Oppgaver til kapittel 7.

Oppgave 07.01.
Skisser det naturlige definisjonsområdet og noen utvalgte nivåkurver for den gitte funksjonen.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$.

b) $f(x, y) = \ln(\arcsin xy)$.

c) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{xy-1}}$.

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$.

Oppgave 07.02.
Skisser det naturlige definisjonsområdet og noen utvalgte nivåflater for den gitte funksjonen.

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z}$.

b) $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

Oppgave 07.03.
Bestem grenseverdien eller påvis at den ikke eksisterer.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - yx^2}{y \sin x}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{y \sin x}{x - \pi}$.

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}}{xy}$.

Oppgave 07.04.
Bestem gradientvektoren til funksjonen f i punktet P.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y}{xy}, \quad P = (2, 1)$.

b) $f(x, y) = \dfrac{\tan xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad P = (0, 1)$.

c) $f(x,y,z) = x\ln(y \arcsin z), \quad P = (1,2,\frac{1}{2})$.

d) $f(x,y,z,w) = xy^2\sqrt{z}\tan w, \quad P = (1,2,4,\pi/6)$.

Oppgave 07.05.
En bedrift skal produsere en maskindel som har volum

$$V(x,y) = \int_{t=0}^{xy^2} e^{t^2}\,dt$$

der $x = \frac{1}{2}$ og $y = 2$ er to spesielle mål på maskindelen. Vanskeligheten er å produsere gjenstanden slik at x og y er nøyaktig nok. Hvilken restriksjon gir det for x og y at avvivket i V ikke skal overstige 1 i absoluttverdi?

(Hint: svaret kan finnes ved hjelp av lineær approksimasjon.)

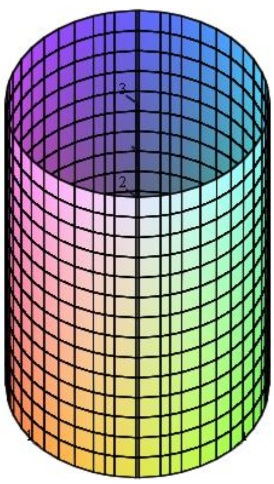
Oppgave 07.06.
La $w = f(x,y) = \sin x^2 + y\tan x^2$ der $x = x(t) = \sqrt{\pi/4t}$ og $y = y(t) = \arctan t$. Bestem dw/dt for $t = 1$ både ved innsetting og ved bruk av kjederegelen.

Oppgave 07.07.
Strømstyrken I (målt i ampère A) i en strømkrets med påtrykt spenning V (målt i volt V) og motstand R (målt i ohm Ω) er gitt ved ligningen

$$V = RI.$$

La V komme fra et batteri, slik at V avtar ettersom batteriet brukes. La videre R øke ettersom motstanden varmes opp av strømmen i strøkretsen. Dette vil påvirke strømstyrken. Hvor fort avtar strømstyrken? Svaret skal uttrykkes ved hjelp av V og R og/eller deres deriverte.

Oppgave 07.08.



En smeltende isblokk har form som en rett sirkulær sylinder med radius r cm og høyde h cm som vist på figuren. Hvor fort avtar volumet idet

- $r = 50$ cm og avtar med $\frac{1}{2}$ cm/time, og
- $h = 1$ m og avtar med 3 cm/time?

(Vi antar at blokken beholder den sylindriske formen under smeltingen.)

Oppgave 07.09.
Sett opp en ligning for tangentplanet til den gitte flaten S i det gitte punktet P.

a) $S: \; z = x^2 + 2y^2 + 4y$, $P = (1, -2, 1)$.

b) $S: \; x^3 \cos z + xy^2 \sin z = 1$, $P = (1, -2, 0)$.

Oppgave 07.10.
La

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y & \text{for } x^2 + y^2 < 1, \\ x + y^2 & \text{for } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

I hvilke punkter (x, y) er funksjonen diskontinuerlig?

Oppgave 07.11.
Finn den retningsderiverte til funksjonen f i punktet P og retning $\mathbf{v}$.

a) $f(x, y) = y \sec x, \quad P = (\pi, \frac{1}{2}), \quad \mathbf{v} = \langle 3, -1 \rangle$.

b) $f(x, y, z) = \tan^{-1}(xy + z), \quad P = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad \mathbf{v} = \langle 1, -2, 2 \rangle$.

Oppgave 07.12.
Den retningsderiverte til $f(x, y)$ i punktet $P = (0, 4)$ og retning $\mathbf{i}$ er lik 3 og i retning $\mathbf{j}$ er lik -2. Hva er den retningsderiverte til f i punktet P og retning $\langle 3, 2 \rangle$?

Oppgave 07.13.
Finn og klassifiser de kritiske punktene til funksjonen f.

a) $f(x, y) = x^2 - 4x^3y^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2x$.

b) $f(x, y, z) = x^2 + xz^2 + y^3$.

Oppgave 07.14.
Finn absolutt maksimum og minimum for funksjonen f på det lukkede området D.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 - 5$, D er sirkelskiven med sentrum i origo og radius 1.

b) $f(x, y) = x^2y - xy - x$, D er trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(3, 1)$ og $(4, 4)$.

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$, D er det romlige området begrenset av kuleflaten med sentrum i origo og radius 1.

Oppgave 07.15.
Finn det høyeste punktet på flaten $x^4 + y^4 + z = \frac{8}{3}x^3 + 4y^3$.

Oppgave 07.16. Finn det punktet i planet $2x + 3y + z = 14$ som ligger nærmest punktet $(-7, 7, 0)$.

Oppgave 07.17. Vis at kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ og kjegleflaten $z^2 = ax^2 + by^2$ står vinkelrett på hverandre når $a > 0$ og $b > 0$ er gitte konstanter. (Det vil si: tangentplanene i felles punkter står normalt på hverandre.)