Oppgaver til Kapittel 9.

Oppgave 09.01.
La **F** være vektorfeltet i planet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}.$$

a) Illustrer vektorfeltet **F** grafisk (på samme måte som vist på side 164).

b) Bestem divergensen og curlen til **F**.

c) Gi en plausibel forklaring for hvordan det kan være mulig at $\operatorname{curl}\mathbf{F}(4,4) = \mathbf{0}$.

d) La C være kvartsirkelbuen der $x^2 + y^2 = 4$ med $x \geq 0$ og $y \geq 0$, orientert mot venstre. Beregn

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

e) Dersom **F** er et kraftfelt som virker på en partikkel P, hva er det da du har regnet ut i **d)** ?

Oppgave 09.02.
La **F** være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

(Det elektromagnetiske kraftfeltet rundt en rettlinjet elektrisk leder har for eksempel en slik form.)

a) Beregn $W = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ der C er sirkelen med sentrum i origo og radius $R > 0$ og positiv omløpsretning.

(OBS! Hvorfor kan du ikke benytte Greens Teorem til å beregne W?)

b) La $\tilde{C}$ være en enkel, lukket, stykkevis glatt kurve med positiv omløpsretning, der $\tilde{C}$ ikke går gjennom origo.
Beregn $\displaystyle\oint_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$

(OBS! Du må vurdere to forskjellige tilfeller.)

Oppgave 09.03.
La

$$\mathbf{F}(x,y) = (2\sin x^2 - xy^2)\mathbf{i} + \left(x^2 - \frac{1}{2-\sin^2 y}\right)\mathbf{j},$$

og la C være kurven gitt ved $y = \pm\sin x$ for $0 \le x \le \pi$, der C er orientert i positiv omløpsretning. Beregn integralet

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

Opgave 09.04.
La

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(2x^2y - e^{y^2}\right)\mathbf{i} + \left(2x^2y - \ln\frac{1}{1+x^2}\right)\mathbf{j}$$

og la C være randen til det trekantede området D med hjørner i punktene $(0,1)$, $(1,-1)$ og $(2,2)$, orientert i positiv omløpsretning.

Beregn integralet

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

der $\mathbf{n}$ er den utadvendte enhetsnormalen til C.

Oppgave 09.05.
La S være flaten gitt ved

$$S: \qquad z = e^{5-x^2-y^2} \quad \text{for } x^2+y^2 \le 4,$$

og la C være randen til S orientert mot klokken sett ovenfra. La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{x^2}+y\right)\mathbf{i} + ze^{y^2}\mathbf{j} + z\cos(x^2+y^2)\mathbf{k},$$

og la $\mathbf{G} = \operatorname{curl}\mathbf{F}$.

Beregn flateintegralet $\Phi = \iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til S med positiv $\mathbf{k}$-komponent.

Oppgave 09.06.
La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\sin z\,\mathbf{i} + (z+2xy\sin z)\mathbf{j} + (y+xy^2\cos z)\mathbf{k}.$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.

b) La C være kurven parametrisert ved

$$C: \qquad x = t^3\sin t, \quad y = t + \ln\frac{1}{1+t^2}, \quad z = \frac{1+t}{1+t^5} \quad \text{for } 0 \le t \le 1.$$

Beregn

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

Opgave 09.07.
La

$$\mathscr{I} = \int_C x^2\,dy - y^2\,dx$$

være linjeintegralet der C er kurven $x = y^3$ for $-8 \le x \le 8$, orientert i retningen med voksende x.

a) Finn et kraftfelt som er slik at $\mathscr{I}$ uttrykker bidraget fra $\mathbf{F}$ til arbeidet med å flytte en partikkel P langs kurven C.

b) Finn et vektorfelt $\mathbf{G}$ som er slik at $\mathscr{I}$ uttrykker fluksen av $\mathbf{G}$ opp over C.

c) Beregn verdien av linjeintegralet $\mathscr{I}$.

Oppgave 09.08.
La S_1 være flaten $z = x^2 + 3x + y^2$ og S_2 være flaten $z = 8 - x^2 - 5x - y^2$, og la T være det begrensede området som er avgrenset av S_1 og S_2.

La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + (x^3+y)\mathbf{j} + (z+5x)\mathbf{k}$$

a) Vis at projeksjonen av skjæringskurven mellom S_1 og S_2 ned i xy-planet er en sirkel.

b) Finn volumet til T.

c) Finn fluksen av vektorfeltet $\mathbf{F}$ ut gjennom overflaten til T.

d) Finn fluksen av $\mathbf{F}$ ut gjennom den delen av overflaten til T som ligger på S_2.

e) Finn fluksen av $\mathbf{F}$ ut gjennom den delen av overflaten til T som ligger på S_1.

Oppgave 09.09.
La S være flaten $z = x^2 + y^2$ for $0 \le z \le 16$.

Finn fluksen av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} - (y^2 + \sin x^2)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

opp gjennom S.

Oppgave 09.10.
La

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)z\,\mathbf{i} + (x-y)z\,\mathbf{j} + zg(x,y,z)\mathbf{k}$$

være et vektorfelt der $g(x,y,z)$ er en kontinuerlig deriverbar funksjon i første oktant T der $x>0$, $y>0$ og $z>0$.

a) For hvilke funksjoner $g(x,y,z)$ er $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0$ for alle $(x,y,z) \in T$?

b) For hvilke funksjoner $g(x,y,z)$ har vi både at

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0 \quad \text{og} \quad \operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}?$$

c) For hvilke funksjoner $g(x,y,z)$ har vi både at

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0 \quad \text{og} \quad \operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0}?$$