y = 2x/\pi$ i første kvadrant.

b) $y = \arcsin x$ og $y = \pi x/2$ i første kvadrant.

c) $y = x^4$ og $y = 2 - x^2$ i første kvadrant.

d) $x = y^2$ og $x + y = 2$.

Oppgave 04.04.
En kunstgenstand i krystall har en kvadratisk grunnflate (bunn) med sidelengde 2. En diagonal i kvadratet er markert med rødt. Formen på gjenstanden er slik at ethert snitt normalt på den røde stripen er en likesidet trekant. Finn volumet av gjenstanden.

Oppgave 04.05.
Finn volumet av rotasjonsområdet som beskrives når flaten A roteres om aksen L, der både A og L ligger i xy-planet.

a) A ligger i første kvadrant og er er begrenset av kurvene $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ og $x + y = 2$. L er y-aksen.

b) A er begrenset av kurvene $y = -1$, $y = e^{-x}$, $y = x+1$ og $x = 3$. L er aksen $y = -2$.

c) A ligger mellom de to sirklene $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 + y^2 = 4$. L er aksen $y = 2$.

Oppgave 04.06.
Et sirkulært basseng for oppdrett av lakseyngel har radius 4 m og dybde $d(r) = 3 - \dfrac{r^2}{6}$ i avstand r fra den vertikale symmetriaksen, der både r og $d(r)$ er gitt i meter. Hvor mye vann er det i bassenget når det er fullt?

Oppgave 04.07.
Finn gjennomsnittsverdien for $f(x)$ på intervallet I.

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad I = [e, 8].$

b) $f(x) = xe^{2-x}, \qquad I = [0, 4].$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad I = [0, 1].$

d) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x} - 2e^x + 1}, \qquad I = [-5, -\ln 2].$

Oppgave 04.08.
Sett opp integral for lengden av kurven C og for arealet av rotasjonsflaten som beskrives når C roteres om aksen L. (Integralene skal ikke beregnes.)

a) C er kurven $y = \tan x$ for $0 \le x \le \pi/4$. L er y-aksen.

b) C er kurven $y = \cos x$ for $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. L er aksen $y = 2$.

Oppgave 04.09.
En stav av lengde 5 ligger langs x-aksen. Massetettheten er gitt ved

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 5.$$

Finn massen, tyngdepunktet og treghetsmomentet med hensyn på y-aksen for denne staven.

Oppgave 04.10.
Finn en tilnærmet verdi for $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ med feil mindre enn 0.01, både ved hjelp av trapesmetoden og ved hjelp av Simpsons metode.

Oppgave 04.11.

a) Deriver funksjonen $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2} e^{t^2}\,dt$.

b) Bestem $F'(1)$ for $F(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$.