Oppgaver til kapittel 3.

Oppgave 03.01.
Det er anslått at konstnadene ved å redusere CO_2-utslippet for en gitt bedrift med p% er gitt ved

$$f(p) = \frac{15p}{(10+p)(100-p)} \qquad \text{for } 0 \leq p < 100 \quad \text{(målt i milliarder kroner).}$$

a) Beregn $f(10)$ og $f'(10)$.

b) Gi en fortolkning av $f(10)$ og $f'(10)$ i denne settingen.

Oppgave 03.02.
Finn og klassifiser de lokale og de globale ekstremalpunktene til funksjonen f på intervallet I.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14, \qquad I = [-5, 5].$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14, \qquad I = [0, 5).$

c) $f(x) = \tanh x^2, \qquad I = (-\infty, \infty).$

d) $f(x) = x^2\sqrt{1-x}, \qquad I = [-1, 1].$

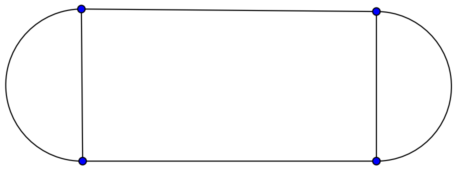
e) $f(x) = x^3 - 4x^4, \qquad I = (-3, 3].$

Oppgave 03.03.
Finn punktet (eller punktene) på grafen til $y = f(x)$ som ligger nærmest punktet P.

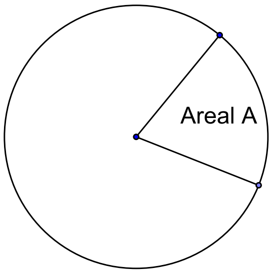
a) $f(x) = 4/x, \qquad P = (0, 0).$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}, \qquad P = (3, 0).$

Oppgave 03.04.
En idrettsbane skal ha grunnflate som består av et rektangel med en halvsirkel i hver tverrende. (Se figur neste side.) Rundt banen skal det gå en løpebane som skal være 400 m lang i innerkant. Bestem de dimensjonene av området innenfor løpebanen som gjør arealet av det størst mulig.



Oppgave 03.05.



En sirkelsektor skal ha areal A. Bestem radien og vinkelåpningen (uttrykt ved A) som gir kortest omkrets av sirkelsektoren.

Oppgave 03.06.
En populasjon har størrelse

$$N = f(t) = \frac{10}{1+4e^{-t}}$$

som funksjon av tiden t. Ved hvilket tidspunkt vokser populasjonen raskest?

Oppgave 03.07.
Finn Taylorpolynomet av grad n om $x = a$ for funksjonen f.

a) $f(x) = \ln(x^2+1), \quad n = 3, \quad a = 1.$

b) $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}, \quad n = 3, \quad a = 0.$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1, \quad n = 3, \quad a = 0.$

Oppgave 03.08.
Du sitter på en øde øy uten kalkulator. Beregn $\sqrt{17}$ med absolutt feil garantert mindre enn 0.001.

Oppgave 03.09.
En fabrikk skal produsere glasskolber som tar $1\,\ell$. Kolbene skal være sirkulære sylindre der indre radius r er lik indre høyde h målt i dm. Hvor stort avvik i $r = h$ kan tåles ved prduksjonen dersom volumet ikke skal avvike mer enn $1\,\mathrm{c}\ell$ (centiliter)? Finn svaret ved hjelp av lineær approksimasjon.

Oppgave 03.10.
En båt trekkes til kai ved hjelp av en vinsj som står ytterst på kaien, 3 meter over båtens taufeste. Tauet trekkes inn med konstant fart 1 m/s.

a) Finn båtens hastighet idet den er i 10 meters horisontal avstand fra vinsjen.

b) Vil båtens hastighet øke eller avta når den nærmer seg kaien? (Svaret skal begrunnes.)

Oppgave 03.11.
En rakett skytes vertikalt opp. En radar er stasjonert 500 m unna oppskytnings stedet i samme høyde over havet. Den måler avstanden $s = s(t)$ til raketten. Hvor stor hastighet har raketten 5 sekunder etter oppskytningsøyeblikket når

$$s = s(t) = 500 + t + t^2 \quad \text{meter, } t \text{ sekunder etter oppskytning?}$$

Oppgave 03.12.
Bestem grenseverdien dersom den eksisterer.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{\sin(x-2)}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan x - \sec x)$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5^x-1}{3^x-1}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ der a er en reell konstant.

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cos 2x)^{1/x}$.

Oppgave 03.13.
Løs differensialligningen

a) $y' = xy$.

b) $y' = (y+3)(x-1)$.

c) $y' + xy = x$.

d) $(1+x)y' + y = x^{3/2}$.

Oppgave 03.14.
Løs initialverdiproblemet:

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2(y-1)(y+2), \qquad y(0) = 2.$

b) $\dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{k}\right), \qquad N(0) = 10k$ (logistisk vekst).

c) $xy' - y = x^3 \qquad y(1) = 2.$

d) $y' - y = x^2 y, \qquad y(0) = 4.$