Oppgaver til kapittel 6.

Oppgave 06.01.
Skisser kurven.

a) $x^2 - 2x + 4y^2 + 4y = 2$.

b) $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.

c) $r = 2 - \sin\theta$ (polarkoordinater).

d) $r = 1 + 4\cos 4\theta$ (polarkoordinater).

e) $r = \sin 2\theta$ (polarkoordinater).

f) $r = a + \cos\theta$ for $a = 0$, 1 og 2 (polarkoordinater).

Oppgave 06.02.
La n være et naturlig tall. Hvor mange kronblad har blomsten (kurven) $r = \cos n\theta$ når

a) n er et odde tall (> 2)?

b) n er et jevnt tall > 2?

Oppgave 06.03.
Skisser flaten i rommet.

a) $3x + 2y + z = 1$.

b) $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} + z^2 = 1$.

c) $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} - z^2 = 1$.

d) $y^2 + z^2 = 4$.

e) $x = \sin z$.

f) $y^2 + z^2 = e^x/20$.

g) $x^2z^2 + y^2z^2 = e^z$ for $z > 0$.

h) $r^2 + z^2 = 8$ (sylinderkoordinater).

i) $r + 1 = z$ (sylinderkoordinater).

j) $\rho^2 = 3$ kulekoordinater).

k) $\rho = 2\sin\varphi$ kulekoordinater).

ℓ) $\rho = 1 - 2\sin\varphi$ kulekoordinater).

Oppgave 06.04.
Parametriser den gitte kurven i xy-planet. Hvilken retning har du gitt kurven ved

ditt valg av parametrisering?

a) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

b) $x^2-2y^2=4$.

c) $y=\sin x$.

d) $r=\sin\theta$ (polarkoordinater).

e) $r^2=\cos 2\theta$ (polarkoordinater).

f) $r=3$ (polarkoordinater).

Oppgave 06.05.
La C være en sykkelhjul med radius R som triller bortover x-aksen i positiv retning, uten å gli. Et punkt P (en refleksbrikke) er festet til en av ekene i avstand $0<r<R$ fra hjulets sentrum. La P starte i punktet $(0,R-r)$. Vis at da beskriver P den parametriske kurven

$$x=Rt-r\sin t,\qquad y=R-r\cos t\qquad \text{for } t\geq 0.$$

Denne kurven kalles en trokoide. Skisser trokoiden for $R=2$ og $r=1$.

Oppgave 06.06.
En sirkel C med radius $q<4$ triller uten å gli langs innsiden av sirkelen C_0 gitt ved $x^2+y^2=16$. La P være et gitt punkt på C. Finn en parameterfremstilling for kurven som P beskriver når P starter i punktet $(4,0)$ og C følger C_0 rundt i retning mot klokken. Denne kurven heter en hyposykloide. Skisser spesielt kurven for $q=1$.

Oppgave 06.07.
Parametriser skjæringskurven mellom de to gitte flatene. Hvilken retning gir parametriseringen din til kurven?

a) $z=x^2$ og $z=2y$.

b) $\rho=1$ og $\rho=2\sin\varphi$ (kulekoordinater).

c) $z=r^2$ og $r=2\cos\theta$ (sylinderkoordinater).

d) $x+2y+z=4$ og $z=r^2$ (henholdsvis kartesiske og sylinder-koordinater).

Oppgave 06.08.
Finn en parameterfremstilling for tangenten til kurven C i punktet P. (P er gitt i kartesiske koordinater.)

a) $C:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=\langle t,\,t^2,\,t^3\rangle$, $\qquad P=(2,4,8)$.

b) C er skjæringskurven mellom

- kuleflaten med sentrum i origo og radius 3, og
- planet som går gjennom punktene $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ og $(0,3,2)$ (kartesiske koordinater)

og $P=(1,0,2\sqrt{2})$.

c) C er gitt ved $x^3 + y^3 = 1$ i xy-planet, $\quad P = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

d) C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \langle \cos t + \cos 2t, \sin t - \sin 2t \rangle$, $\quad P = \left(\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3})\right)$.

Oppgave 06.09.
Kurven C i xy-planet er gitt ved $\mathbf{r} = \langle \ln t, -t^2 + 3t - 2 \rangle$ for $1 \le t \le 2$. Sett opp integraluttrykk for:

a) arealet under C i første kvadrant.

b) lengden av C.

c) arealet av rotasjonsflaten som beskrives når C roteres om x-aksen.

d) volumet av området innenfor flaten i c).

e) massen til C når massetettheten er $\delta(x) = x$.

f) tyngdepunktet til C når massetettheten er som i e).

Oppgave 06.10.
En partikkel i bevegelse har posisjon $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \langle 1, 2t^2, 2t^4 \rangle$ ved tidspunkt $t \ge 0$.

a) Skisser kurven for $0 \le t \le 1$.

b) Gjett retningene til $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ og $\mathbf{B}$ i punktet $\mathbf{r}(\frac{1}{2})$.

c) Kontroller gjetningen i b) ved utregning av $\mathbf{T}(\frac{1}{2})$, $\mathbf{N}(\frac{1}{2})$ og $\mathbf{B}(\frac{1}{2})$.

Oppgave 06.11.
En partikkel i bevegelse har posisjon $\langle \sin t, \cos t, t \rangle$ ved tidspunkt t.

a) Finn akselerasjonsvektoren til partikkelen for $t \ge 0$, og dekomponér den i én komponent for fartsendring og én for retningsendring.

b) Vi at partikkelens bane har konstant krumning, og bestem denne.

c) Finn krumningssirkelen til partikkelens bane i punktet $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\sqrt{3}, \dfrac{13\pi}{6}\right)$.

Oppgave 06.12.
En baseball slås ut fra origo og lander i punktet $(200, 200, 0)$ 2 sekunder senere. Vi ser bort fra luftmotstanden, og regner at utgangshastighetsvektoren $\mathbf{v}_0$, tyngdens akselerasjon $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ og eventuell spinn er de eneste faktorene som påvirker partikkelens bane.

a) Finn $\mathbf{v}_0$ dersom ballen ble slått ut uten spinn.

b) Finn $\mathbf{v}_0$ dersom ballen ble slått ut med spinn som ga akselerasjonsvektoren en ekstra komponent $2\mathbf{i}$.

c) Bestem ballens bane i de to tilfellene i a) og b).

Oppgave 06.13.
Et fly skal slippe en nødhjelpspakke ned til et bestemt mål på en plan slette. Flyet flyr i konstant høyde 800 m over sletten med konstant hastighet 500 km/time i retning rett mot målet.

a) Hvor langt før målet bør flyet slippe pakken?

b) Hva slags bane følger pakken mot jorden?

c) Bestem hastighetsvektoren og farten som pakken har idet den treffer bakken.