Opgaver til kapittel 5.

Oppgave 05.01.
Avgjør om tallfølgen konvergerer eller divergerer, og bestem grenseverdien når den konvergerer.

a) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$.

b) $\left\{(-1)^n e^{-n}\right\}$.

c) $\{a_n\}$ der $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ og $a_0 = 3$.

d) $\left\{n^{1/n}\right\}$.

Oppgave 05.02.
Rekken $-4+2+\cdots$ er geometrisk (allerede fra starten av). Finn de neste to leddene i rekken.

Oppgave 05.03.
Finn summen S av den geometriske rekken og bestem et naturlig tall n_0 slik at $|S-S_n| \leq 0.01$ for alle $n \geq n_0$, der S_n er summen av de n første leddene i rekken.

a) $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots$.

b) $\dfrac{1}{3^5}-\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{3^7}-\cdots$.

c) $\sin 1+\sin^2 1+\cdots$.

Oppgave 05.04.
En geometrisk rekke $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ konvergerer mot 4. Videre er $\sum_{n=0}^{99} = 3$.

a) Hva tror du om r? Er $|r|$ nær 0 eller er $|r|$ nær 1?

b) Bestem a og r og kontroller gjetningen din.

Oppgave 05.05.
Velg en passende konvergenstest og avgjør om rekken konvergerer eller diverge-

rer.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/5}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n-1}$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^3+8n^2+1}$.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Oppgave 05.06.
For hvilke x konvergerer potensrekken? Avgjør spesielt om konvergensen er absolutt eller betinget.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}}{n(n+1)}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}$.

Opgave 05.07.
Finn en delsum for rekken som approksimerer summen av rekken med absolutt feil < 0.01.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{4/3}}$. **c)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$.

Oppgave 05.08.

a) Vis at

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{for } |x| < 1.$$

b) Bruk resultatet i a) til å finne Taylorrekken til $f(x) = \arctan x$ om origo.

Oppgave 05.09.

a) Uttrykk en antiderivert til $f(x) = \sin x^2$ ved en konvergent rekke.

b) Bruk rekken i a) til å aproksimere

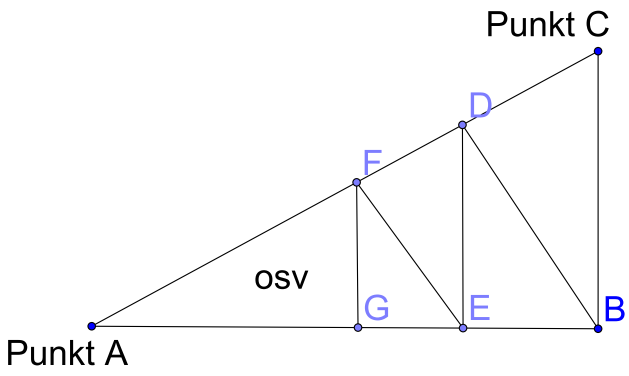
$$\int_0^1 \sin x^2 \, dx$$

med absolutt feil mindre enn 0.002.

Oppgave 05.10.
Finn (den eksakte) summen av rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1} \quad \text{for } |x| < 1.$$

Oppgave 05.11.



Figuren viser de fem første trekantene

$$\triangle ABC, \quad \triangle ABD, \quad \triangle ADE, \quad \triangle AEF, \quad \triangle AFG$$

i en uendelig førge av trekanter med avtakende størrelse. Trekantene er rettvinklede, og trekant nummer $(n+1)$ fremkommer ved å nedfelle en normal på hypotenusen i trekant nummer n og bruke trekanten til venstre for denne delestreken som neste trekant.

Finn summen av arelene til hver av disse trekantene.

Oppgave 05.12.
Approksimer $f(a)$ med absolutt feil $< \varepsilon$ ved hjelp av en passende potensrekke.

a) $f(x) = e^x, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 0.01$ (slik at du approksimerer e).

b) $f(x) = \arctan x, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 0.05$ (slik at du approksimerer $\pi/4$ og derved approksimerer π).

c) $f(x) = \ln x, \quad a = 4/3, \quad \varepsilon = 0.02.$