Oppgaver til kapittel 2.

Oppgave 02.01.
Finn eksplisitte uttrykk for de sammensatte funksjonene $f_1(x) = g \circ h(x) = g(h(x))$ og $f_2(x) = h \circ g(x) = h(g(x))$ og bestem de naturlige definisjonsområdene for sammensetningene.

a) $g(x) = 1 + x^4, \quad h(x) = \sqrt{x}.$

b) $g(x) = e^{x+2}, \quad h(x) = \ln x.$

c) $g(x) = \sin x, \quad h(x) = \arcsin x.$

d) $g(x) = \cos x, \quad h(x) = \arcsin x.$

Oppgave 02.02.
Løs ligningen, eller påvis at den ikke har noe løsning .

a) $(x^2)^{3/4} + 2x^{3/4} = 1.$

b) $2^x + 4^x + \frac{1}{4} = 0.$

c) $\ln(x+1) = 3e.$

d) $\sin x + \tan x = 0.$

e) $e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{x^2} = 1.$

f) $e^x + e^{2x} + \frac{1}{4} = 0.$

g) $\ln x + \ln(2x) - 4 = 0.$

h) $\sinh(\ln x) = 4.$

i) $\ln x - \ln(x+1) = 1.$

Oppgave 02.03.
$f(x) = \sin x$ er en periodisk funksjon med periode $p = 2\pi$, amplityde (utsving) $A = 1$ og $f(0) = f_0 = 0$. Bestem om mulig konstanter a, b og c slik at

$$f(x) = a \sin(b + cx)$$

er periodisk med periode p, amplityde A og $f(0) = f_0$ som gitt i oppgaven.

a) $p = \pi, \quad A = 2 \quad \text{og} \quad f_0 = 0.$

b) $p = 2\pi, \quad A = 2 \quad \text{og} \quad f_0 = 1.$

c) $p = 1, \quad A = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad f_0 = 1.$

d) $p = 50, \quad A = 30 \quad \text{og} \quad f_0 = -15.$

Oppgave 02.04.
Bestem den inverse funksjonen f^{-1} til f dersom den finnes, og angi det naturlige definisjonsområdet til f^{-1}.

a) $f(x) = e^{x+1}.$

b) $f(x) = e^{x^3}.$

c) $f(x) = 1 + e^{3x}.$

d) $f(p) = \dfrac{1+p}{1-p}.$

e) $f(y) = \dfrac{1-y^3}{1+y^3}.$

f) $f(x) = \arcsin x^3.$

g) $f(x) = \ln(x+1).$

h) $f(t) = \log_2(t^3 - 1).$

i) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}.$

j) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.$

k) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

Oppgave 02.05.
Beregn den deriverte av funksjonen f.

a) $f(x) = e^{\ln x}.$

b) $f(x) = e^{\log_2 x}.$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x}.$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}.$

e) $f(x) = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{ved hjelp av } (\tan x)' = \sec^2 x.$

f) $f(y) = e^{y^2}.$

g) $f(p) = p \ln p.$

h) $f(t) = \dfrac{t \sin t}{1+t^2}$.

Oppgave 02.06.
Beregn $f'(a)$.

a) $f(x) = 2^x, \qquad a = 1.$

b) $f(x) = 2^x \ln x, \qquad a = e.$

c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad a = 4.$

d) $f(x)$ er den inverse funksjonen til $g(x) = \dfrac{x^5-1}{x^5+1}, \qquad a = 2.$

e) $y = f(x)$ er gitt implisitt ved ligningen

$$\ln y + 2\ln(y^2) + y = x$$

der $a = 5 + e$ og $f(a) = e$.

Oppgave 02.07.
La $a > 0$ være et gitt grunntall $\neq 1$. Vis at

$$\log_{a^2} x = \log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_a x \qquad \text{for alle } x > 0.$$

Oppgave 02.08.
Vis at

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh v \sinh u \qquad \text{for alle relle tall } u \text{ og } v.$$

Oppgave 02.09.
Anta at nyprisen for en spesialtilpasset bil for rullestolbrukere er 800 000 kroner, og at verdien avskrives jevnt og kontinuerlig gjennom året slik at den alltid er sunket med 10% i løpet av et år.

a) Finn en funksjon $f(t)$ som gir verdien til bilen etter t år. Finn spesielt verdien etter $t = 2.3$ år.

b) Hvor raskt avtar prisen akkurat etter $t = 2.3$ år. Sammenlign svaret med 10% av $f(2.3)$. Hvorfor er ikke de to svarene like?

Oppgave 02.10.
En høyspentledning skal strekkes gjennom Hardanger. Mellom to master med

avstand d og samme høyde over havet, følger ledningen grafen til en funksjon

$$f(x) = A\cosh(px) \qquad \text{for } -\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$$

der $A > 0$ og $p > 0$ er konstanter som blant annet avhenger av ledningens vekt og stramming. Finn et uttrykk for hvor mye ledningen sagger midt mellom to stolper. (Det vil si, beregn høydeforskjellen mellom festepunktene i monstermastene og midtpunktet mellom mastene uttrykt ved A, p og d.)

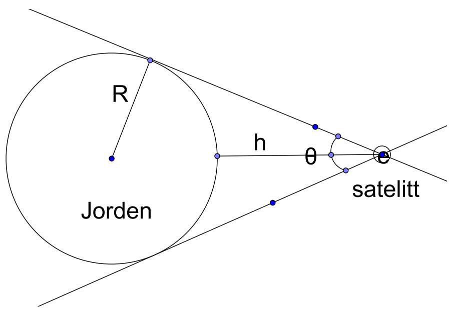
Oppgave 02.11.
Styrken på et jordskjelv angis gjerne etter Richters skala. Sammenhengen mellom skjelvets intensitet og Richters skala R er essensielt

$$R = \log_{10}\frac{A}{T} + B$$

der A er amplityden til bakkebevegelsen, T er perioden i den seismiske bølgen, og B er avstanden til skjelvets episenter.

Sammenlign amplitydene i et skjelv med $R = 8$ og et skjelv med $R = 9$ når konstantene T og B er de samme for de to skjelvene.

Oppgave 02.12.



En satelitt svever over Jorden i høyde (avstand fra jordoverflaten) h. Sett fra satelitten, ligger Jorden i en vinkelåpning θ som vist på figuren.

a) Vis at

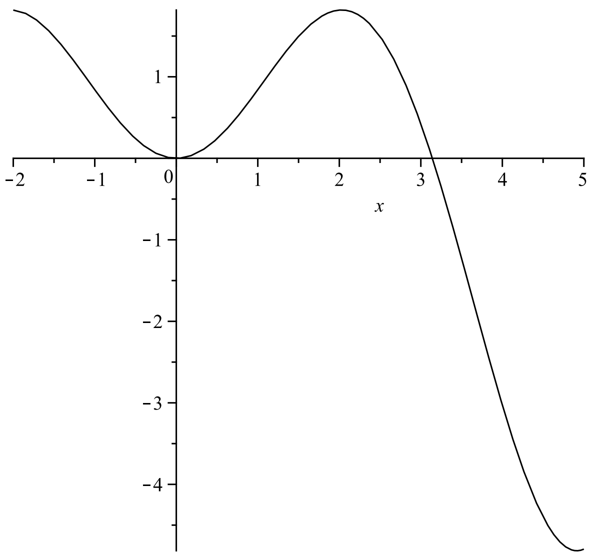
$$h = R\left(\csc\frac{\theta}{2} - 1\right)$$

der R er jordradien.

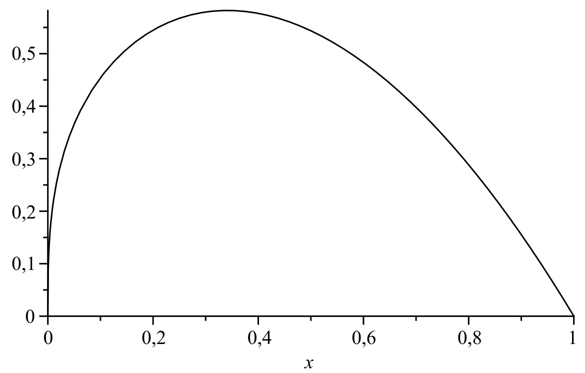
b) Hvor raskt endrer h seg i forhold til θ idet $\theta = \pi/3$?

Oppgave 02.13.
Grafen til $y = f(x)$ er gitt i oppgaven. Skisser grafen til $y = f'(x)$ (sånn cirka).

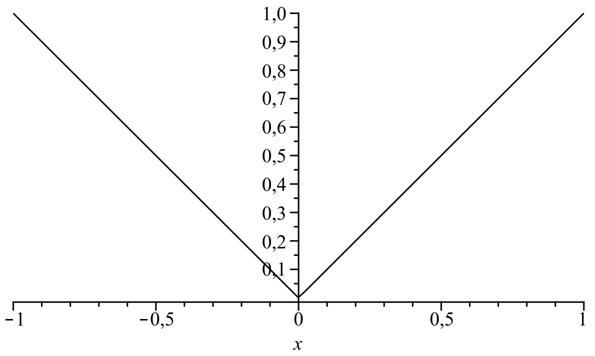
a)



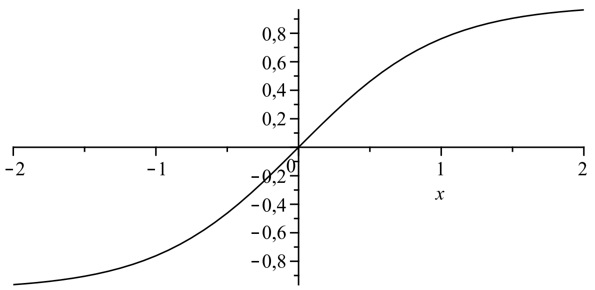
b)



c)


1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
-1
-0,5
0
0,5
1
x

d)


0,8
0,6
0,4
0,2
-2
-1
0
1
2
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
x