Eksamensoppgaver - løsninger

Øystein Strøm

28. januar 2018

Innhold

1 Eksamen 2010 **1**

1.1 1

1.1.1 2

1.1.2 2

1.1.3 4

1.1.4 4

1.2 5

1.2.1 5

1.2.2 6

1.3 7

1.3.1 7

1.3.2 9

1.3.3 9

1.4 10

1.4.1 10

1.4.2 11

1.4.3 11

1.4.4 13

2 Kontinuasjonseksamen vår 2011 **15**

2.1 15

2.1.1 16

2.1.2 16

2.2 17

2.2.1 17

2.2.2 19

2.2.3 21

2.2.4 21

2.3 21

2.3.1 22

2.3.2 24

2.4 25

2.4.1 25

2.4.2 25

3 Eksamen 2011 **27**
3.1 27
3.1.1 27
3.1.2 27
3.1.3 29
3.2 29
3.2.1 29
3.3 31
3.3.1 31
3.3.2 Totalkapitalmetoden 31
3.3.3 Justert nåverdi 32
3.3.4 Egenkapitalmetoden 34
3.3.5 35
3.4 36
3.4.1 36
3.4.2 38
3.5 38
3.5.1 38
3.5.2 40

4 Kontinuasjonseksamen våren 2012 **41**
4.1 41
4.1.1 42
4.1.2 42
4.1.3 44
4.2 45
4.2.1 45
4.2.2 46
4.3 46
4.3.1 46
4.3.2 46
4.3.3 46
4.4 47
4.4.1 47
4.4.2 48
4.4.3 49
4.4.4 49
4.5 50
4.5.1 50
4.5.2 51

5 Eksamen 2012 **53**

5.1 Dividende og vekst . . . 53
5.1.1 Dagens aksjekurs . . . 53
5.1.2 5% vekst "i all evighet" . . . 54
5.1.3 1% vekst etter første vekstfase . . . 54
5.1.4 Tilbakekjøp? . . . 55
5.2 Markedsmodellen . . . 55
5.2.1 God sammenheng? . . . 55
5.2.2 Anvendelser . . . 55
5.3 Kapitalstruktur . . . 56
5.3.1 . . . 56
5.3.2 Endring i gjeld . . . 56
5.3.3 Fordeler og ulemper med økt gjeldsandel . . . 57
5.4 Gjeldsoverheng . . . 57
5.5 Binomisk opsjonsprising . . . 58
5.5.1 Replikerende portefølje en periode . . . 58
5.5.2 Risikonøytral prising . . . 60
5.5.3 To perioder: Risikonøytral prising . . . 61

6 Eksamen 2013 **63**
6.1 . . . 63
6.1.1 . . . 63
6.1.2 . . . 63
6.2 . . . 65
6.2.1 . . . 65
6.2.2 . . . 66
6.2.3 . . . 66
6.2.4 . . . 66
6.3 . . . 67
6.3.1 Ekstraordinær dividende . . . 67
6.3.2 Tilbakekjøp av aksjer . . . 68
6.3.3 Nye aksjer og høyere utbytte . . . 69
6.3.4 Konklusjon . . . 70
6.4 . . . 70
6.4.1 . . . 71
6.4.2 . . . 71
6.4.3 . . . 71

7 Kontinuasjonseksamen 2014 **73**
7.1 . . . 73
7.2 . . . 73
7.2.1 . . . 73
7.2.2 . . . 74
7.2.3 . . . 76
7.3 . . . 77

7.3.1 . . . 77
7.3.2 . . . 78
7.3.3 . . . 79
7.4 . . . 80
7.4.1 . . . 80
7.4.2 . . . 81
7.4.3 . . . 81

8 Eksamen 2014 **83**
8.1 . . . 83
8.1.1 . . . 83
8.1.2 . . . 84
8.1.3 . . . 84
8.2 . . . 85
8.2.1 . . . 85
8.2.2 . . . 85
8.2.3 . . . 86
8.3 . . . 86
8.3.1 . . . 86
8.3.2 . . . 87
8.3.3 . . . 88
8.3.4 . . . 88
8.4 . . . 88
8.4.1 . . . 88
8.4.2 . . . 89
8.4.3 . . . 90
8.4.4 . . . 90

9 Kontinuasjon vår 2015 **93**
9.1 . . . 93
9.1.1 . . . 93
9.1.2 . . . 93
9.1.3 . . . 94
9.2 . . . 94
9.2.1 . . . 94
9.2.2 . . . 95
9.2.3 . . . 95
9.3 . . . 96
9.3.1 . . . 96
9.3.2 . . . 97
9.3.3 . . . 97
9.3.4 . . . 98
9.3.5 . . . 98
9.4 . . . 99

9.4.1 . . . 99
9.4.2 . . . 99
9.4.3 . . . 100

10 Eksamen 2015 **101**
10.1 . . . 101
10.1.1 . . . 101
10.1.2 . . . 101
10.2 . . . 104
10.2.1 . . . 104
10.2.2 . . . 104
10.2.3 . . . 105
10.3 . . . 105
10.3.1 . . . 106
10.3.2 . . . 106
10.3.3 . . . 107
10.4 . . . 107
10.4.1 . . . 107
10.4.2 . . . 108
10.4.3 . . . 108

11 Utsatt eksamen 2016 **111**
11.1 . . . 111
11.1.1 Aksjeselskap og partnerskap . . . 111
11.1.2 Børsnotert og ikke børsnotert . . . 112
11.1.3 Aksjeselskapsformer . . . 112
11.2 . . . 112
11.2.1 . . . 112
11.2.2 . . . 113
11.2.3 . . . 113
11.2.4 . . . 114
11.3 . . . 115
11.3.1 Perfekte kapitalmarkeder . . . 115
11.3.2 Bedriftsskatt . . . 116
11.3.3 Skatt på bedrift, inntekt og utbytte . . . 117
11.3.4 Kommentarer . . . 117
11.4 Opsjon . . . 117
11.4.1 Opsjonsparitet . . . 117
11.4.2 Definisjoner . . . 117
11.4.3 Renteparitet . . . 118
11.4.4 Risikonøytral prising . . . 119
11.4.5 Kjøpsopsjonens pris . . . 119
11.4.6 Virkningen av høyere volatilitet . . . 119
11.4.7 Hvorfor høyere opsjonspris? . . . 120

12 Eksamen 2016 **121**
12.1 . . . 121
12.1.1 Begrenset ansvar . . . 121
12.1.2 Aksjeselskapets risiko . . . 121
12.1.3 Et arbitrasjefritt marked . . . 122
12.2 Positiv alfa? . . . 122
12.3 Renteskattefordel og stresskostnader . . . 123
12.3.1 . . . 123
12.3.2 . . . 123
12.3.3 Ulike typer stresskostnader . . . 123
12.4 Signalisering med tilbakekjøp . . . 124
12.4.1 . . . 124
12.4.2 . . . 124
12.4.3 . . . 124
12.4.4 . . . 125
12.4.5 . . . 125
12.4.6 . . . 125
12.4.7 . . . 125
12.4.8 . . . 126
12.4.9 . . . 126

13 Utsatt eksamen 2017 **127**
13.1 Arbitrasje . . . 127
13.1.1 Arbitrasjefri pris . . . 127
13.1.2 . . . 127
13.1.3 . . . 128
13.1.4 Verdiaddivitet . . . 128
13.2 Kapitalverdimodellen . . . 128
13.2.1 . . . 128
13.2.2 Bedre enn markedsporteføljen? . . . 128
13.3 MM med skatt: Rekapitalisering . . . 129
13.3.1 Selskapets verdi . . . 129
13.3.2 Eiernes gevinst . . . 129
13.4 Opsjoner – BSM . . . 130
13.4.1 Prisen på en kjøpsopsjon . . . 131
13.4.2 Prisen på salgsopsjonen . . . 131
13.4.3 Virkning av lavere utøvelsespris . . . 131

14 Eksamen 2017 **133**
14.1 . . . 133
14.1.1 . . . 133
14.1.2 . . . 133
14.1.3 . . . 134
14.2 . . . 135

14.2.1 135
14.2.2 Ulike målsettinger 136
14.2.3 Maksimal avkastning 136
14.2.4 Minimal risiko 137
14.2.5 Målsettinger om avkastning og risiko 137
14.2.6 Avkastning på 20.0% 137
14.2.7 Risiko er gitt til 5% 137
14.2.8 Endring i olje 138
14.2.9 Målsetting: Maksimal avkastning 138
14.2.10 Minimal risiko 139
14.3 139
14.3.1 Opsjonsprisen 140
14.3.2 Paritet 141
14.3.3 To perioder 141
14.3.4 Høyere volatilitet 142
14.4 Risiko-overveltning og kapitalstruktur 143
14.4.1 Investere i tapsprosjekt? 143
14.4.2 Avveiningsteorien 144

A Symboler, formler og tabell **147**

Bibliografi **155**

Kapittel 1

Eksamen 2010

1.1

Vi ser at nåverdien av obligasjonen, $PV = B$ består av en rekke av like betalinger og en avsluttende betaling av pålydende. Dermed kan vi skrive PV som

$$PV = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{1.1}$$

der K er de årlige rentebetalinger og M er pålydende. r er markedsrenten og viser altså investorenes alternative investeringsmulighet. Vi ser at K'ene danner en rekke som kan tilnærmes med en annuitet. Vi kan dermed skrive (1.1)

$$PV = \frac{(1+r)^T - 1}{r(1+r)^T}K + \frac{1}{(1+r)^T}M \tag{1.2}$$

I tabell 1.1 er det gjort en del beregninger som man kan støtte seg på i underpunktene.

Rentefaktoren er definert som

$$\text{Rentefaktor} = R = \frac{1}{(1+r)^t} \tag{1.3}$$

Tabell 1.1 Utregning av obligasjonens verdi og dens durasjon når pålydende er 1000, kupongrenten er 6.0% og markedsrenten er 7.5%.

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdi	Andel NV	Dura-sjon
1	60	0.9302	55.81	0.0594	0.0594
2	60	0.8653	51.92	0.0553	0.1105
3	60	0.8050	48.30	0.0514	0.1543
4	60	0.7488	44.93	0.0478	0.1913
5	60	0.6966	41.79	0.0445	0.2225
5	1000	0.6966	696.56	0.7416	3.7078
Summer			939.31	1.0000	4.4458

1.1.1

Tabell 1.1 er obligasjonens nåverdi vist i kolonnen for Nåverdi. Det viser seg altså at

$$PV = B = 939.31$$

Dette er også dens pris.

1.1.2

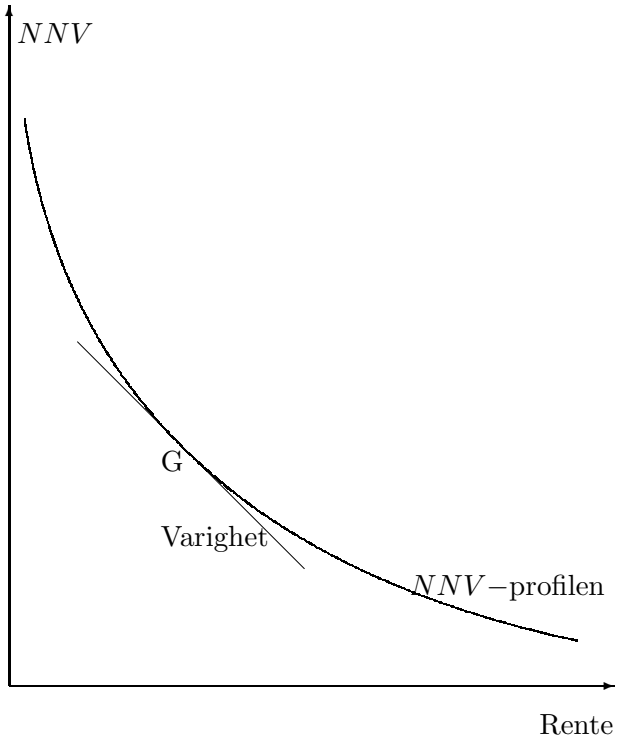
Forholdet mellom varighet og NNV er vist i figur 1.1. Varigheten er altså stigningsforholdet i $NNV-$profilen ved tangeringspunktet G for en gitt rente. Dermed vil selvsagt varigheten endres alt etter hvilket rentenivå man holder til i. For det andre viser det seg at avstanden mellom varigheten og $NNV-$profilen øker med renteendringen. Jo større renteendring, jo større er misforholdet. Dette tar vi hensyn til med konveksitet. Konveksiteten tetter igjen, så å si, hullet mellom varighet og $NNV-$profilen. Mens varigheten representerer den deriverte i punktet, er konveksiteten den annenderiverte, og viser hvilken retning endringen tar, dvs. om endringen øker eller avtar.

Det viser seg at prisendringen på obligasjonen kan skrives:

$$\frac{\partial B}{\partial r}\frac{1}{B} = \frac{-1}{(1+r)}D \tag{1.4}$$

hvor D er *Macaulay's varighet* eller *durasjon* og defineres på følgende måte:

$$D = \frac{1}{B}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{tK}{(1+r)^t} + \frac{TM}{(1+r)^T}\right] \tag{1.5}$$



Figur 1.1: Illustrasjon av $NNV-$profilen og varighet: Varighet er stigningsforholdet til $NNV-$profilen for et gitt rentenivå.

En viktig tolkning av varighet er at den viser den gjennomsnittlige tid til forfall for obligasjonen, der årets kontantstrøm viser hvilken vekt hvert enkelt år har. Definer hvert ledd i kontantstrømmen sin nåverdi med $PV\left(K_t\right) = K/(1+r)^t$. Multipliser deretter hvert ledd i (1.5) med $1/B$. Dermed har vi:

$$D = \frac{1 \times PV\left(K_1\right)}{B} + \frac{2 \times PV\left(K_2\right)}{B} + \ldots + \frac{T \times PV\left(K_T\right)}{B} + \frac{T \times PV\left(M_T\right)}{B} \tag{1.6}$$

Varigheten er regnet ut i tabell 1.1. I tabellen er den siste metoden fra (1.6) brukt. Det viser seg altså at

$D = 4.4458$

1.1.3

Vi tar utgangspunkt i (1.4) og omformer for å få frem enkle termer. I praktiske anvendelser brukes gjerne differanseuttrykket d i stedet for den deriverte ∂. Fra (1.4) har vi:

$$\frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = -\frac{1}{1+r}D \tag{1.7}$$

som er den relative *kursfølsomheten* eller *volatilitet* overfor renteendringer. Den skrives gjerne uten det negative fortegnet. I oppgaven er volatiliteten:

$$\text{Volatilitet} = \frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = \frac{4.4458}{1.075} = 4.1356$$

En manipulering av (1.7) gir obligasjonens omtrentlige prosentvise prisendring:

$$\frac{dB}{B} = -\frac{D}{1+r}dr = -\text{Volatilitet} \times \text{Renteendring} \tag{1.8}$$

Innsetting gir nå direkte:

$$\frac{dB}{B} = -4.1356 \times 0.01 = -0.041356$$

Den nye prisen blir dermed:

$$B = 939.31 \times (1 - 0.041356) = 900.46$$

Den nye prisen i markedet ventes altså å være 904.46. Resultatet er rimelig; når kapitalkostnaden øker, er investorene villige til å betale en lavere pris for obligasjonen enn før renteoppgangen.

1.1.4

Obligasjonen omsettes for 900 i markedet. Vi skal finne avkastningen frem til forfall. Vi skal altså finne obligasjonens avkastning y fra sammenhengen

$$900 = \frac{60}{1+y} + \frac{60}{(1+y)^2} + \frac{60}{(1+y)^3} + \frac{60}{(1+y)^4} + \frac{1060}{(1+y)^5}$$

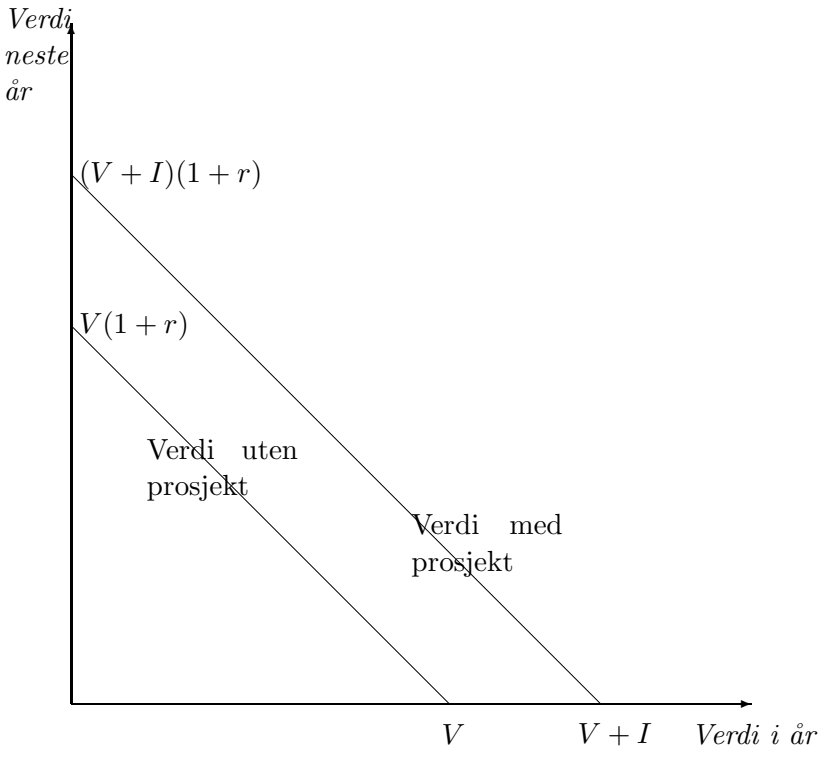
Vi ser dette er det samme som å finne internrenten til uttrykket. Legg merke til at siste periodes kontantstrøm er 1060. Vi bruker prøving og feiling eller kalkulator og finner at $y = 0.0854$, dvs. 8.54%.

1.2

1.2.1

Et beslutningskriterium som sier at vi skal velge de prosjekter som har positiv netto nåverdi høres enkelt ut. Hvem sine målsettinger ønsker vi å maksimere? Her går vi ut fra at det er investorenes målsettinger som skal maksimeres. Videre forutsetter vi at investorene mener deres nytte stiger når deres formue tiltar. Men investorene kan jo samtidig ha svært ulike *tidspreferanser*: Noen ønsker å forbruke det de har i dag, andre vil vente. Kan så ulike investorer enes om ett beslutningskriterium, til og med et så enkelt som å velge positive NNV-prosjekter?

Definer V som selskapets verdi og I et investeringsprosjekt. Vi forutsetter at selskapet er 100% egenkapitalfinansiert. Figur 1.2 kan gi et foreløpig svar.



Figur 1.2: Effekten av et prosjekt med positiv netto nåverdi: Forbruket kan økes. Hvor stor andel som forbrukes i år og hvor mye som spares til neste år avgjøres av hver aksjonærs konsumplan

I og med at aksjonærene ikke behøver å samordne sine konsumplaner, blir også beslutningsprosessen enklere. Eierne kan være svært uenige seg imellom

om hvordan forbruket skal fordeles over tid, men de vil alle være enige i at positive NNV-prosjekter skal gjennomføres. Det gir alle muligheter for høyere konsum, enten dette skjer med det samme ("pengene brenner i lomma", personen er et "ødeland") eller i kommende perioder ("Onkel Skrue").

Gitt at kapitalmarkedene fungerer, leder dette til vår enkle beslutningsregel: *Velg de prosjektene som har positiv netto nåverdi.* I en bedrift fører dette til et enkelt oppdrag for administrerende direktør. Vi oppsummerer:

1. Økonomidirektøren bør handle i eiernes interesser. Hver aksjonær ønsker tre ting:
   (a) Å bli så rik som mulig, dvs. maksimere nåværende formue.
   (b) Å omforme formue til den konsumplanen eieren foretrekker.
   (c) Å velge risikoprofilen til konsumplanen etter egne ønsker.
2. Eierne behøver ikke administrasjonens råd om hvordan man kan oppnå sin foretrukne konsumplan. Det klarer eierne på egen hånd, forutsatt at kapitalmarkedene fungerer. Videre kan eierne selv avgjøre om de vil satse penger på mer eller mindre risikable prosjekter.
3. Finansdirektøren kan kun hjelpe eierne på en måte, det er ved øke markedsverdien til hver eiers andel. Det gjøres ved å investere i prosjekter med positiv netto nåverdi.

Disse enkle reglene også har implikasjoner for selskapets strategi, for eksempel om selskapet skal velge å investere i ulike typer virksomheter for å spre risikoen, eller om man skal holde seg til et forretningsområde som man kjenner.

1.2.2

Nåverdiregelen er grei, men er den enkel å gjennomføre i praksis? Det kan pekes på fire forhold:

1. Kapitalmarkedene fungerer.
2. Tjenlige lover, offentlige reguleringer og skatter.
3. Prinsipal-agent-problemet: Eiere og ledelse har ikke nødvendigvis sammenfallende interesser.
4. Stakeholder-problemet: Er det riktig å "bare" maksimere eiernes interesser.

Dette kan jo drøftes vidt og bredt.

Kapitalmarkedene. En forutsetning for nåverdiregelen, er at kapitalmarkedet fungerer. Ett av hovedformålene med kapitalmarkedet er å overføre, allokere, verdier fra i dag til senere perioder. Det enkelte individ og den enkelte virksomhet må ha tillit til at oppsparte midler kan brukes i senere perioder. Bankene må være villige til å låne ut penger når pengene trenges.

Høsten 2007 fikk vi erfare at dette ikke er noen selvfølge. Bankene var uvillige til å låne penger til hverandre, og det økonomiske liv i det hele tatt var i ferd med å bli kvalt.

Det offentlige. Lover og det offentliges reguleringer og skattlegging er av avgjørende betydning. Investorer må være trygge på at deres verdier ikke konfiskeres av makthavere. Det må være stabile rammebetingelser for næringsvirksomhet.

Eiere og ledere. Eiere og ledelse har ikke nødvendigvis de samme interesser. Den som skal gjennomføre positive netto nåverdiprosjekter tenker på sine egne interesser såvel som eiernes. Dette er *prinsipal-agent-problemet* som ble beskrevet i Jensen and Meckling (1976).

Stakeholderne. Et annet problem er om maksimering av netto nåverdi er hva som er et riktig beslutningskriterium. Det fremhever jo eiernes interesse og ikke andre gruppers, slik som ansatte eller lokalsamfunnet. Spørsmålet er om man skal maksimere aksjonærverdier eller interessentverdier, de såkalte "shareholder value vs. stakeholder value".

1.3

1.3.1

Det kan vises at verdien V av et selskap uten gjeld er det samme som verdien til et selskap med gjeld, dvs. $V_L = V_U$, når det ikke er skatt i økonomien. Dette er Miller og Modiglianis proposisjon 1 for tilfellet uten skatt:

$$V = \frac{E(EBIT)}{r_T} = \frac{E(EBIT)}{r_U} \tag{1.9}$$

Her er r_T kapitalkostnaden for totalkapitalen og r_U er kapitalkostnaden for et selskap uten gjeld.

Selskapets verdi er gitt av (1.9). Vi trenger en beregning av overskudd før renter $EBIT$ og av kapitalkostnaden. Vi finner først $EBIT$.

Tabell 1.2 Beregning av overskudd før renter (EBIT)

Salgsinntekter	1500
Variable kostnader	-400
Faste betalbare kostnader	-200
Avskrivninger	-500
EBIT	400

Kapitalkostnaden er gitt i proposisjon av Miller og Modigliani. Kapitalkostnaden for egenkapitalen er altså:

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\,\frac{D}{E} \tag{1.10}$$

Når selskapet er gjeldfritt, kan r_U finnes fra kapitalverdimodellen:

$$r_U = r_f + (E\,(r_m) - r_f)\,\beta \tag{1.11}$$

Oppgaven gir opplysninger om at $\beta = 1.25$ når $D = 0.00$. Risikofri rente $r_f = 4.5\%$ og avkastningen på børsen $r_m = 12.5\%$. β er selskapets systematiske risiko.

Innsetting gir nå:

$$k = 4.5 + (12.5 - 4.5)1.25 = 14.50$$

målt i prosent. Vi har altså at $r_U = 14.50\%$.

Selskapets verdi er altså gitt av (1.9). Innsetting av $EBIT$ fra tabell 1.2 og kapitalkostnaden $r_U = 14.50\%$ gir nå selskapets verdi:

$$V = \frac{400}{0.145} = 2759$$

Vi har vist verdien for Dal. Siden selskapets verdi er uavhengig av kapitalstrukturen når det ikke er skatt, vil også Engs verdi være 2.759. Siden $EBIT$ er lik for de to selskapene, inntreffer dette når kapitalkostnadene er like, dvs. når $r_T = r_U$. La oss se nærmere på dette.

Totalkapitalens kostnad er gitt av

$$r_T = r_E\frac{E}{V} + r_D\frac{D}{V} \tag{1.12}$$

Vi finner da først r_E:

$$r_E = 14.5 + (14.5 - 6.0)\frac{0.50}{0.50} = 23.0$$

når gjeldsandelen er 50%. Innsetting i (1.12) gir da:

$$r_T = 23.0 \cdot 0.50 + 6.0 \cdot 0.50 = 14.50$$

Kapitalkostnaden er altså den samme som r_U, dvs. for selskapet uten gjeld. Dermed er også selskapets verdi den samme.

1.3.2

Vi antar nå at vi ikke kjenner verdien til Eng.

De to selskapene Dal og Eng er altså identiske på alle måter untatt når det gjelder deres kapitalstruktur. Dal har samlet egenkapital $E_U = 2.759$, og dette er jo lik verdien av selskapets eiendeler V_U. Eng har gjeld på 50% av selskapets verdi. Selskapets verdi er jo lik summen av gjeld og egenkapital: $E_L + D = V_L$.

Fjell vurderer å investere 10% i Dal eller Eng. I Dal vil han altså betale $0,1 \cdot E_U = 0,1 \cdot V_U$, og han vil motta 10% av selskapets overskudd, $EBIT$. Transaksjonene og betalingene er vist i tabell 1.3.

Tabell 1.3 Strategi 1: Kjøp 10% av Dal

Transaksjon	Investering	Del av overskudd
Kjøp 0.10 av 2,759 = Kjøp 0.10 av E_U	$0.10 \cdot 2,750 = 276$ $= 0.10 \cdot V_U$	$0.10 \cdot EBIT$

Fjell sammenligner strategien med en annen: Kjøp samme andel av selskapet Eng. Kall dette strategi 2. Renten på Engs gjeld r er 6.0%, og gjelden altså $D = 0.5 \times V_L$. Tabell 1.4 viser nå transaksjoner og betalinger.

Tabell 1.4 Strategi 2: Kjøp 10% av Eng

Transaksjon	Investering	Del av overskudd
Kjøp 0,10 av E_L	$0.10 \cdot E_L = 0.10 \cdot (V_L - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - 0.10 \cdot 0.50 \cdot V_L)$ $0.10 \cdot (EBIT - r_D)$

Investeringen er altså $0.10 \cdot E_L = 0.10 \cdot (V_L - D)$ siden $E_L = V_L - D$.

1.3.3

Nå prøver Fjell en tredje strategi. Han låner på egen hånd et beløp tilsvarende 10% av Engs lån til 6.00% rente, dvs. $0.1D$ til $r = 0.060$. Deretter bruker Fjell lånebeløpet og egne midler til å kjøpe 10% av Dal, $0.1V_U$. Strategien er vist i tabell 1.5.

Sammenlign nå strategiene 2 og 3. Vi legger merke til at Fjells andel av overskuddet er det samme i strategi 2 og 3, dvs. $0.10 \cdot (EBIT - rD)$. I strategi 2 mottar Fjell sin belønning som en kontantutbetaling på 10% av $(EBIT - rD)$, mens han i strategi 3 får den samme belønning, denne gangen som en kombinasjon av kontantutbetaling på $0.10 \cdot EBIT$ fra Dal minus rentebetalingen på egen hånd, $0.060 \cdot rD$. Nettoutbetalingene er i begge tilfeller den samme.

Tabell 1.5 Strategi 3: Kjøp 10% av Dal med lånte midler

Transaksjon	Investering	Del av overskudd
Lån $0.10D$	$-0.10D$	$-0.10rD$
Kjøp 0.10 av V_U	$0.10 \cdot V_U$	$0.10 \cdot EBIT$
Sum	$= 0.10 \cdot (V_U - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - rD)$

Investeringen ved hver strategi er satt opp i tabell 3.4.

Tabell 1.6 Kostnadene ved strategiene 2 og 3

Strategi 2	Strategi 3
$0.10 \times (V_L - D)$	$0.10 \times (V_U - D)$

Det viser seg altså at det eneste som skiller de to investeringene, er at V_U brukes i strategi 3 mens V_L er i strategi 2. Siden andelen av overskuddet er likt i de to strategiene, må også investeringene som skal til for å skaffe seg tilgang til overskuddene, være like. Det skjer bare når $V_U = V_L$. Altså: siden andelen av overskuddet er likt i de to strategiene må også investeringene være like. Det skjer når selskapenes verdi er like. Dette gir Modigliani and Miller (1958) første proposisjon.

1.4

En *kjøpsopsjon* er en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe et bestemt antall aksjer på et bestemt tidspunkt eller før, til en på forhånd avtalt pris (utøvelsesprisen).

Definisjon 1.1: Kjøpsopsjonen

1.4.1

Vi skal altså bruke den binomiske modellen. Forutsetningene for modellen er følgende:

1. Markedene er perfekte og komplette, dvs. det er ingen arbitrasjemuligheter og alle eiendeler prises. Videre: Ingen transaksjonskostnader, ingen krav til delinnbetaling og ingen skatter. Andeler av eiendeler kan kjøpes.
2. Hver periodes rente r_f og hver periodes positive endring u og negative endring d er kjent.

Vi kaller den positive endringen en oppbevegelse og den negative en nedbevegelse.

Den binomiske opsjonsformelen er dermed:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}c_{1,u} + \frac{u - r_f}{u-d}c_{1,d}\right] = \frac{1}{1+r_f}\left[qc_{1,u} + (1-q)c_{1,d}\right] \quad (1.13)$$

$C_{1,u}$ er kjøpsopsjonens verdi når prisen har gått opp (u), og ned (d) for $c_{1,d}$. u er den positive prisendringen, d den negative. Videre defineres

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u-d} \quad (1.14)$$

q omdanner de to mulige utfallene for opsjonens verdi i hakeparentesen i ligning (1.13) til en "sikkerhetsekvivalent" kontantstrøm. Siden forutsetning 2 gir at prisbevegelsene er faste i hver periode, er også q en fast størrelse uansett tallet på perioder.

1.4.2

I løpet av en periode kan altså aksjen stige til $100 \cdot 1.1 = 110$ eller falle til $100 \cdot 0.95 = 95$. Nå har vi at opsjonene er verdt i periode 1:

$$C_u = \max[100 \cdot 1.10 - 100.0] = 10.00$$

og

$$C_d = \max[100 \cdot 0.95 - 100.0] = 0.00$$

Innsetting i (1.13) gir dermed:

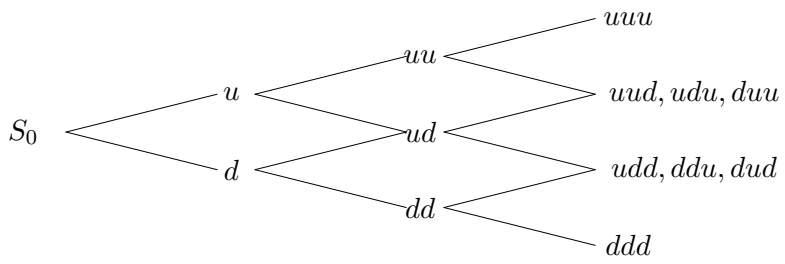
$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05 - (-0.05)}{0.10 - (-0.05)}10.00 + \frac{0.10 - 0.05}{0.10 - (-0.05)}0.00\right] \\ &= \frac{1}{1.05} \times \frac{0.10}{0.15}10.00 \\ &= 6.35 \end{aligned}$$

Prisen på kjøpsopsjonen i dag er altså 6.35.

1.4.3

Det er nå lettest å bruke den binomiske formelen med de sikkerhetsekvivalente sannsynlighetene q og $1 - q$. Først gir vi en oversikt over prisprosessen når vi har tre perioder. Hvor mange muligheter finnes for at aksjekursen

kan havne i en av de fire aksjekursene når $T = 3$? C_{uuu} og C_{ddd} kan opplagt bare realiseres på en måte, ved at det enten er bare oppganger eller bare nedganger. C_{uud} kan realiseres på tre måter: $uud = udu = duu$ og C_{udd} har også tre muligheter: $udd = ddu = dud$. Mulighetene er nå illustrert i figur 1.3.



Figur 1.3: Tallet på mulige opp- og nedganger i en binomisk prosess over tre perioder.

Analogt til opsjonsformelen for to perioder har vi altså:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^3}\left[q^3 C_{uuu} + 3q^2(1-q)C_{uud} + 3q(1-q)^2 C_{udd} + (1-q)^3 C_{ddd}\right] \tag{1.15}$$

Vi får altså nå et nytt ledd, siden aksjekursen jo kan bevege seg to ganger ned og en gang opp. Verdiene for opsjonen når $T = 3$ er nå:

$C_{uuu} =$	$\max[100 \cdot 1.10^3 - 100.0] =$	33.10
$C_{uud} =$	$\max[100 \cdot 1.10^2 \cdot 0.95 - 100.0] =$	14.95
$C_{udd} =$	$\max[100 \cdot 1.10 \cdot 0.95^2 - 100.0] =$	0.00
$C_{ddd} =$	$\max[100 \cdot 0.95^3 - 100.0] =$	0.00

Videre trenger vi verdiene for q og $1-q$. Det er enkelt å beregne at $q = 2/3$ og $(1-q) = 1/3$. Dermed har vi for de to positive verdiene C_{uuu}, C_{uud} fra formelen:

$$q^3 C_{uuu} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 33.10 = 9.81$$

$$3q^2(1-q)C_{uud} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} 14.95 = 6.64$$

Innsetting i (1.15) gir dermed:

$$C_0 = \frac{1}{1.05^3}\left[9.81 + 6.64\right] = 14.21$$

Opsjonsverdien øker tydelig med tiden til forfall.

1.4.4

Mens lenger tid til forfall gir flere sjanser til at opsjonen er ITM, gir høyere volatilitet større sjanser. Volatilitet betyr kursfluktuasjon. Jo høyere kursfluktuasjonene er, jo mer verdt vil en positiv endring være. Dermed er også opsjonen mer verdt. Grunnen er at verdier under innløsningskursen har verdi null, verdier over teller med hele sin verdi.

Kapittel 2

Kontinuasjonseksamen vår 2011

2.1

Nåverdien av en risikofri obligasjon med årlige renteutbetaliner er generelt:

$$PV = B = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{2.1}$$

der K er de årlige rentebetalinger og M er pålydende. r er markedsrenten og viser altså investorenes alternative investeringsmulighet. Vi kan forutsette risikofrihet siden dette er statsobligasjoner.

Den høyeste pris jeg ville betale er nåverdien av de fremtidige betalingene.

Tabell 2.1 Utregning av obligasjonens pris

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdi
1	5	0.9390	4.69
2	5	0.8817	4.41
3	5	0.8278	4.14
4	5	0.7773	3.89
5	5	0.7299	3.65
5	100	0.7299	72.99
Sum			93.77

KS er kontantstrøm. Rentefaktoren er definert som

$$\text{Rentefaktor} = R = \frac{1}{(1+r)^t} \tag{2.2}$$

Jeg ville altså betale maksimalt 93.77 for en obligasjon med de kjennetegn gitt i oppgaven.

2.1.1

Hvis markedsrenten var 5%, ville jeg være villig til å betale 100,00 for obligasjonen. Markedsrente og kupongrente vil nå være like. Den kupongrente som brukes for å skape rentekontantstrømmen i obligasjonen er altså den samme som brukes for å diskontere kontantstrømmen tilbake til dagens verdi. De to utligner hverandre og vi står tilbake med obligasjonens pålydende verdi, 100.00.

2.1.2

Når det ikke betales renter, har vi en nullkupongobligasjon, og dagens verdi er dermed:

$$PV = \frac{M}{(1+r)^T} \tag{2.3}$$

Spørsmålet er hva varigheten er for en slik obligasjon. *Macaulay's varighet* eller *durasjon* D kan generelt defineres på følgende måte:

$$\begin{aligned} D &= \left[\frac{1K}{(1+r)^1} + \frac{2K}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{TK}{(1+r)^T} + \frac{TM}{(1+r)^T} \right] \frac{1}{B} \\ &= \frac{1}{B} \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{tK}{(1+r)^t} + \frac{TM}{(1+r)^T} \right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

hvor vi skriver B (pris) i stedet for PV for å forenkle og for å understreke at dette er en markedspris. Nå faller altså alle K-leddene bort, dvs. vi står tilbake med:

$$D = \frac{1}{B} \frac{TM}{(1+r)^T}$$

men siden B for en nullkupong-obligasjon er definert ved:

$$B = \frac{M}{(1+r)^T}$$

ender det med at

$$D = T \tag{2.5}$$

for en nullkupongobligasjon. Varigheten øker altså med tid til forfall. Varigheten til vår obligasjon er dermed 5.

2.2

2.2.1

Først vises definisjonene av forventet avkastning og standardavvik for enkeltaksjene, og for korrelasjonskoeffisienten mellom dem.

Forventet avkastning er definert ved

$$E(r_j) = p_1 r_{j1} + p_2 r_{j2} + \ldots + p_n r_{jn} \tag{2.6}$$

der p_i er sannsynligheten for at tilstand i vil inntreffe, $i = 1, \ldots, n$.

Definisjonen på standardavvik er

$$\sigma_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \left(r_{ji} - E(r_j)\right)^2} \tag{2.7}$$

Korrelasjonskoeffisienten ρ_{12} er definert ved:

$$\text{Korrelasjonskoeffisient} = \frac{\text{Kovarians}}{\text{Standardavvik(1)} \times \text{Standardavvik(2)}}$$

eller i symboler

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Som det går frem av formlene, må vi gjennom beregning av kovariansen.

Beregning av forventning og varians til aksjene er gitt i tabellene nedenfor. Legg merke til at avkastningene er i prosentform.

Tabell 2.2 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 1

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Høy	0.2	-30	-6	-38	1444	288.8
Middels	0.5	10	5	2	4	2
Lav	0.3	30	9	22	484	145.2
		$E(r_1) =$	8		$\sigma_1^2 =$	436.0
					$\sigma_1 =$	20.9

Tabell 2.3 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 2

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Høy	0.2	10	2	5	25	5
Middels	0.5	15	7.5	10	100	50
Lav	0.3	-15	-4,5	-20	400	120
		$E(r_2) =$	5		$\sigma_2^2 =$	175
					$\sigma_2 =$	13.2

I tabellene til Prosjekt 1 og 2 er

$$\text{Avvik}_i = (\text{Avkastning}_i - \text{Forventet avkastning})$$

eller i symboler

$$\text{Avvik}_i = r_{1i} - E(r_1)$$

for aksje 1 og tilsvarende for aksje 2. Det gjenstår å understreke at i antyder hvilken tilstand man er i, slik at i tar en av verdiene (Høy, Middels, Lav)

Beregningen av kovarians er vist i tabell (2.4).

Tabell 2.4 Beregning av kovarians mellom aksje 1 og 2

Tilstand	Sanns.	Avv1	Avv2	Prod
Høy	0.2	-38	5	-38.0
Middels	0.5	2	10	10.0
Lav	0.3	22	15	-132.0
			$\sigma_{12} =$	-160.0

Korrelasjonen mellom aksjene er dermed:

$$\rho_{12} = \frac{-160}{20.9 \cdot 13.2} = -0.5792$$

2.2.2

Porteføljens varians σ_p^2 er gitt ved:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \tag{2.8}$$

der w er andelen av investeringen plassert i 1, $(1-w)$ er andelen av investeringen plassert i 2. Vi ønsker å minimere denne variansen og finne den såkalte minimum-varians-porteføljen (MVP). Vi kan gå frem på to måter:

1. Vi kan regne ut mange verdier av σ_p^2 for dermed å peile oss inn på den laveste verdien.

2. Vi kan derivere σ_p^2 med hensyn på w. Minimum vil finnes der hvor den deriverte er lik null.

Følger vi den første fremgangsmåten, må vi regne ut flere verdipar av avkastning og risiko for gitte porteføljevekter. Vi vet likevel at når $w = 1.0$, er $E(r_p) = 5.0$ og $\sigma_p = 13.2$, og når $w = 0.0$, er $E(r_p) = 8.0$ og $\sigma_p = 20.9$. Det gir oss to punkter. Det er også lett å finne et tredje punkt, som er gitt av den likeveide porteføljen, dvs. $w = (1-w) = 0.5$. Da har vi forventet avkastning:

$$E(r_p) = 0.5(8.0 + 5.0) = 6.5.$$

Risikoen har vi fra kvadratroten av (2.8):

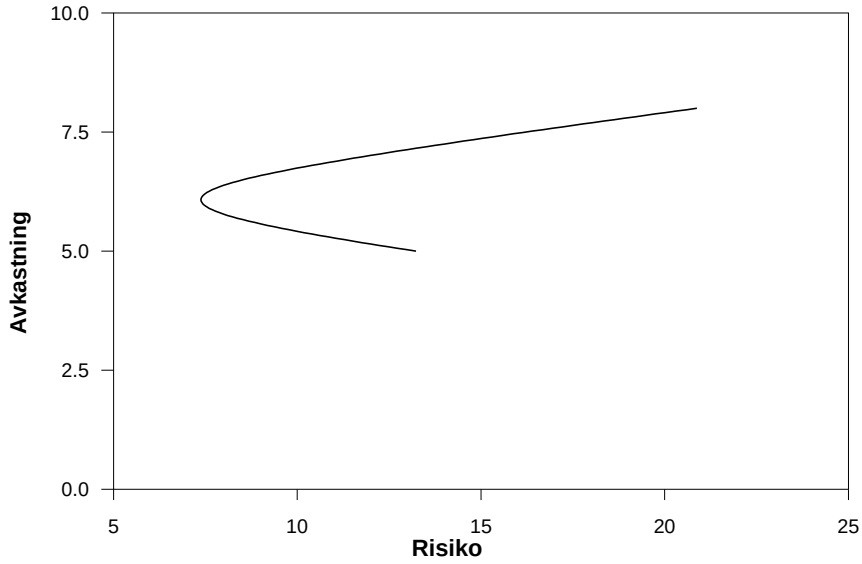
$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{0.5^2 \cdot 436 + 0.5^2 \cdot 175 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-160)} \\ &= 0.5\sqrt{436 + 175 - 320} = 0.5 \cdot 17.06 = 8.53\end{aligned}$$

I neste steg ville vi velge en $w > 0.50$ for å se om risikoen øker eller faller. Faller den, prøves en enda lavere w, øker den, prøves en høyere w. Slik kan vi etter hvert peile oss inn til MVP. Tar vi alle punkter for w fra 0.0 til 1.0, får vi en porteføljefront som er vist i figur 2.1:

La oss nå bruke analyse for å finne den porteføljevekten w som definerer MVP. Det er mest liketilt å gjøre dette med porteføljevariansen. Begynn med å skrive om uttrykket for variansen:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12} \\ &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w\sigma_{12} - 2w^2\sigma_{12}\end{aligned}$$

Her har vi altså brukt kovariansen i stedet for korrelasjonskoeffisienten. Den



Figur 2.1: Porteføljefronten for oppgave 2

deriverte av denne er

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w} &= 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 + 2\sigma_{12} - 4w\sigma_{12} = 0 | \frac{1}{2} \\ &= w\sigma_1^2 + w\sigma_2^2 - 2w\sigma_{12} = \sigma_2^2 - \sigma_{12}\end{aligned}$$

som impliserer at

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{2.9}$$

Bruker vi denne formelen i oppgaven, har vi at

$$w = \frac{175 - (-160)}{436 + 175 - 2(-160)} = 0.3598$$

Vi ville altså sette ca. 36% av formuen i aksje 1 og resten i aksje 2, hvis vi ønsket å oppnå MVP.

Det viser seg at porteføljens standardavvik i MVP er

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left(0.3598^2 \cdot 436 + (1-0.3598)^2 \cdot 175 + 2 \cdot 0.3598 \cdot (1-0.3598) \cdot (-160)\right)^{0.5} \\ &= (56.45 + 71.72 - 73.71)^{0.5} \\ &= (54.46)^{0.5} \\ &= 7.38\end{aligned}$$

Den lavest mulige porteføljevariansen er dermed 7.38.

2.2.3

Systematisk risiko er den delen av total risiko som investorene ikke kan fjerne ved å diversifisere sin portefølje. Risikoen er systematisk i den forstand at den berører hele økonomien. Ingen slipper unna. Den diversifiserbare risikoen kalles også for bedriftsspesifikk risiko.

Systematisk risiko er den relevante risiko i kapitalverdimodellen. Siden annen risiko kan diversifiseres, vil ikke investorene oppnå en kompensasjon for den bedriftsspesifikke risikoen de påtar seg.

Ønsker man å illustrere dette nærmere, kan figuren for sammenhengen mellom total risiko og antall eiendeler i porteføljen brukes. Videre kan det vises at den relevante risikoen for et prosjekt dreier seg om kovariansen mellom prosjektet og alle andre eiendeler i økonomien.

2.2.4

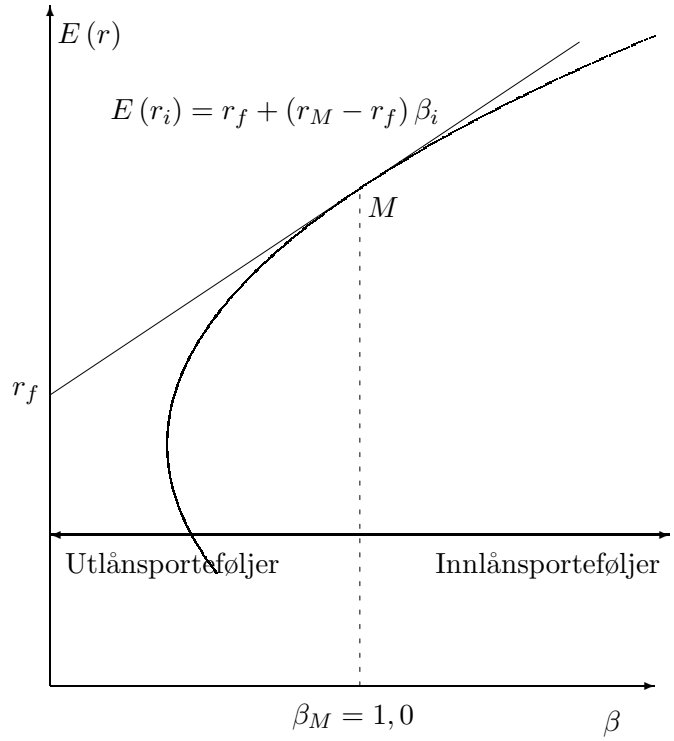
> *Polonius til sin sønn Laertes:*
>
> Neither a borrower nor a lender be,
> For loan oft loses both itself and friend,
> And borrowing dulls the edge of husbandry.
>
> Hamlet Act 1, scene 3

Polonius tror altså på KVM. Denne er illustrert i figur 2.2 som også viser effisiensgrensen for risikable eiendeler. KVM innebærer at markedslinjen vil tangere denne effisiensgrense og skape en ny effisiensgrense, en rett linje mellom den risikofrie avkastningen r_f og tangeringspunktet på effisiensgrensen M.

Polonius sitt råd er altså å tilpasse seg i M, her vil Laertes hverken låne penger til andre (til venstre for M) eller låne penger av andre (til høyre for M).

2.3

1. Hva er aksjekursen for de tre forslagene?
2. Hvilken utbyttepolitikk vil aksjonærene foretrekke?



Figur 2.2: Markedslinjen er effisiensgrense når en risikofri avkastning inkluderes

Oppgaven er en anvendelse av Miller og Modigliani's teori om at et selskaps dividendepolitikk ikke spiller noen rolle for selskapets verdi.

Det forutsettes at kapitalmarkedene er perfekte og at betalingsmåten ikke spiller noen rolle.

Rennren skaper altså en fri kontantstrøm (K) på 48 i overskuelig fremtid. Verdien av disse er da:

$$PV(K) = \frac{48}{0.12} = 400.00$$

Inkludert de 20 i ledig likviditet betyr dette at selskapet er verdt $EV = 420.00$, der EV er selskapsverdi eller "enterprise value".

2.3.1

Forslag 1: Utbytte

Hva er aksjekursen dersom den ledige likviditeten utbetales som utbytte?

Utbetalingen av 2.00 i ekstraordinært utbytte vil ikke gå ut over kapasiteten til å betale dividende i fremtiden. Med en årlig $K = 48$ betyr dette et utbytte pr. aksje på 4,80. Inkludert det ekstraordinære utbyttet er dermed aksjekursen:

$$\begin{aligned} S_{med} &= \text{Ekstraordinært utbytte} + PV(\text{Fremtidige utbytter}) \\ &= 2.00 + \frac{4.80}{0.12} = 42.00 \end{aligned}$$

S_{med} antyder at prisen i dag inkluderer det ekstraordinære utbyttet. Det er denne prisen som er relevant i sammenligningen med andre alternativer. Vi kan også beregne aksjekursen S_{ex} dagen etter utbetalt ekstraordinært utbytte. Den vil da selvsagt være $S_{ex} = 40.00$.

Forslag 2: Tilbakekjøp av aksjer

Hva om styret i stedet besluttet å bruke de ledige 20 til å kjøpe tilbake aksjer? Aksjekursen er altså 42.00, og man kan dermed kjøpe tilbake

$$\text{Tilbakekjøpte aksjer} = \frac{20.000.000}{42.00} = 476.190$$

Gjenværende aksjer i selskapet er altså nå 10 millioner fratrukket 476,190 som er 9,523,810. Det fremtidige utbyttet pr. aksje blir dermed:

$$\text{Utbytte pr. aksje} = \frac{48.00}{9.523810} = 5.04$$

som gir aksjekursen

$$S_{tilbakekjp} = \frac{5.04}{0.12} = 42.00$$

Tilbakekjøpet gir altså den samme aksjekursen før utdeling som et ordinært utbytte.

Forslag 3: Utstedelse og høyt utbytte

Fra neste år kan altså Rennren betale et utbytte på 4.80 pr. aksje. Hva om man ønsker å betale dette beløpet allerede i dag? Man mangler altså 28 millioner for å klare det. Disse kan hentes enten fra tilsvarende lavere investeringer eller fra innhenting av ny kapital. Investeringene har positiv netto nåverdi, må vi forutsette. De ligger bla. til grunn for antatte utbyttebetalinger. For ikke å ødelegge aksjonærverdier, må ny kapital hentes inn gjennom utstedelse av nye aksjer.

Med en aksjekurs på 42.00 kan Rennren selge

$$\text{Nyutstedte aksjer} = \frac{28,000,000}{42.00} = 666,667,$$

dvs. selskapet har nå 10,666,667 aksjer. Utbyttet på disse aksjene vil i fremtiden være

$$\text{Utbytte pr. aksje} = \frac{48.00}{10.666667} = 4.50$$

Aksjekursen vil nå være

$$S_{med} = 4.50 + \frac{4.50}{0.12} = 42.00$$

Igjen er virkningen på aksjekursen den samme som for de andre alternativene.

2.3.2

Hva vil aksjonærene foretrekke? Siden aksjekursen er den samme i dag uansett hvilket forslag man lander på, vil vi vente at investorene ikke bryr seg om hvilket forslag som velges. Vi kan sjekke om dette gjelder for aksjonærer med ulike preferanser.

Se først på forslag 1: Betal utbytte. Anta en aksjonær har 4000 aksjer og ikke handler i aksjen. Etter utbyttebetalingene vil vedkommende sitte igjen med

Aksjer	$40.00 \times 4,000 =$	160,000
Utbytte	$2.00 \times 4,000 =$	8,000
Til sammen		168,000

Velges tilbakekjøp, har investoren

$$\text{Aksjer} = 42.00 \times 4,000 = 168,000$$

Det samme beløpet vil fremkomme hvis man velger forslag 3. De tre forslagene er også på denne måten likeverdige.

Anta nå at en aksjonær foretrekker tilbakekjøp, men at forslag 1 er vedtatt. Aksjonæren kan da kjøpe nye aksjer for de 8,000 i utbytte. Det gir $8,000/40.00 = 200$ nye aksjer. Verdien av disse og de gamle er:

$$\text{Aksjer} = 40.00 \times 4,200 = 168,000$$

Antar vi i stedet at tilbakekjøp ble vedtatt, men at aksjonæren ønsker en kontantutbetaling på 4,000. Da må det selges $4,000/42.00 = 95.24$ aksjer. Vi runder av til 95, slik at investoren nå sitter igjen med 3,905 aksjer og en kontantbeholdning på 4,000. Verdien av dette er da:

Aksjer	$42.00 \times 3,905 =$	164,010
Kontanter	$42.00 \times 95.00 =$	3,990
Til sammen		168,000

Aksjonæren kan altså på egen hånd omgjøre enhver beslutning om utbytte eller tilbakekjøp til å passe med egne konsum- og spareplaner.

2.4

Oppgaven tester put-call-pariteten:

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f}X = P_0 + S_0 \tag{2.10}$$

2.4.1

Vi bruker altså diskret diskontering i (A.16), dvs. jeg bruker 1/1.10. Innsetting i (A.16) gir:

$$\begin{aligned} 1.00 + \frac{55.00}{1.10} &= 7.00 + 44.00 \\ 51.00 &= 51.00 \end{aligned}$$

Put-call-pariteten er altså oppfylt, og det finnes ingen handlestrategi som kan gi en risikofri arbitrasjegevinst.

2.4.2

Nå er $P_0 = 6.00$. Fra forrige deloppgave vet vi nå at pariteten ikke er oppfylt. Vi kan kjøpe den billige salgsopsjonen og en aksje i dag og finansiere med lån og utstedelse av en kjøpsopsjon. Vi har dermed situasjonen i tabell 2.5.

Tabell 2.5 Realisering av risikofri arbitrasjegevinst

Handlinger i dag $T = 0$	Betalinger
Kjøp aksje, betal S_0	-44.00
Kjøp salgsopsjon, betal P_0	-6.00
Utsted en kjøpsopsjon, motta C_0	1.00
Ta opp lån $X/1.1$	50.00
Samlet kontantstrøm $t = 0$	1.00

Arbitrasjegevinsten på 1.00 realiseres i dag. Samtidig sikrer (A.16) at kontantstrømmen ved forfall er lik null. Vi tjener penger i dag og betaler ikke noe ved forfall.

Kapittel 3

Eksamen 2011

3.1

3.1.1

Utgangspunktet er dividendemodellen som gir en kapitalkostnad som, med forbehold om konstant vekst i utbyttet, er:

$$r_E = \frac{Div_1}{S_0} + g \tag{3.1}$$

g er altså vekstraten i dividendeutbetalingene. I denne oppgaven er $g = 0$. Det viser seg at $g = (S_1 - S_0)/S_0$, eller at veksthastigheten i dividendeutbalingene er lik veksttakten i aksjens verdi.

Vi kan bruke eksemplet vårt med $g = 0\%$. Da er kapitalkostnaden:

$$r_E = \frac{8}{64} + 0.00 = 0.125$$

Kapitalkostnaden er altså 12.5%.

3.1.2

Vi skal finne dagens aksjekurs S_0. Fra (3.1) ser vi at kursen er:

$$S_0 = \frac{Div_1}{r_E - g} \tag{3.2}$$

Hva om dividenden er 4? Driftsresultatet kan deles ut til aksjonærene som utbytte eller det kan holdes tilbake i bedriften, dvs. det inngår i selskapets

egenkapital. **Utbytteandelen** er da årets utbytte pr. aksje delt på årets driftsresultat pr. aksje. Vi har altså:

$$\text{Utbytteandel} = \frac{Div_t}{EPS_t} \tag{3.3}$$

der

$$EPS_t = \frac{\text{Driftsresultat}_t}{\text{Antall aksjer}_t} \tag{3.4}$$

Resten av hver aksjes driftsresultatet er da **tilbakeholdsandelen**:

$$\text{Tilbakeholdsandel} = 1 - \text{Utbytteandel} = 1 - \frac{Div}{EPS} \tag{3.5}$$

Vi har da:

$$\text{Utbytteandel} = \frac{4}{8} = 0.50$$

som jo også er tilbakeholdsandelen.

Vi har videre at dersom selskapet velger å holde utbytteandelen fast på 50%, blir veksthastigheten i utbyttebetalingene g den samme som veksthastigheten i driftsresultatet. Det betyr altså at

$$g = \left(1 - \frac{Div}{EPS}\right) \times \text{Avkastning på ny investering} \tag{3.6}$$

I oppgaven:

$$g = 0.50 \cdot 0.15 = 0.075$$

Aksjekursen er da, når vi bruker (3.2):

$$S_0 = \frac{4}{0.125 - 0.075} = 80.00$$

Bedriften bør altså holde investeringsmidler tilbake og investere i virksomheten. Vi ser at dette er en enkel anvendelse av internrenteprinsippet. Siden internrenten på prosjektet (15%) er høyere enn eiernes kapitalkostnad (12.5%), bør bedriften investere i det gode prosjektet.

3.1.3

Vi bruker de samme formlene som i forrige delspørsmål, men har nå:

$g = 0.50 \cdot 0.10 = 0.05$

Aksjekursen er da, når vi bruker (3.2):

$$S_0 = \frac{4}{0.125 - 0.05} = 53.33$$

dvs. aksjekursen synker i forhold til utgangspunktet. Selskapet bør ikke investere, men heller betale hele driftsresultatet ut som utbytte. Eierne har bedre prosjekter enn det bedriften har.

3.2

3.2.1

Dette er Miller og Modigliani i et perfekt kapitalmarked. Dette inkluderer

1. Alle investorer har perfekt informasjon om markedsmulighetene.
2. Alle kan låne til samme rente for samme risiko.
3. Det er ingen transaksjonskostnader.
4. Alle selskapers egenkapital og gjeld er fritt omsettelige via aksjer og obligasjoner.

MM viser at:

> **PROPOSISJON 3.1** (MM 1 (Ingen skatter))**.** Verdien til et selskap uten gjeld er det samme som verdien til et selskap med gjeld, dvs. $V_U = V_L$, slik at $E_U = E_L + D$:
>
> $$V = \frac{E(EBIT)}{r_A} = \frac{E(EBIT)}{r_U} \tag{3.7}$$

Dette kan vises ved vurdering av tre strategier en investor I kan velge, investere i U eller L, eller investere i U med et eget privat lån. I er på utkikk etter arbitrasjemuligheter. Forutsett at I vurderer å investere 10% i U. Han vil altså betale $0.1 \cdot E_U = 0.1 \cdot V_U$, og han vil motta 10% av selskapets kontantstrøm, $EBIT$. Siden modellen ikke inkluderer skatter, og selskapene

lever evig, men har ingen vekst, er $EBIT$ det samme som kontantstrøm. Transaksjonene og betalingene er vist i tabell 3.1

Tabell 3.1 Strategi 1: Kjøp 10% av U

Transaksjon	Investering	Del av $EBIT$
Kjøp 0.10 av 500	$0.10 \cdot 500 = 50$	$0.10 \cdot EBIT$
$=$ Kjøp 0.10 av E_U	$= 0.10 \cdot V_U$	

I sammenligner strategien med en annen: Kjøp samme andel av selskapet L. Renten på Ls gjeld r_D er 5%, og gjelden altså $D = 250$. Tabell 3.2 viser nå transaksjoner og betalinger.

Tabell 3.2 Strategi 2: Kjøp 10% av L

Transaksjon	Investering	Del av $EBIT$
Kjøp 0.10 av E_L	$0.10 \cdot E_L = 0.10 \cdot (V_L - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - 0.05 \cdot 250)$
		$= 0.10 \cdot EBIT - 1.25$
		$= 0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$

I tabellen er $EBIT$ driftsresultat før renter, som altså er kontantstrømmen i dette tilfellet. Investeringen er altså $0.10 \cdot E_D = 0.10 \cdot (V_L - D)$ siden $E_D = V_L - D$.

Nå prøver I en tredje strategi. Han låner på egen hånd et beløp tilsvarende 10% av Ls lån til 5% rente, dvs. $0.1D$ til $r_D = 0.05$. Lånerenten er altså i oppgaven forutsatt å være lik for bedrifter og investorer, og utlånsrenten er den samme som innlånsrente. Deretter bruker I lånebeløpet og egne midler til å kjøpe 10% av U, $0.1V_U$. Strategien er vist i tabell 3.3.

Tabell 3.3 Strategi 3: Kjøp 10% av U med lånte midler

Transaksjon	Investering	Del av $EBIT$
Lån $0.10D$	$-0.10D$	$-0.10 \cdot r_D D$
		$=-0.10 \cdot 0.05 \cdot 250 = -1.25$
Kjøp 0.10 av V_U	$0.10 \cdot V_U$	$0.10 \cdot EBIT$
Sum	$= 0.10 \cdot (V_U - D)$	$0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$

Sammenlign nå strategiene 2 og 3. Investering og kontantstrøm ved hver strategi er satt opp i tabell 3.4.

Vi legger merke til at Is andel av kontantstrømmen er det samme i strategi 2 og 3, dvs. $0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$. I strategi 2 mottar I sin belønning som en kontantutbetaling på 10% av $(EBIT - r_D D)$, mens han i strategi 3 får den samme belønning, denne gangen som en kombinasjon av kontantutbetaling på $0.10 \cdot EBIT$ fra U minus rentebetalingen på egen hånd, $0.10 \cdot r_D D$. Nettoutbetalingene er i begge tilfeller den samme.

Tabell 3.4 Kostnadene ved strategiene 2 og 3

	Strategi 2	Strategi 3
Investering	$0.10 \times (V_L - D)$	$0.10 \times (V_U - D)$
Kontantstrøm	$0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$	$0.10 \cdot (EBIT - r_D D)$

Det viser seg altså at det eneste som skiller de to investeringene, er at V_U brukes i strategi 3 mens V_L er i strategi 2. Siden kontantstrømmene er like for I i de to strategiene, må også investeringene som skal til for å skaffe seg tilgang til kontantstrømmene, være like etter loven om en pris. Det skjer bare når $V_U = V_L$. Altså: Siden andelen av overskuddet i de to bedriftene gir en lik kontanstrølm for investoren i de to strategiene må også investeringene være like. Det skjer når selskapenes verdi er like. Dette gir Modigliani and Miller (1958, 1963) første proposisjon, se deres oppsummering i proposisjon 3.1.

3.3

3.3.1

3.3.2 Totalkapitalmetoden

Metoden går i korthet ut på å diskontere (forventede) frie kontantstrømmer K_t i alle perioder med kravet til avkastning for totalkapitalen. Vi har dermed generelt verdien av de gjenværende kontantstrømmer ved prosjektets begynnelse:

$$V_0^L = \sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1 + r_{wacc})^t} \tag{3.8}$$

Kapitalkostnaden r_{wacc} er definert som

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + (1 - \tau_c) \frac{D}{E+D} r_D \tag{3.9}$$

Egenkapitalen E og gjelden D begge er markedsverdier. r_{wacc} er altså en veid sum av kravene til avkastning fra de to hovedinvestorene i selskapet, eierne og långiverne. Ut fra tallene i oppgaven er dermed kapitalkostnaden:

$$r_{wacc} = \frac{800}{1300} \cdot 10.00 + 0.72 \cdot \frac{500}{1300} \cdot 5.00 = 7.54$$

Fri kontantstrøm K_t er beregnet i tabell 3.5.

Tabell 3.5 Beregning av fri kontantstrøm for prosjekt K etter totalkapitalmetoden

	0	1	2	3	4
Salg		90.00	112.50	123.75	136.13
Solgte varers kostnad		-22.50	-28.13	-30.94	-34.03
Bruttofortjeneste		67.50	84.38	92.81	102.09
Driftsutgifter		-36.00	-45.00	-49.50	-54.45
Avskrivning		-20.00	-20.00	-20.00	-20.00
EBIT		11.50	19.38	23.31	27.64
Bedriftsskatt 28%		-3.22	-5.43	-6.53	-7.74
EBT		8.28	13.95	16.79	19.90
Avskrivning		20.00	20.00	20.00	20.00
Investeringer	-80.00				
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Fri kontantstrøm	-80.00	28.28	33.95	36.79	39.90

Innsetting i (3.8) gir prosjektverdien:

$$V_0^L = \frac{28.28}{1.0754} + \frac{33.95}{1.0754^2} + \frac{36.79}{1.0754^3} + \frac{39.90}{1.0754^4} = \underline{115.07}$$

Verdien av de fremtidige kontantstrømmene V_0^L er altså 115.07. Selskapet bør gjennomføre prosjektet siden $NNV = 115.07 - 80.00 = 35.07 > 0$.

Totalkapitalmetoden bygger på to viktige forutsetninger:

- Gjeldsandelen holdes fast over prosjektets levetid.
- Risikoen i prosjektet er på linje med risikoen til selskapet som helhet.

3.3.3 Justert nåverdi

Justert nåverdi (JNV) deler opp fordelene ved investeringen og finansiering hver for seg:

$$JNV = V^U + NV(\text{Renteskattefordel}) \tag{3.10}$$

Rentekattefordelen defineres i MM-modellene som $\tau_c \cdot D$, men her kreves en modifisering fordi selskapets absolutte gjeld ikke er konstant over prosjektets levetid.

Diskonter den frie kontantstrømmen med kapitalkostnaden til et gjeldfritt selskap. Dette er jo det samme som r_{wacc} uten skattejustering, dvs:

$$r_U = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D = r_{wacc} \text{ før skatt} \tag{3.11}$$

Dette er også det samme som avkastningskravet til prosjektets eiendeler, eller prosjektets forretningsrisiko. Dermed:

$$r_U = \frac{800}{1300} \cdot 10 + \frac{500}{1300} \cdot 5 = 8.08$$

Investeringsdelen til prosjektet har dermed verdien

$$V_U = \frac{28.28}{1.0808^1} + \frac{33.95}{1.0808^2} + \frac{36.79}{1.0808^3} + \frac{39.90}{1.0808^4} = 113.62$$

Vi må også finne nåverdien av renteskattefordelen. Rentene er selvsagt gitt av

$$\text{Renter betalt i år } t = r_D \cdot D_{t-1} \tag{3.12}$$

hvor gjeldskapasiteten D_t er definert ved

$$D_t = d \cdot V_t^L \tag{3.13}$$

Her er d målsettingen om gjeldsandel og V_t^L er prosjektets gjenværende nåverdi på tidspunkt t. Man kan tenke på V_t^L som prosjektets salgsverdi på tidspunkt t. Vi har funnet at $V_0^L = 115,07$. Vi må også finne V_t^L på de andre tidspunktene i prosjektets levetid. Prosjektets gjenværende nåverdi på hvert tidspunkt t kan ta utgangspunkt i siste året og arbeide seg fremover. Den neddiskonterte verdien i hver periode må jo være lik neste periodens kontantstrøm og V_t^L:

$$V_t^L = \frac{K_{t+1} + V_{t+1}^L}{1 + r_{wacc}} \tag{3.14}$$

Den målsatte gjeldskapasiteten:

$$d = \frac{500}{1300} = 0.38$$

Dermed:

Dermed er prosjektverdien vurdert ved hjelp av JNV:

$$V^L = V^U + NV(\text{Renteskattefordel}) = 113.62 + 1.45 = 115.07$$

altså det samme som ved totalkapitalmetoden.

Tabell 3.6 Gjeldskapsitet og renteskattefordel i Auk gitt målsetting om 5/13 gjeldsandel

	0	1	2	3	4
Fri kontantstrøm	-80.00	28.28	33.95	36.79	39.90
Gjenværende verdi	115.07	95.46	68.71	37.11	0.00
Gjeldskapasitet	44.26	36.72	26.43	14.27	0.00
Renter 5%		2.21	1.84	1.32	0.71
Skattefordel		0.62	0.51	0.37	0.20
NV(skattefordel)	1.45				

3.3.4 Egenkapitalmetoden

Egenkapitalmetoden går ut på å se prosjektverdien utelukkende fra eiernes ståsted. Analysen må derfor ta utgangspunkt i den *frie kontantstrømmen til eierne* KE. Første steg er da å modifisere beregningen av kontantstrøm i tabell 3.5 og sette opp en ny kontantstrømsberegning, se tabell 3.7. Beregningen er lik til og med $EBIT$-linjen.

Tabell 3.7 Beregning av fri kontantstrøm for eierne i Auk

	0	1	2	3	4
EBIT		11.50	19.38	23.31	27.64
Renteutgifter		-2.21	-1.84	-1.32	-0.71
Driftsresultat før skatt		9.29	17.54	21.99	26.93
Bedriftsskatt 28%		-2.60	-4.91	-6.16	-7.54
Driftsresultat		6.69	12.63	15.83	19.39
Avskrivning		20.00	20.00	20.00	20.00
Investeringer	-80.00				
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Endring i lån	44.26	-7.54	-10.29	-12.16	-14.27
Fri kontantstrøm til eierne	-35.74	19.15	22.34	23.68	25.12

Vi ser at den frie kontantstrømmen til eierne modifiserer temmelig kraftig den frie kontantstrømmen for alle investorer. Dette skyldes to effekter. Den første er at prosjektets renteutgifter er trukket fra $EBIT$ før skatteberegningen. Den andre effekten er at lånets kontantstrøm innarbeides. Den frie kontantstrøm til eierne er dermed de penger eierne sitter igjen med etter at renter og avdrag på lån samt andre kostnader er trukket fra driftsinntektene.

Beregningen av størrelsen på lån og avdrag er hentet fra beregningen av lånekapasitet i tabell 3.6. Avdraget bestemmes av

$$\text{Opplåning i periode } t = D_t - D_{t-1} \tag{3.15}$$

Fri kontantstrøm til eierne for hver periode kan finnes direkte fra sammenhengen

$$KE = K - (1 - \tau_c)\,(\text{Rentebetalinger}) + (\text{Opplåning}). \tag{3.16}$$

Tabell 3.8 viser utregningene.

Tabell 3.8 Utregning av fri kontantstrøm til eierne basert på (3.16)

	0	1	2	3	4
Fri kontantstrøm	-80.00	28.28	33.95	36.79	39.90
Renteutgifter etter skatt		-1.59	-1.32	-0.95	-0.51
Endring i lån	44.26	-7.54	-10.29	-12.16	-14.27
Fri kontantstrøm til eierne	-35.74	19.15	22.34	23.68	25.12

Siden vi nå har fri kontantstrøm til eierne, må man bruke eiernes kapitalkostnad i beregning av gjenværende verdi og netto nåverdi. Netto nåverdi er altså gitt av

$$NNV(KE) = KE_0 + \frac{KE_1}{(1+r_E)} + \frac{KE_2}{(1+r_E)^2} + \frac{KE_3}{(1+r_E)^3} + \frac{KE_4}{(1+r_E)^4} \tag{3.17}$$

Netto nåverdi i Sletten AS er dermed:

$$NNV(KE) = -35.74 + \frac{19.15}{1.10} + \frac{22.34}{1.10^2} + \frac{23.68}{1.10^3} + \frac{25.12}{1.10^4} = 35.07$$

Netto nåverdi er altså belønningen til eierne for det nye prosjektet. Denne netto nåverdien er den samme som vi fant i totalkapital- og JNV-metoden.

3.3.5

Hva om prosjekt N gjennomføres? Vi trenger nå å beregne r_{wacc} på nytt. Vi har altså at $r_E = 12\%$ i bransjen, men at kapitalstrukturen er helt annerledes enn for Auk. Vi kan da bruke (3.11) til å utlede hva som er kapitalkostnaden for et selskap uten gjeld. Deretter kan vi finne kapitalkostnaden for egenkapitalen og til slutt for totalkapitalen. Det neste steget er å finne egenkapitalkostnaden for et ugiret selskap. I et perfekt kapitalmarked har vi at denne er gitt av sammenhengen

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\,\frac{D}{E} \tag{3.18}$$

Dermed er den nye egenkapitalkostnaden for prosjekt N:

$$r_E = 12.00 + (12.00 - 6.00)\frac{5}{8} = 15.75$$

Da er r_{wacc}:

$$r_{wacc} = 15.75 \cdot \frac{8}{13} + 6.00 \cdot 0.72 \cdot \frac{5}{13} = 11.35$$

Til slutt velger vi å finne nåverdien til prosjektet N:

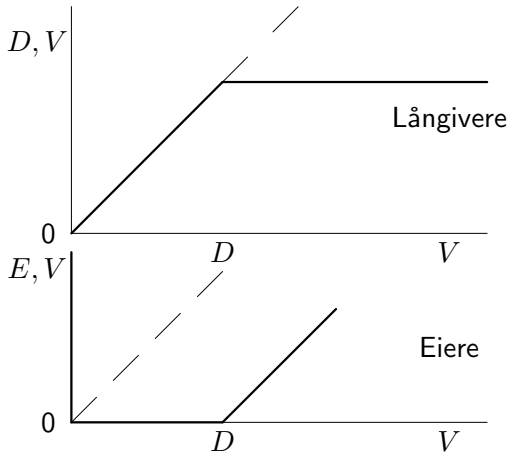
$$NNV = -80.00 + \frac{28.28}{1.1135} + \frac{33.95}{1.1135^2} + \frac{36.79}{1.1135^3} + \frac{39.90}{1.1135^4} = \underline{25.37}$$

Den nye netto nåverdien er altså 25.37.

3.4

3.4.1

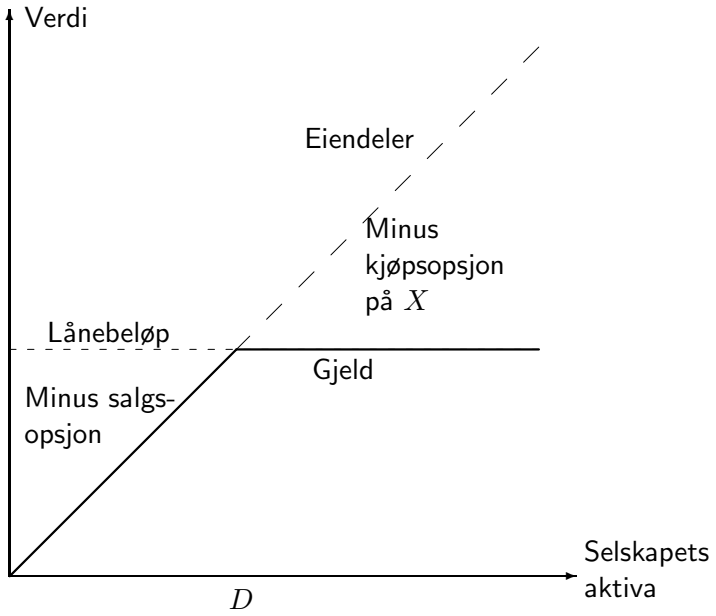
Her har vi brukt fotskriften E for å antyde at utbetalingen kommer til eierne. Den forventede verdien av B er høyere enn for A, og eieren vil foretrekke dette prosjektet. *Den relativt risikable investeringen har dermed en tendens til å bli valgt fremfor den relativt sikre når investeringen er lånefinansiert.* Dette er jo overinvesteringsproblemet. Vi kan illustrere dette i våre avkastningsdiagram.



Figur 3.1: Gevinstprofil for långivere og eiere

Legg merke til at gevinstprofilen ikke er tegnet som vanlig, men starter i null. Selskapets gjeld D er nå utøvelseskurs. På den vertikale aksen finner vi selskapets finansielle forpliktelser. Når selskapet tar opp et lån til finansiering, gir dette opphav til to opsjoner, begge med utøvelseskurs på D. Utseende til långivernes gevinstprofil er den samme som for en utstedelse av en salgsopsjon, mens eierne har en "kjøpsopsjon" på kontantstrømmen.

Man kan også tenke på selskapets gjeld som en portefølje der långiverne eier selskapet, men har utstedt en kjøpsopsjon til eierne med en utøvelsespris lik lånebeløpet. Hvis verdien av selskapet overstiger gjelden, vil eierne bruke sin kjøpsopsjon og innløse gjelden. Er gjelden høyest, utøves opsjonen ikke og långiverne tar over restene av eiendelene. At kjøpsopsjonen ikke utøves betyr i denne sammenhengen at eierne erklærer konkurs. Denne varianten er illustrert i figur 3.2 sammen med en annen variant som straks forklares.



Figur 3.2: Gjeld er en portefølje av å eie selskapets aktiva og utstede en kjøpsopsjon på selskapets eiendeler, eller: Gjeld er portefølje av et risikofritt lån og utstedelse av en salgsopsjon på selskapets eiendeler

Gjelden kan oppfattes på enda en måte. Den kan være en portefølje av risikofri gjeld og en kort posisjon i en salgsopsjon på selskapets aktiva med en utøvelsespris lik kravet til tilbakebetaling:

$$\text{Risikabel gjeld} = \text{Risikofri gjeld} - \text{Salgsopsjon på selskapets aktiva} \quad (3.19)$$

Når selskapets verdi er lavere enn kravet til tilbakebetaling, er salgsoppsjonen "in-the-money" og opsjonen utøves. Långiverne overtar eiendelene i selskapet og taper altså verdien av det risikofrie lånet minus verdien av selskapets aktiva. Er selskapets verdi høyere enn utestående gjeld, blir salgsopsjonen liggende og långiverne mottar kravet til tilbakebetaling. Dette er også illustrert i figur 3.2. Å gå konkurs betyr altså i dette tilfellet at eierne utøver salgsopsjonen om ikke å tilbakebetale all gjeld.

3.4.2

Overinvesteringsproblemet oppstår når selskapet har høy gjeld. Selskapet kan ha prosjekter som gjør det fristende å "vedde selskapet". Man kan tenke seg to prosjekter, et risikabelt og et sikkert:

Risikabelt prosjekt Forventet netto nåverdi er negativ eller svært lav. I en gunstig, men lite sannsynlig tilstand kan utbetalingen til selskapet bli høyt. Gjelden kan dekkes og selskapet oppnår positiv egenkapital. Hvis en ugunstig tilstand inntreffer, taper eierne alt og långiverne får bare delvis betalt.

Sikkert prosjekt Forventet netto nåverdi er positiv men lav. I både gunstige og ugunstige utfall får långiverne dekket sine tilgodehavender helt eller delvis, mens eierne ikke får noe.

I en slik situasjon kan det være fristende for eierne å velge det risikable prosjektet, selv om det etter vanlige prosjektvalgsregler ikke skulle bli valgt. Man investerer altså i et prosjekt som skulle blitt valgt bort.

3.5

3.5.1

Gjelden D er lik en portefølje bestående av lang posisjon i foretakets aktiva A og en kort i dets egenkapital E, dvs. $D = A - E$. Gjeldsbetaen er derfor en veid sum av betaene til disse to elementene:

$$\beta_D = \frac{A}{D}\beta_U - \frac{E}{D}\beta_E$$

hvor

$$\beta_E = \frac{A\Delta}{A\Delta + B}\beta_U = \frac{(E+D)\Delta}{E}\beta_U = \Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)\beta_U \tag{3.20}$$

og

$$\Delta = \mathcal{N}(d_1) = \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{3.21}$$

Her er symbolene hentet fra Black-Scholes-Merton (BSM) sin modell for aksjekurser. S_0 er aksjekurs på tidspunkt 0, X er opsjonens utøvelseskurs, r_f er risikofri rente, σ er volatilitet eller flyktighet, og T er tid til forfall i hele år. $\mathcal{N}(\cdot)$ er sannsynlighetssummen under den normaliserte normalfordeling opp til tallet d_1. Utøvelseskurs her er gjeldens pålydende, og aksjekursen er

verdien av selskapets aktiva. Kjøpsopsjonen egenkapital er dermed skrevet på de underliggende aktiva A.

Vi bruker resultatet fra (A.20) og oppnår et uttrykk for gjeldsbeta som en funksjon av beta til aktiva:

$$\beta_D = (1-\Delta)\frac{A}{D}\beta_U = (1-\Delta)\left(1+\frac{E}{D}\right)\beta_U \tag{3.22}$$

Gjelden er risikofri når $\Delta = 1$ og $\beta_D = 0$.

Både i uttrykket for egenkapitalens beta i (A.20) og for gjeldens beta i (A.21) inngår aktivas beta β_U, som altså er den samme som EK-beta i et ugiret firma. Vi kan bruke (A.20) til å finne et uttrykk for betaen i et ugiret selskap:

$$\beta_U = \frac{\beta_E}{\Delta\left(1+\frac{D}{E}\right)} \tag{3.23}$$

Dette uttrykket gir altså foretakets ugirede beta.

Det første steget til å finne gjeldens beta er altså å finne foretakets ugirede beta fra (A.22). Vi kan tenke på egenkapitalen i selskapet som en tre-årig kjøpsopsjon med utøvelsespris lik den nominelle gjelden på 100. Markedsverdien av selskapet er dermed $50.00 + 60.00 = 110.00$. Vi kan nå finne Δ:

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathcal{N}(d_1) = \mathcal{N}\left(\frac{\ln(110/100) + \left(0.05 + 0.5\cdot 0.30^2\right)\cdot 3}{0.30\sqrt{3}}\right) \\ &= \mathcal{N}(0.731907) = 0.767887\end{aligned}$$

Innsatt i (A.22) gir dette den ugirede beta for selskapet:

$$\beta_U = \frac{1.40}{0.768\left(1+\frac{60}{50}\right)} = 0.82872$$

Vi bruker denne i (A.21) og får beta til gjelden:

$$\beta_D = (1-0.768)\left(1+\frac{50}{60}\right)\cdot 0.829 = 0.35$$

Beta til gjelden er altså $\underline{0.35}$.

3.5.2

Det kan vises at investeringskriteriet er at

$$\frac{NNV}{I} > \frac{\beta_D}{\beta_E}\frac{D}{E} \tag{3.24}$$

Den venstre siden i (3.24) er nåverdibrøken. Den høyre siden er forholdet mellom gjelds- og EK-betaen ganget med gjeldsgraden.

Vi setter inn direkte i (3.24):

$$\frac{NNV}{I} > \frac{0.35}{1.40}\frac{60}{50} = 0.30$$

Investeringen må altså skape en NNV som er drøyt 30% av investeringsverdien. Netto nåverdi er altså i oppgaven oppgitt til 10 og investeringen 15, slik at $NNV/I = 10/15 = 0,67 > 0,30$. Investeringen er altså høyt over kravet til investering fra nåverdibrøken og investeringen kan dermed gjennomføres.

Kapittel 4

Kontinuasjonseksamen våren 2012

4.1

Etter loven om en pris, må prisen på obligasjonen være lik verdien av den neddiskonterte kontantstrømmen til obligasjonen. Vi har da at obligasjonens pris B er gitt av:

$$B = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{4.1}$$

Beregningen av verdi er vist i tabell 4.1.

Tabell 4.1 Beregning av forventet markedspris og durasjon på obligasjon A: Pålydende 1.000, kupongrente 5% betales en gang i året, markedsrente 6%

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdier	$t \times KS$
1	50	0.9434	47.17	47.17
2	50	0.8900	44.50	89.00
3	50	0.8396	41.98	125.94
4	50	0.7921	39.60	158.42
5	50	0.7473	37.36	186.81
5	1000	0.7473	747.26	3736.29
Markedspris			957.88	
Sum $t \times KS$				4343.64
Durasjon				4.53

Det viser seg altså at markedsprisen er 957.88.

4.1.1

Durasjonen, eller varigheten kan enkelt defineres som obligasjonens gjennomsnittlige tid til forfall. Den kalles ofte for *Macaulay's varighet* eller *durasjon* D etter opphavsmannen. Formelen for durasjonen er gitt av

$$\begin{aligned} D &= \left[\frac{1K}{(1+r)^1} + \frac{2K}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{TK}{(1+r)^T} + \frac{TM}{(1+r)^T} \right] \frac{1}{B} \\ &= \frac{1}{B} \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{tK}{(1+r)^t} + \frac{TM}{(1+r)^T} \right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Utregningen av durasjonen etter denne formelen er vist i kolonnen helt til høyre i tabell 4.1. Obligasjonens durasjon er altså 4.53.

En viktig tolkning av varighet er altså at den viser den gjennomsnittlige tid til forfall for obligasjonen, der årets kontantstrøm viser hvilken vekt hvert enkelt år har. Definer hvert ledd i kontantstrømmen sin nåverdi med $PV\left(K_t\right) = K/(1+r)^t$. Ved å dele denne nåverdien på obligasjonens pris, B, har vi altså hvert års *nåverdivekt*, $PV\left(K_t\right)/B$ i obligasjonens pris. Multipliser deretter hvert års vekt ledd med årstallet da det forekommer. Dermed kommer (4.2) på en ny form:

$$D = \frac{1 \times PV\left(K_1\right)}{B} + \frac{2 \times PV\left(K_2\right)}{B} + \ldots + \frac{T \times PV\left(K_T\right)}{B} + \frac{T \times PV\left(M_T\right)}{B} \tag{4.3}$$

Durasjonen er altså summen av hvert års nåverdivekt ganget med årstallet. Denne formen er også anvendelig i praktiske utregninger. Tabell 4.2 viser utregning av durasjonen på denne måten.

4.1.2

Det kan vises at obligasjonens relative *kursfølsomhet* eller *volatilitet* overfor renteendringer kan skrives

$$\frac{\partial B}{\partial r}\frac{1}{B} = \frac{-1}{(1+r)}D \tag{4.4}$$

Tabell 4.2 Alternativ beregning av obligasjon A's durasjon som gjennomsnittlig tid til forfall

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdier	Andel pris	Dura-sjon
1	50	0.9434	47.17	0.05	0.05
2	50	0.8900	44.50	0.05	0.09
3	50	0.8396	41.98	0.04	0.13
4	50	0.7921	39.60	0.04	0.17
5	50	0.7473	37.36	0.04	0.20
5	1000	0.7473	747.26	0.78	3.90
Markedspris			957.88	1.00	
Durasjon					4.53

I praktiske anvendelser brukes gjerne differanseuttrykket d i stedet for den deriverte ∂. Fra (4.4) har vi:

$$\frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = -\frac{1}{1+r}D \tag{4.5}$$

Den skrives gjerne uten det negative fortegnet. I oppgaven er dermed volatiliteten:

$$\text{Volatilitet} = \frac{dB}{dr}\frac{1}{B} = \frac{4.53}{1.06} = 4.27$$

En manipulering av (4.5) gir obligasjonens omtrentlige prosentvise prisendring:

$$\frac{dB}{B} = -\frac{D}{1+r}dr = -\text{Volatilitet} \times \text{Renteendring} \tag{4.6}$$

Vi kan altså nå besvare spørsmålet i oppgaven. Rentenivået øker til 7.0%, dvs. $dr = 0.01$. Da har vi den relative endringen i obligasjonens pris:

$$\frac{dB}{B} = -4.27 \times (0.01) = -0.0427$$

og den nye prisen ventes å være

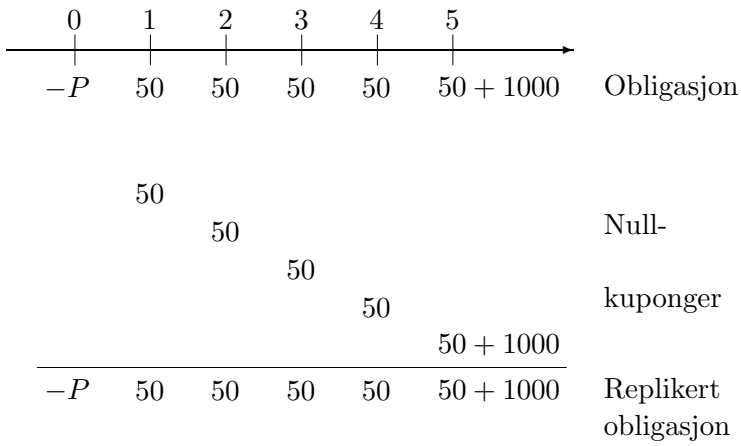
$$B_{\text{ny}} = 957.88(1 - 0.0427) = 916.94.$$

Man vil vente at den nye prisen er 916.94. Alternativt kan man gjøre samme beregning som i første delspørsmål. Verdien på obligasjonen er ved en slik beregning 918.00. Dette er rimelig. Når diskonteringssatsen øker, faller verdien på obligasjonen.

4.1.3

I et arbitrasjefritt marked kan verdien av obligasjonen med kjennetegn slik som ovenfor også finnes ved hjelp av et sett av *nullkupongobligasjoner*, dvs. obligasjoner som ikke utbetaler kupongrente i løpet av tiden til forfall. En vanlig obligasjon kan sees på som et sett av nullkupongobligasjoner, eventuelt, vi kan "strippe" en vanlig obligasjon for kupongbetalinger og oppnå et sett av nullkupongobligasjoner. Når obligasjonene har samme risiko, kan settet av nullkupongobligasjoner brukes til å prise obligasjonen. Nullkupongene *replikerer* kontantstrømmen til den opprinnelige obligasjonen.

Vi kan vise at settet, eller porteføljen, av nullkupongobligasjoner har samme kontantstrøm som den femårige obligasjonen i figur 4.1.



Figur 4.1: Kontantstrømmene til en obligasjon kjøpt ved utstedelse, som gir kupongrente en gang i året og som holdes til forfall

I et arbitrasjefritt marked vil altså *porteføljen* av nullkupongobligasjoner som replikerer kontantstrømmen til en obligasjon nødvendigvis ha samme verdi som obligasjonen selv. Kontantstrømmene er jo de samme, da må også verdiene være like. Hvis porteføljen har en verdi som re forskjellig fra obligasjonen, vil man kunne tjene en arbitrasjefri gevinst. Er portføljen mer verdt, kan man gjøre en risikofri fortjeneste ved å selge obligajsonen og kjøpe nullkupongobligasjoner. Motsatt hvis prisen på porteføljen er lavere.

4.2

4.2.1

Avkastningen på en aksje over flere perioder beregnes i finans ved to metoder, enten det aritmetiske eller det geometriske gjennomsnittet. Det aritmetiske gjennomsnittet $r_k(A)$ er

$$r_k(A) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t \tag{4.7}$$

Det geometriske gjennomsnittet $r_k(G)$ beregnes ved å finne den k'te roten av bruttoavkastningen over k perioder, dvs.

$$r_k(G) = \left(\frac{S_t}{S_{t-k}}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \tag{4.8}$$

En annen måte å regne ut det geometriske gjennomsnittet er gitt av

$$r_k(G) = \left[(1+r_1)\,(1+r_2)\,(1+r_3)\ldots(1+r_k)\right]^{\frac{1}{k}} - 1 \tag{4.9}$$

Tabell 4.3 viser utregningene av avkastningene med de to metodene.

Tabell 4.3 Beregning av aritmetisk gjennomsnitt og geometrisk gjennomsnitt. Det geometriske er beregnet med metodene vist i henholdsvis (4.8) og (4.9).

		Arit-		
Periode	Kurs	metrisk	Geometrisk	
1	1720			
2	1700	-0.0116	-0.0116	0.9884
3	1680	-0.0118	-0.0117	0.9882
4	1750	0.0417	0.0058	1.0417
5	1720	-0.0171	0.0000	0.9829
6	1740	0.0116	0.0023	1.0116
7	1740	0.0000	0.0019	1.0000
8	1750	0.0057	0.0025	1.0057
9	1740	-0.0057	0.0014	0.9943
10	1770	0.0172	0.0032	1.0172
Aritm. gjsn		0.0033		
Geom. gjsn			0.0032	0.0032

Det viser seg altså at det aritmetiske gjennomsnittet viser 0.33%, mens det geometriske er 0.32%.

4.2.2

Dette er et spørsmål om hvilket gjennomsnitt som er mest rimelig å bruke i fremtiden. Det aritmetiske gjennomsnittet viser gjennomsnittet av avkastningene i hver delperiode. Det geometriske viser avkastningen for en investering som starter i periode 1 og ender i periode k. Det er derfor mest rimelig å bruke det aritmetiske gjennomsnittet som den forventede avkastning i hver delperiode i fremtiden. I år 15 vil vi dermed vente at investeringen har vokst til:

$$E\left(S_{\text{om 5 år}}\right) = 1770 \times 1.0033^5 = 2081.97.$$

4.3

Vi bruker kapitalverdimodellen i denne oppgaven. Forventet avkastning på et selskap i's aksje modelleres altså ved hjelp av:

$$E\left(r_s\right) = r_f + \left(E\left(r_m\right) - r_f\right)\beta_s \tag{4.10}$$

4.3.1

Vi skal altså finne egenkapitalkostnaden til Sveis og Mek. Fra (4.10) har vi alle opplysninger, bortsett fra β_s. Denne er definert som

$$\beta_s = \frac{\sigma_{sm}}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{sm}\sigma_s\sigma_m}{\sigma_m^2} = \rho_{sm} \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_m} \tag{4.11}$$

Hvor σ_{sm} er kovariansen mellom kurssvingningene i selskap s og markedet m, σ_m^2 er variansen til markedet, ρ_{sm} er korrelasjonen mellom selskapet og markedet og σ_s er standardavviket til selskapet.

Ut fra opplysningene i oppgaven kan vi dermed sette:

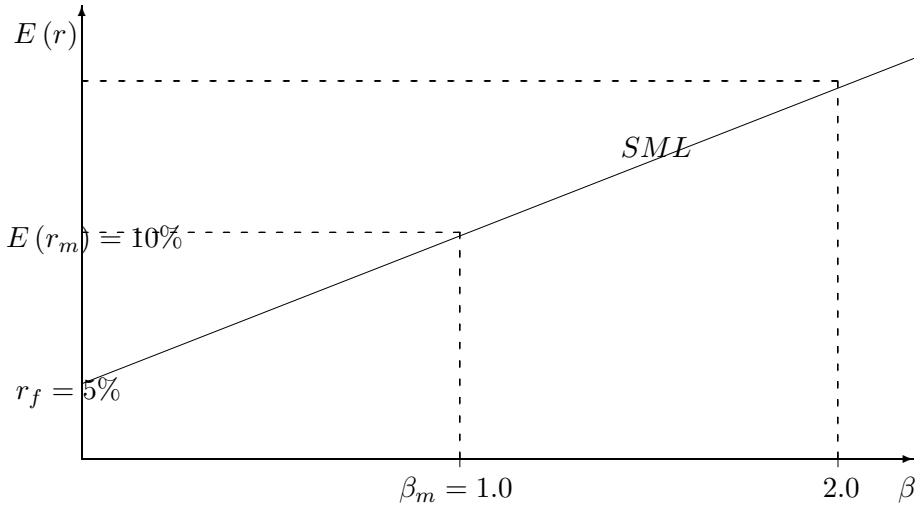
$$E\left(r_s\right) = 5 + 5 \cdot \frac{200}{10^2} = 15$$

EK-kostnaden er altså 15%.

4.3.2

4.3.3

Vi finner først beta til Brat ved å bruke (4.11). Korrelasjonen med markedet, $\rho_{bm} = 0.50$ og standardavviket til Brats kurssvingninger er $\sigma_b = 20$. Dermed



Figur 4.2: SML når den risikofrie renten er 5% og forventet markedsavkastning er 10%

har vi:

$$\beta_b = 0.50 \cdot \frac{20}{10} = 1.0$$

Ut fra SML skulle vi vente at avkastningen er $E(r_b) = 10.0$. Nå opplyses det at avkastningen forventes å være 15.0%. En fornuftig handlestrategi må nå være å kjøpe Brat-akser, fordi man må vente at kursen på aksjen stiger inntil avkastningen på Brat-aksjen faller ned til avkastningen gitt av (4.10) og SML-linjen.

4.4

4.4.1

Leddet $\tau_c r_D D$ kalles *renteskattegevinsten*. Fra tabell 4.4 ser vi at dette blir

$$\text{Renteskattegevinsten}_{\text{tab 4.4}} = 0.28 \cdot 0.075 \cdot 2000 = 42$$

Rentefordelen må sees på som en sikker del av kontantstrømmen, dvs. den har den samme risiko som gjeldsrenten. Dermed bør den diskonteres med

Tabell 4.4 Beregning av kontantstrøm for bedriftene Gjeldfri (GF) og Gjeldsatt (GS)

		GF	MG
Driftsresultat før renter og skatt	$(EBIT)$	1000	1000
Renter	$r_D \cdot D$	0	-150
Driftsresultat før skatt	$(EBT = EBIT - r_D \cdot D)$	1000	850
Skatt	$(EBT \cdot \tau_c)$	-280	-238
Driftsresultat etter skatt	$(DERS)$	720	612
KS eiere og långivere	$(EBIT \cdot (1 - \tau_c) + \tau_c r_D D)$	720	762

gjeldsrenten, dvs:

$$NV(\text{Renteskattegevinst}) = \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = T_c D$$

4.4.2

Verdien av et gjeldfritt selskap må være

$$V_U = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} \tag{4.12}$$

Her er r_U kapitalkostnaden for et selskap uten gjeld. Kapitalkostnaden diskonterer altså kontantstrømmer etter skatt. Vi ser at telleren er det samme som den årlige kontantstrømmen til eiere og kreditorer. Dermed har vi en oppdatert versjon av MM1:

PROPOSISJON 4.1 (MM 1 (Bedriftsskatt))**.**

$$V_L = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = V_U + \tau_c D \tag{4.13}$$

MMs proposisjon 4.1 med bedriftsskatt sier altså at bedriftens verdi er summen av bedriftens verdi når den ikke har gjeld og nåverdien av renteskattegevinsten.

Verdien av Gjeldfri og Gjeldsatt blir dermed:

$$V_U(\text{Gjeldfri}) = \frac{720}{0.10} = 7200$$

$V_L(\text{Gjeldsatt}) = 7200 + 0.28 \times 2000 = 7760.$

4.4.3

Hva med kapitalkostnaden, eller MM2, når vi tar hensyn til selskapsskatter? Miller og Modiglian's proposisjon er som følger.

PROPOSISJON 4.2 (MM 2 (Bedriftsskatt))**.**

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\,(1 - \tau_c)\,\frac{D}{E} \tag{4.14}$$

Fra oppgaven har vi at $r_U = 10.0\%$ og at $r_D = 7.5\%$. Vi kjenner Gjeldsatts selskapsverdi $V_L = 7760$, slik at egenkapitalen for Gjeldsatt er $7760 - 2000 = 5760$. Da er egenkapitalkostnaden:

$$r_E = 10 + (10 - 7.5)(1.00 - 0.28)\frac{2000}{5760} = 10.63$$

Kapitalkostnaden er altså 10.63%.

4.4.4

Når gjelden endres, endres også egenkapitalen pga. renteskattefordelen. Vi må altså regne ut selskapsverdien av Gjeldsatt for de to nye gjeldsnivåene og så finne egenkapitalkostnaden på samme måte som i forrige deloppgave.

Når $D = 1000$ har vi at V_L er:

$V_L = 7200 + 0.28 \times 1000 = 7480.$

EK-kostnaden er da:

$$r_E = 10 + (10 - 7.5)(1.00 - 0.28)\frac{1000}{7480 - 1000} = 10.10$$

Øker gjelden til 3.000, er på samme måte $V_L = 8.040$ og $r_E = 11.07\%$.

4.5

4.5.1

Black-Scholes/Merton-modellen ser slik ut:

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Modellen krever bare beregning av den underliggende eiendels standardavvik. Alle andre størrelser er gitt i markedet. Vi ser at markedsrisiko ikke inngår, heller ikke risikoholdning.

Vi bruker formelen (4.15). Start med d_1:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{10}{9}\right) + \left(0.05 + \frac{0.40^2}{2}\right) 0.25}{0.40\sqrt{0.25}} \\ &= \frac{0.1054 + (0.05 + 0.08)0.25}{0.20} \\ &= \frac{0.1379}{0.20} \\ &= 0.689303 \end{aligned}$$

og

$$d_2 = 0.689303 - 0.20 = 0.489303$$

Da har vi verdiene i den normaliserte normalfordeling

$$\mathcal{N}(0.689303) \sim 0.754684 \qquad \mathcal{N}(0.489303) \sim 0.687686$$

Med disse verdiene kan vi nå finne opsjonens pris ved å sette inn i (4.15):

$$C_0 = 10 \cdot 0.754684 - e^{-0.050 \cdot 0.25} 9 \cdot 0.687686 = 1.4345$$

Opsjonens pris er altså 1.4345.

4.5.2

Opsjonens risiko kan måles ved dens beta. Det enkleste er å finne denne betaen gjennom den replikerende porteføljen. Husk at denne består av aksjen og et lån. Da viser det seg at også opsjonens β_{opsjon} er en veid sum av β_S til aksjen S og β_B til obligasjonen. S er altså prisen på aksjen, det vi tidligere har kalt P_0. Δ er mengden av aksjer i porteføljen. Dermed er β_{opsjon}:

$$\beta_{opsjon} = \frac{S\Delta}{S\Delta + B}\beta_S + \frac{B}{S\Delta + B}\beta_B$$

Vi antar at obligasjonen er risikofri ($\beta_B = 0$), slik at opsjonens β_{opsjon} er:

$$\beta_{opsjon} = \frac{S\Delta}{S\Delta + B}\beta_S = \frac{S \cdot \mathcal{N}(d_1)}{C_0}\beta_S \tag{4.16}$$

Opsjonens beta avhenger altså av mengden av aksjen i porteføljen, dens pris og av aksjens beta. Og siden vi har at $\Delta = \mathcal{N}(d_1)$, er risikoen i opsjonen direkte knyttet til opsjonens følsomhet overfor kursendringer.

Nå er det nok å vise at brøken foran β_S er større enn 1.0 for å vise at opsjonen er mer risikabel enn aksjen. Vi har ved innsetting at

$$\frac{S \cdot \mathcal{N}(d_1)}{C_0} = \frac{10 \cdot 0.754684}{1.4345} = 5.2610$$

Opsjonen er altså mer enn fem ganger mer risikabel enn aksjen.

Kapittel 5

Eksamen 2012

5.1 Dividende og vekst

I denne oppgaven kommer vi til å ha nytte av dividendemodellen

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{S_T}{(1+r_E)^T} \tag{5.1}$$

Dette er altså **Dividendemodellen**. Prisen av aksjen er gitt av fremtidige dividendeutbetalinger pr. aksje pluss en sluttverdi ved investeringshorisonten T.

5.1.1 Dagens aksjekurs

Vi skal altså finne aksjekursen S_0 ut fra de grunnleggende opplysninger. Dividendeutbetalingene stiger med veksten i driftsresultatet i fem år, for så å flate ut og er konstante over all overskuelig fremtid. Det betyr at vi kan forenkle (A.2) til

$$S_0 = \sum_{t=1}^{6} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{1}{(1+r_E)^6} \times \frac{Div_7}{r_E} \tag{5.2}$$

Resultatene er vist nedenfor.

	0	1	2	3	4	5	6	7
$EBIT$		3000.00	3150.00	3307.50	3472.88	3646.52	3828.84	3828.84
EPS		30.00	31.50	33.08	34.73	36.47	38.29	38.29
Div_t		15.00	15.75	16.54	17.36	18.23	19.14	19.14
NV_1	68.80							
NV_2	80.83						159.54	
S_0	149.63							

Her er $EBIT$ driftsresultatet. Det vokser med 5% i året de neste fem årene, d.v.s. frem til år 6. Fra da av er $EBIT$ konstant. EPS er driftsresultat pr. aksje. Div_t er halvparten av EPS. Legg merke til at i år 6 har Div_t vokst til 19.14, som så er konstant. Den evige kontantstrømmen som starter i år 7 er også 19.14, dens "nullår" er år 6. Verdien av den evige kontantstrømmen i år 6 er:

$$NNV_{2,6} = \frac{Div_7}{r_E} = \frac{19.14}{0.12} = 159.54.$$

Når dette beløpet diskonteres til år 0 og legges sammen med nåverdien av de første årene, får vi aksjekursen på $S_0 = \underline{149.63}$.

5.1.2 5% vekst "i all evighet"

Hvis driftsresultatet vokser i all evighet har vi fra den generelle sammenhengen

$$S_0 = \frac{Div_1}{r_e - g} \tag{5.3}$$

der $g = 0.05$ er veksthastigheten i utbyttet, at

$$S_0 = \frac{15.00}{0.12 - 0.05} = \underline{214.29}$$

5.1.3 1% vekst etter første vekstfase

Vi har altså kontantstrømmen som før frem til år 6. Nåverdien av denne er $NV_1 = 68.80$. Nå må vi finne nåverdien av den evige veksten som starter i år 7 med $Div_7 = 19.14 \cdot 1.01 = 19.34$. Da får vi

$$NV_2 = \frac{1}{1.12^6} \times \frac{19.34}{0.12 - 0.01} = \frac{175.78}{1.12^6} = 89.05,$$

slik at $S_0 = 68.80 + 89.05 = \underline{157.85}$.

5.1.4 Tilbakekjøp?

Det kan vises at tilbakekjøp i stedet for dividende ikke har noen kontantstrømsvirkninger for eierne. Intuitivt vil vi ha at tilbakekjøp øker aksjekursen med det beløp pr. aksje som dividenden utgjør.

5.2 Markedsmodellen

I denne oppgaven brukes den empiriske *markedsmodellen*

$$r_i = \alpha + \beta r_m + u \tag{5.4}$$

der r_i er avkastningen på aksje i, og α, β er konstanter som skal beregnes. Det kan vises at β er et estimat på aksjens β. Det kan også vises at $\alpha \sim 0.0$. u er et feilledd som er normalfordelt med forventning lik null og fast varians θ^2.

5.2.1 God sammenheng?

Sammenhengen mellom avkastningen r_B i selskap B og markedsavkastningen kan skrives:

$$r_B = -0.0115 + 0.969OB \tag{5.5}$$

Denne sammenhengen er pålitelig. Vi finner at t-verdien er høy og dermed signifikant for β-estimatet $\hat{\beta}$ og at α er nær 0.0 og ikke-signifikant. Prediksjonene i modellen er dermed oppfylt. Videre er forklaringsgraden $R^2 = 0.634$ med 1256 observasjoner.

5.2.2 Anvendelser

To anvendelser peker seg ut. Den første er at kapitalkostnaden for EK for selskap i kan beregnes fra kapitalverdimodellen:

$$r_i = r_f + \beta_i (r_m - r_f) \tag{5.6}$$

der man kan bruke $\hat{\beta}_i$ som estimat på selskapets β. Kapitalkostnaden for EK er nyttig i prosjektvurderinger.

Den andre anvendelsen er i porteføljesammenheng. Her viser $\hat{\beta}_i = 0.969$, altså en beta temmelig nær markedets gjennomsnitt. Det er nyttig å vite for en porteføljeforvalter når en bestemt risikoprofil på en portefølje skal dannes.

5.3 Kapitalstruktur

I denne oppgaven brukes analyseapparatet fra Miller og Modigliani. Det er selskapsskatt i økonomien.

5.3.1

Det kan vises at verdien av selskapet uten gjeld C kan finnes fra

$$V_U = \frac{EBIT\,(1-\tau_c)}{r_U} \tag{5.7}$$

der $r_U = r_E$ når selskapet ikke har gjeld og $\tau_c = 0.28$ er skattesatsen for selskaper. Vi finner verdien er:

$$V_C = \frac{1000(1-0.28)}{0.10} = 7200$$

Verdien av selskapet D finnes fra sammenhengen

$$V_U = \frac{EBIT\,(1-\tau_c)}{r_U} + \tau_c D = V_U + \tau_c D \tag{5.8}$$

der $\tau_c D$ er renteskattefordelen. Ved innsetting har vi

$$V_D = 7200 + 0.28 \cdot 2000 = 7760$$

Det kan vises at kapitalkostnaden for egenkapitalen er

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\,(1-\tau_c)\,\frac{D}{E} \tag{5.9}$$

For C er $r_E = r_U = 10\%$ siden gjelden $D = 0$. For D finner vi først $E = V - D = 7760 - 2000 = 5760$. Dermed fremkommer:

$$r_E = 10 + (10-5) \cdot 0.72 \cdot \frac{2000}{5760} = \underline{11.25\%}$$

5.3.2 Endring i gjeld

Med $D = 4000$, er selskapets verdi 8320 og $E = 4320$. Er $D = 8000$, er $E = 1240$. Her brukes (5.9) omigjen, slik at $r_E = 13.33\%$ og $r_E = 33.22\%$.

5.3.3 Fordeler og ulemper med økt gjeldsandel

Avveiningsteorien sier at verdien av selskapet er bestemt av fordeler og ulemper av gjeld. Den kan oppsummeres slik:

$$V_L = V_U + NV(\text{Renteskattefordel}) - NV(\text{Krise- og konkurskostnader}) \tag{5.10}$$

Det spørres etter fordeler og ulemper. For det første *fordeler*. Renteskattefordelen er opplagt en fordel, som allerede vist. En annen fordel henger sammen med selskapsstyringen. La oss si at selskapet har finansiert sine lån gjennom en bank. Som en del av selskapets betalinger og inntekter, kan banken slutte om selskapet er i en god eller svak økonomisk stilling. Er stillingen i ferd med å bli svak, kan banken gripe inn på et tidlig tidspunkt og korrigere driften før selskapet utvikler større problemer. Banken har altså en *overvåkingsfunksjon* som eierne kan være interessert i.

Ulemper kan være av mange slag. For det første må selskapet betale høyere lånerenter når gjeldsandelen øker. Finansiell risiko øker med gjeldsandelen, og banken eller obligasjonseiere vil kreve kompensasjon for risikoen. Långiverne kan også begrense handlefriheten til selskapet når gjeldsandelen øker. I låneavtalen vil det være punkter om hvor høy gjeldsandelen kan være. Går selskapet ut over denne andelen, kan långiverne kreve tilbakebetalt lånet raskere, nekte nye lån til nye prosjekter, kreve tilbakebetaling før dividende etc.

Vi kan også skjelne mellom andre direkte og indirekte *krise- og konkurskostnader*. De direkte kostnadene som oppstår når selskapet kommer i vanskeligheter med å betale er gjerne utgifter til advokater og andre kostnader knyttet til selve oppløsningen av selskapet. De indirekte kostnadene er for det meste knyttet til tap av tillit. For eksempel vil leverandører kreve kontant betaling, eller arbeidstakere er uvillige til å investere i bedriftsspesifikk kunnskap, "legge liv og sjel i jobben", når krisetegnene melder seg.

5.4 Gjeldsoverheng

E's vurdering av det nye prosjektet er

$$NNV_{ny} = K_0 + \frac{1}{1+r}\left(pK_{1,H} + (1-p)K_{1,L}\right) \tag{5.11}$$

der $K_{1,H}, K_{1,L}$ er kontantstrøm i periode i det høye, henholdsvis lave alternativet. Vi antar at E har 50% gjeld, og har da at $r_{wacc} = 11\%$. Videre er

det ikke opplyst noe om skatt og vi forutsetter derfor at skatt ikke kommer i betraktning her. Innsetting gir da:

$$NNV_{ny} = -200 + \frac{1}{1.11}\left(0.75 \cdot 2000 + 0.25 \cdot 400\right) = \underline{1254.55}$$

Prosjektet er svært lønnsomt og bør gjennomføres. Vi ser at til og med i det tilfellet at den lave kontantstrømmen inntreffer, vil prosjektet ha en positiv NNV.

Problemet er at E ikke kan finansiere prosjektet. E er uten ledige midler, og nye lån oppnås ikke før det gamle er betalt. Vi kan illustrere dette med at for långiverne ser prosjektet slik ut:

$$NNV_{ny} = -200 + \frac{1}{1.11}\left(0.75 \cdot (2000 - 1000 \cdot 1.07) + 0.25 \cdot (400 - 1000 \cdot 1.07)\right) = \underline{281.82}$$

For långiverne ser ikke dette så fristende ut. Og det er en temmelig høy sannsynlighet for at de vil tape penger. Hvis det lave alternativet inntreffer, er kontantstrømmen etter tilbakebetaling av lån

$$KS_{1,L} = 400 - 1000 \cdot 1.07 = -670$$

I tillegg kommer et investeringsutlegg i periode 0. Konklusjonen er at E ikke er i stand til å finansiere det nye prosjektet.

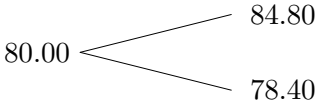
Dette er et eksempel på at gammel gjeld blokkerer for nye og lønnsomme prosjekter. Dette er problemet med *gjeldsoverheng*.

5.5 Binomisk opsjonsprising

Dette er et problem som dreier seg om opsjonsprising med to varianter av den binomiske modell.

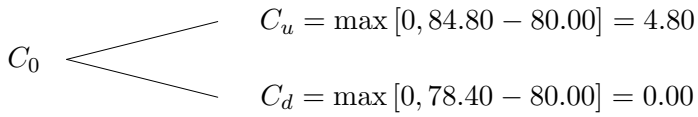
5.5.1 Replikerende portefølje en periode

Første steg er å bestemme aksjens prisprosess. Vi ser at aksjens pris i neste periode er enten $80.00 \cdot 1.06 = 84.80$ eller $80.00 \cdot 0.98 = 78.40$, se figur 5.1.



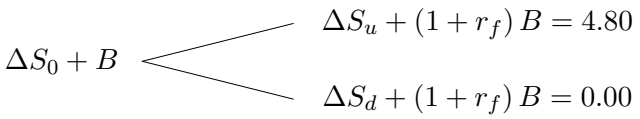
Figur 5.1: Aksjens prisprosess: To sluttverdier er mulige.

Neste steg er å bestemme opsjonens verdi ved forfall. Utøvelseskursen er 80.00. Da har vi altså at kjøpsopsjonen kan ha verdiene 4.80 og 0.00 ved forfall, se figur 5.2



Figur 5.2: Verdien av en kjøpsopsjon ved forfall: To sluttverdier er mulige.

I tredje steg skal vi altså sette sammen en portefølje som etterligner utbetalingene til opsjonen ved forfall. Portefølje som består av en andel Δ av aksjen og et kontantbeløp B. Figur 5.3 illustrerer.



Figur 5.3: Verdien av en porteføljen: To sluttverdier er mulige.

Figur 5.3 viser at porteføljen skal replikere verdien til kjøpsopsjonen i de to tilstandene. Fra figur 5.3 ser vi at dette tilsvarer to ligninger med to ukjente, Δ og B. Vi setter inn verdiene for aksjepriser i de to tilstandene og den risikofrie renten. De to ligningene er dermed:

$$84.80\Delta + 1.04B = 4.80$$
$$78.40\Delta + 1.04B = 0$$

Fra siste ligning har vi at $B = -78.40\Delta/1.04$. Vi setter dette inn i første ligning og løser for Δ:

$$\begin{aligned} 84.80\Delta + 1.04\frac{-78.40\Delta}{1.04} &= 4.80 \\ 6.40\Delta &= 4.80 \\ \Delta &= 0.75 \end{aligned}$$

Dermed har vi at B må være:

$$B = -\frac{78.40 \cdot 0.75}{1.04} = -56.54$$

Vi skal altså investere i aksjen med en andel 0.75, samtidig som vi skal ta opp et lån på 56.54.

I fjerde steg bruker vi innsikten om arbitrasjefri handel. Porteføljen vi nettopp har satt sammen gir samme kontantstrøm som opsjonen i periode 1. Siden de har samme verdi i periode 1, må de også ha samme verdi i periode 0. Dermed kan vi sette prisen på opsjonen ut fra de kjente verdiene til aksjen

og lånet:

$$C_0 = 0.75 \cdot 80.00 - 56.54 = \underline{3.46}$$

En arbitrasjefri pris på opsjonen er altså 3.46. Opsjonen er altså like mye verdt som en andel i aksjen og et lån. Dette kan tolkes som et kjøp av aksjen finansiert med lån. Opsjonen vil derfor være mer volatil enn aksjen selv. Generelt har vi altså at

$$C_0 = \Delta S_0 - B \tag{5.12}$$

Det kan vises at metoden med replikerende portefølje leder frem til den generelle formelen

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \tag{5.13}$$

Her er C_u, C_d opsjonsverdien i periode 1 i henholdsvis opp- og nedtilstanden.

5.5.2 Risikonøytral prising

Definer sannsynlighetene

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u-d} \tag{5.14}$$

Vi kan nå prise kjøpsopsjonen med risikonøytral prising:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[qC_u + (1-q)C_d\right] \tag{5.15}$$

Vi finner først q og $1 - q$:

$$q = \frac{0.04 - (-0.02)}{0.06 - (-0.02)} = 0.75; 1 - q = \frac{0.06 - 0.04}{0.08} = 0.25$$

Fra (5.15) har vi da:

$$C_0 = \frac{1}{1.04}\left(0.75 \cdot 4.80 + 0.25 \cdot 0.00\right) = \underline{3.46}$$

5.5.3 To perioder: Risikonøytral prising

Det kan vises at i to perioder er formelen

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \tag{5.16}$$

Vi finner at

$$C_{uu} = \max\left[80 \cdot 1.06^2 - 80, 0\right] = 9.89$$

$$C_{ud} = \max\left[80 \cdot 1.06 \cdot 80 \cdot 0.98 - 80.0\right] = 3.10$$

og

$$C_{dd} = \max\left[80 \cdot 0.98^2 - 80.0\right] = 0.00$$

Nå har vi alle opplysninger vi trenger. Innsetting gir direkte:

$$C_0 = \frac{1}{1.04^2}\left(0.75^2 9.89 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot 3.10 + 0.25^2 0.00\right) = \underline{6.22}$$

Kapittel 6

Eksamen 2013

6.1

6.1.1

1. Anta at investoren har et langsiktig perspektiv, feks. spares det til pensjon.
2. Over tid har det vist seg vanskelig å ha en høyere avkastning enn gjennomsnittet i markedet. Har noen høyere enn markedsgjennomsnittet, må jo andre ha lavere.
3. Satser man på å slå markedet, må man bruke tid og energi for å følge med, analysere og foreta handler. Dette er informasjonsinnsamling og -bearbeiding, altså kostnadskrevende. Vår investor er en amatør.
4. En fornuftig strategi er derfor å forsøke å holde seg på gjennomsnittet. Det kan gjøres på to måter:
   (a) Sette sammen en hjemmelaget porteføljе av 10-15 aksjer, som helst bør være likvide, dvs. aksjer som det er relativt stor handel i.
   (b) Kjøpe andeler i et aksjefond som tar sikte på å følge markedsporteføljen.

6.1.2

Denne oppgaven handler om kapitalverdimodellen (KVM). Forutsetningene for KVM oppsummeres i seks punkter:

1. Investorene er risikoaverse individer som maksimerer sin forventede nytte ved slutten av perioden.

2. Investorene er pristilpassere som har homogene forventninger om eiendelenes avkastning. Avkastningene har en felles normalfordeling.
3. Det finnes en risikofri eiendel som er slik at investorene kan låne og låne ut ubegrensede beløp til den risikofrie renten.
4. Eiendelenes antall og størrelse er gitt. Alle eiendeler kan selges og er perfekt oppdelbare.
5. Markedene for eiendelene er friksjonsløse og informasjon er tilgjengelig for alle investorer samtidig og uten kostnader.
6. Der er ingen markedsimperfeksjoner slik som skatter, reguleringer eller begrensninger på short-salg.

Kapitalkostnaden

Kapitalverdimodellen kan skrives:

$$E(r_i) = r_f - (E(r_m) - r_f)\beta_i \tag{6.1}$$

Modellen sier at forventet avkastning på enhver eiendel $E(r_i)$ består av to ledd. Det første er den risikofrie renten r_f, det andre leddet er en risikopremie. Risikopremien er prisen på risiko $(E(r_m) - r_f)$ ganget med mengden risiko $\sigma_{im}/\sigma_m^2 = \beta_i$. $E(r_m)$ er forventet avkastning på markedsporteføljen m. σ_{im} er kovariansen til eiendelen og markedsporteføljen, og σ_m^2 er variansen til markedsporteføljen.

Fra oppgaven har vi altså at $r_f = 4\%$, $E(r_m) = 9\%$, $\sigma_{im} = 400$, og og $\sigma_m^2 = 12.65^2 = 160$. Da er $\beta_i = 400/160 = 2.50$. Forventet avkastning er dermed fra (6.1):

$$E(r_i) = 4.00 + (9.00 - 4.00)2.50 = 16.50\%$$

Forventet avkastning, også kalt kapitalkostnaden, er dermed 16.50% for Vinnvinn.

Positiv alfa?

Skal vi foretrekke å investere i Vinnvinn må den gi høyere avkastning enn den forventede fra KVM. Aksjen må ha en positiv α :

$$\alpha = R_i - E(r_i) \tag{6.2}$$

der $R_i = 20\%$ er avkastningen i den alternative vurderingen. Denne er høyere enn dagens vurdering på 16%, dvs. aksjen har en $\alpha = 20 - 16 = 4$. Man bør altså investere i aksjen.

Likevektspris

Andre investorer oppdager investeringsmuligheten. Da må vi vente at aksjen innstiller seg på et nytt likevektsnivå med en avkastning på 16.5%. Aksjekur-

sen er i dag 100, med 20%'s avkastning impliserer dette en kontantstrøm på 20, når vi antar stabil drift over overskuelig fremtid. Da må vi ha at:

$$\frac{20}{S_0^*} = 0.165 \qquad S_0^* = 121.21$$

Kursen vil altså stige til 121.21.

6.2

Dette er en oppgave i kapitalstruktur, og vi bruker Miller og Modiglianimodellen med bedriftsskatt som eneste markedsimperfeksjon i denne oppgven. MM gjorde to forutsetninger:

1. Selskapet holder evig, konstant kapasitet ved å investere et like stor beløp som avskrivningene.
2. Alt driftsresultat utdeles som dividende.

Den første forutsetningen innebærer at kontantstrømmen fra foretaket er lik det regnskapsmessige årsresultatet.

Sentralt i denne oppgaven er verdien av selskapet under ulike forutsetninger. MMs proposisjon lyder:
PROPOSISJON 6.1 (MM 1 (Bedriftsskatt))**.**

$$V_L = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = V_U + \tau_c D \tag{6.3}$$

MMs proposisjon 6.1 med bedriftsskatt sier altså at bedriftens verdi er summen av bedriftens verdi når den ikke har gjeld og nåverdien av renteskattegevinsten.

6.2.1

Støtt har altså ingen gjeld like før annonseringen. Da har vi fra (6.3) at

$$V_U = \text{Aksjekurs} \times \text{Aksjer}$$
$$10.50 \times 30m = \underline{315m}$$

Verdien av eiendelene er lik verdien av egenkapitalen når selskapet ikke har gjeld.

6.2.2

Gjelden er utstedt og nyheten er kjent i markedet. Alle investorene er nå klar over at verdien av selskapet også inkluderer renteskattegevinsten $\tau_c D$ av å ha gjeld. Fra (6.3) stiger nå selskapsverdien til:

$$V_L = 315m + 0.27 \times 50m = \underline{328.5m}$$

Følgelig er nå den nye verdien av eiendelene denne selskapsverdien pluss de nye kontantene:

$$\text{Eiendeler} = V_L + \text{Kontanter} = 328.50 + 50 = 378.50$$

Ny egenkapital er derfor $E_L = 378.50 - 50 = 328.50$ på dette tidspunktet, før aksjene er kjøpt tilbake.

6.2.3

Aksjekursen er nå

$$S_0 = \frac{E_L}{\text{Antall aksjer}} = \frac{328.5m}{30m} = \underline{10.95}$$

Støtt kommer til å kjøpe tilbake $50m/10.95 = 4,966,210$ aksjer.

6.2.4

Etter tilbakekjøpet er det $30m - 4,966,210 = 25,433,790$ aksjer igjen i selskapet. Egenkapitalen er $E_L = 328.5m - 50m = 278.5m$. Aksjekursen er nå:

$$S_0 = \frac{278.5m}{25,433,790} = \underline{10.95}$$

som før.

Eiendelene er som før 328.5m, siden de 50m er gått over til selgerne av aksjene. Eiendelene er finansiert med egenkapital på 278.5m og et lån på 50m.

6.3

Vi er igjen innenfor Miller og Modigliani's irrelevansteoremer. Teoremet sier at størrelsen på dividendeutbetalingen har ingen virkning på selskapets verdi. De gikk ut fra en forutsetning om et perfekt kapitalmarked, som betyr at

1. Der er ingen markedsfriksjoner og ingen skattevurderinger.
2. Ingen usikkerhet om investeringsplaner.
3. Ingen transaksjonskostnader, for eksempel ingen meglerhonorarer ved kjøp og salg av aksjer, eller ved selskapenes aksjeutvidelser.
4. Ingen informasjonskostnader pga. asymmetrisk informasjon.

Selskapsverdien er ut fra utbyttemodellen, hvor vi antar et evigvarende utbytte:

$$\text{Selskapsverdi} = \frac{4m}{0.10} = 40m \tag{6.4}$$

I tillegg har altså selskapet liggende 10 millioner i kontanter. Markedsverdien er derfor $V = 40 + 10 = 50m$. Siden der er 10 million aksjer, er aksjekursen i utgangspunktet 5.00.

6.3.1 Ekstraordinær dividende

Skal de 10m deles ut som et ekstraordinært utbytte? Utbytte pr. aksje er da:

$$Div_0 = \frac{\text{Overflødige kontanter}}{\text{Antall aksjer}} = \frac{10m}{10m} = \underline{1.00}$$

Aksjekursen før utdeling av dividende inneholder retten til å motta utbyttet. Vi sier at aksjen er *cum* (med) dividende og prisen er S_{cum}. Dagen etter at utbyttet er betalt, er aksjen *ex* (uten) dividende. Vi har da at:

$$S_{cum} = \text{Nåværende dividende} + NV\text{Fremtidig dividende} = 1 + \frac{0.40}{0.10} = 5.00 \tag{6.5}$$

Dagen etter at dividenden er betalt, er aksjekursen:

$$S_{ex} = NV\text{Fremtidig dividende} = \frac{0.4}{0.10} = 4.00 \tag{6.6}$$

Aksjekursen faller altså etter at utbyttet er delt ut. Fallet i aksjekursen er like stort som den utdelte dividenden pr. aksje. Vi kan også vise dette fallet

ved å studere selskapets balanse i markedsverdier.

	Før utdeling	Etter utdeling
Kontanter	10m	0
Andre eiendeler	40m	40m
Sum markedsverdier	50m	40m
Aksjer	10m	10m
Aksjekurs	5	4

Vi har altså at *i et perfekt kapitalmarked faller kursen på en aksje uten rett til dividende med dividendebeløpet pr. aksje på utdelingsdatoen.*

6.3.2 Tilbakekjøp av aksjer

Hva om Hold bruker ekstrakontantene til å kjøpe tilbake aksjer? Man har altså 10m og aksjekursen er 5, det skulle gi $10m/5 = 2,000,000$ tilbakekjøpte aksjer og 8m gjenstående aksjer. Vi bruker balansen i markedsverdier til å studere virkningene.

	Før tilbakekjøp	Etter tilbakekjøp
Kontanter	10m	0
Andre eiendeler	40m	40m
Sum markedsverdier	50m	40m
Aksjer	10m	8m
Aksjekurs	5	5

Tilbakekjøpet endrer altså ikke aksjekursen, fordi markedsverdien nå fordeles på færre aksjer. Vi kan også se dette på en annen måte. I fremtiden vil selskapet fremdeles generere en kontantstrøm på 4m. Det er dermed i stand til å betale en dividende hvert år på $Div = 4m/8m = 0.50$ pr. aksje. Dermed er selskapets aksjekurs i dag

$$S_{tk} = \frac{0.50}{0.10} = 5.00$$

Dividenden pr. aksje øker altså i fremtiden, og dermed er aksjekursen uberørt.

Vil investoren foretrekke dividende eller tilbakekjøp? Anta at en investor har 1,000 aksjer. La oss vurdere hva dividende eller tilbakekjøp har å si for ham eller henne, når vi sammenligner like etter en utbetaling av dividende.

	Dividende	Tilbakekjøp
Aksjer	$4.00 \times 1,000 = 4,000$	$5.00 \times 1,000 = 5,000$
Kontanter	$1.00 \times 1,000 = 1,000$	
Sum	5,000	5,000

Verdien for investor er altså den samme, enten han eller hun får utbetalingene fra selskapet i form av dividende eller tilbakekjøp av aksjer.

Sett nå at selskapet vedtar å kjøpe tilbake aksjer mens du ønsker kontanter, dvs. en utbetaling av dividende. Du kan få de kontantene du ønsker ved å selge aksjer. Du ønsker altså 1,000 i kontanter i stedet for at beløpet er bundet i aksjer. Du selger da aksjer for 1,000, dvs. $1,000/5.00 = 200$ aksjer, og sitter altså tilbake med 800 aksjer til en verdi av $5.00 \times 800 = 4,000$. Som ved dividendeutbetalingen har du nå en aksjebeholdning på 4,000 og en kontantbeholdning på 1,000. Gjennom denne transaksjonen har du dermed gjennomført en **hjemmelaget dividende**, dvs. du kan som investor erstatte den dividendepolitikken selskapet legger opp til med en annen etter eget ønske.

Hva om selskapet derimot deler ut dividende, mens du ønsker å holde verdiene i aksjebeholdningen? Du kan bruke dividendeutbetalingen til å kjøpe aksjer. Når dividenden er utbetalt, er aksjekursen $S_{ex} = 4.00$. Du kjøper dermed $1,000/4.00 = 250$ aksjer. Du har dermed nå en aksjebeholdning på 1,250 til en verdi av $4.00 \times 1,250 = 5,000$.

Lærdommen av disse regneøvelsene er dermed: *I perfekte kapitalmarkeder er investorene indifferente mellom dividendeutbetaling eller tilbakjøp av aksjer. Ved å reinvestere dividenden eller ved å selge aksjer kan investoren replikere hvilken som helst utbetalingsmetode som selskapet velger.*

6.3.3 Nye aksjer og høyere utbytte

Et foreslag er altså å gi et ekstra stort utbytte i år på 12m ved å utstede nye aksjer. Vi forutsetter at selskapets investeringsprogram ligger fast. Man trenger 2m og ville altså få inn $2m/5.00 = 400,000$ nye aksjer i selskapet. Dividende pr. aksje fra utstedte aksjer blir nå:

$$Div_{\text{utstedt}} = \frac{2,000,000}{10,040,000} = 0.19231$$

Ekstradividenden pr. aksje fra årets utbetaling blir:

$$Div_{\text{ekstra}} = \frac{10,000,000}{10,400,000} = 0.96154$$

Selskapet vil fortsette å skape en kontantstrøm på 4m hvert år, som deles ut til aksjonærene. Denne årlige kontantstrømmen er på:

$$Div_{\text{årlig}} = \frac{4,000,000}{10,400,00} = 0.38462$$

Hvis man velger dette forslaget, vil selskapets aksjekurs inkludert retten til dividende (P_{cum}) i dag være:

$$S_{cum} = 0.96154 + 0.19231 + \frac{0.38462}{0.10} = 5.00$$

Investorene vil altså få like mye for aksjen enten dividenden utbetales etter hvert som kontantstrømmene skaper rom for dette, eller om man "henter frem i tid" dividenden ved å utstede nye aksjer. Med andre ord kommer vi til det samme resultatet som før: Investorene er likegyldige til valget av utbetalingspolitikk i selskapet, sålenge investeringsprogrammet ligger fast.

6.3.4 Konklusjon

De tre måtene å dele ut overflødige kontanter på er likegyldige for investoren, dvs. de er like mye verdt. Ønsker investoren en annen utbetaling enn det selskapet gjør, kan investoren omgjøre beslutningen ved å kjøpe eller selge aksjer, eventuelt kombinert med et lån.

6.4

Vi bruker Black-Scholes-Merton (BSM) sin modell for opsjonsprising her. Det forutsettes en bestemt kontinuerlig tids prisprosess. Øvrige forutsetninger er:

- De finansielle markedene er perfekte, dvs. uten transaksjonskostnader og skatter. Short-salg er tillatt, og eiendelene er perfekt oppdelbare.
- Alle investorer kan låne og låne ut til samme risikofrie rente, som er konstant frem til opsjonens forfall.
- Aksjen gir ikke noe utbytte.
- Markedene er komplette, dvs. alle eiendeler i økonomien har en pris, markedene er alltid åpne og handelen skjer kontinuerlig.

BSM-modellen er:

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.4.1

Vi skal finne opsjonsprisen ut fra opplysningene i oppgaven. Vi har at $\sigma = 0.40$, $S_0 = 110$, $X = 100$, $r_f = 0.055$ og $T = 90/365 = 0.24658$. Verdien av $\mathcal{N}(\cdot)$ henter vi fra vedlagte normalfordeling.

Vi begynner med d_1:

$$d_1 = \frac{\ln(110/100) + \left(0.055 + \frac{0.40^2}{2}\right) 0.24658}{0.40\sqrt{0.24658}} = 0.647439$$

og

$$d_2 = 0.647439 - 0.40 \cdot \sqrt{0.24658} = 0.448814$$

Da har vi de to verdiene fra den normaliserte normalfordeling

$$\mathcal{N}(647439) \sim 0.741326 \qquad \mathcal{N}(0.448814) \sim 0.673217$$

Med disse verdiene kan vi nå finne opsjonens pris ved å sette inn i (6.7):

$$C_0 = 110 \cdot 0.741326 - e^{-0.055 \cdot 0.24658} 100 \cdot 0.673217 = \underline{15.131}$$

6.4.2

Økt volatilitet betyr at prisen på kjøpsopsjonen øker. Høyere volatilitet betyr at aksjekursen kan nå høyere nivåer enn før, noe som betyr en høyere verdi av kjøpsopsjonen.

6.4.3

Vi skal altså finne prisen på en salgsopsjon med samme utøvelseskurs. Det kan vises at en eksplisitt formel for salgsopsjonen er som følger:

$$P = e^{-r_f T} X \left[1 - \mathcal{N}(d_2)\right] - S\left[1 - \mathcal{N}(d_1)\right] \tag{6.8}$$

Vi har allerede regnet ut de sentrale størrelsene i (6.8). Innsetting gir med en gang:

$$\begin{aligned} P &= e^{-0.055 \cdot 0.24658} 100.00 \left[1 - 0.673217\right] - 110.00 \left[1 - 0.741326\right] \\ &= \underline{3.78} \end{aligned}$$

Kapittel 7

Kontinuasjonseksamen 2014

7.1

1. Her venter jeg gode definisjoner på arbitrasjefrie markeder; umuligheten av å oppnå en avkastning større risikofri investering uten å foreta investeringer og uten å ta risiko.
2. Avvik skyldes først og fremst reguleringer.

7.2

7.2.1

Den gjennomsnittlige avkastning $E(r_1)$ for en enkeltaksje 1 er definert som

$$E(r_1) = \sum_{s=1}^{S} p_s r_{1s} \tag{7.1}$$

Standardavviket σ_1 er likedan

$$\sigma_1 = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} p_s \left(r_{1s} - E(r_1)\right)^2} \tag{7.2}$$

Her er

p_s	Sannsynligheten for tilstand s
r_{1s}	Avkastningen for selskap (eller aksje) 1 i tilstand s
S	Alle tilstander
$E(\cdot)$	Forventningsoperatoren til uttrykket inne i parentesen

Tabell 7.1 Utregning av forventet avkastning og risiko for fondet L

s	p_i	r_i	$p_i \cdot r_i$	$r_i - E(r_1)$	$(r_i - E(r_1))^2$	$p_i (r_i - E(r_1))^2$
1	0.2	10.00	2.00	2.40	5.76	1.15
2	0.4	8.00	3.20	0.40	0.16	0.06
3	0.4	6.00	2.40	-1.60	2.56	1.02
	1.0	$E(r_1)$	7.60		σ_1^2	2.24
					σ_1	1.50

Tabell 7.2 Utregning av forventet avkastning og risiko for fondet H

s	p_i	r_i	$p_i \cdot r_i$	$r_i - E(r_2)$	$(r_i - E(r_2))^2$	$p_i (r_i - E(r_2))^2$
1	0.2	-5.00	-1.00	-18.00	324.00	64.80
2	0.4	10.00	4.00	-3.00	9.00	3.60
3	0.4	25.00	10.00	12.00	144.00	57.60
	1.0	$E(r_2)$	13.00		σ_2^2	126.00
					σ_2	11.22

7.2.2

Vi trenger et mål på porteføljens risiko og avkastning for å svare på dette spørsmålet.

Definer nå *kovariansen* σ_{12} mellom de to aksjene 1 og 2:

$$\sigma_{12} = \sum_{s=1}^{S} p_s (r_{1s} - E(r_1))(r_{2s} - E(r_2)) \tag{7.3}$$

Dette målet viser om aksjene beveger seg i samme eller motsatt retning.

Korrelasjonen ρ_{12} mellom to aksjer er definert som:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \tag{7.4}$$

Korrelasjonen har sin laveste verdi ved -1.0, sin høyeste ved +1.0. Det følger fra (7.4) at

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \tag{7.5}$$

Vi er nå i stand til å undersøke forholdet mellom risiko og avkastning i en portefølje. Anta at w er andelen av formuen plassert i eiendel 1, mens andelen $(1-w)$ befinner seg i eiendel 2. I resten av kapitlet holder vi oss til en portefølje med to eiendeler.

Porteføljens avkastning

$$E(r_p) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{7.6}$$

Porteføljens risiko:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}}\end{aligned} \tag{7.7}$$

Før vi går videre, regnes kovarians og korrelasjonskoeffisient ut.

Tabell 7.3 Utregning av kovariansen mellom H og L

s	p_i	$r_i - E(r_1)$	$r_i - E(r_2)$	$p(r_i - E(r_1))(r_i - E(r_2))$
1	0.2	2.40	-18.00	-8.64
2	0.4	0.40	-3.00	-0.48
3	0.4	-1.60	12.00	-7.68
			σ_{12}	-16.80

$$\text{Korrelasjonen: } \rho_{12} = \frac{-16.80}{1.50 \cdot 11.22} = -1.0$$

Det er enkelt å finne MVP. Beregn den deriverte porteføljens risiko og sett resultatet lik null. Fra dette uttrykket fremkommer den w som minimaliserer porteføljens risiko. Bruk porteføljens varians:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12} \\ &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w\sigma_{12} - 2w^2\sigma_{12}\end{aligned}$$

Den deriverte av denne er

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w} &= 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 + 2\sigma_{12} - 4w\sigma_{12} = 0|\frac{1}{2} \\ &= w\sigma_1^2 + w\sigma_2^2 - 2w\sigma_{12} = \sigma_2^2 - \sigma_{12}\end{aligned}$$

som impliserer at

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{7.8}$$

Vi anvender denne formelen i vår oppgave, og får:

$$w = \frac{126.00 - (-16.80)}{2.24 + 126.00 - 2(-16.80)} = 0.88235$$

Vi ville altså sette 88.24% av formuen i lavrisikofond L og $(1 - 0.8824)100 = 11.76\%$ i høyrisikofondet H, hvis vi ønsket å oppnå MVP.

Vi kunne også gjort det enklere. Vi ser jo at korrelasjonskoeffisienten er -1.0, d.v.s. vi har perfekt negativ korrelasjon mellom fondene. Vi kan altså sette:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2(-1.0) = 0$$

Uttrykket kan omformuleres slik:

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 - 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 + (1-w)^2\sigma_2^2 = 0$$

Vi gjenkjenner uttrykket foran det siste likhetstegnet som

$$\sigma_p^2 = (w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2)^2 = 0$$

Skal dette oppfylles, må

$$w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2 = 0$$

Vi kan dermed finne w:

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{7.9}$$

Innsetting:

$$w = \frac{11.22}{1.50 \cdot 11.22} = 0.88208$$

som altså er den samme som ovenfor, bortsett fra en avrundingsfeil.

7.2.3

Oppgaven krever altså at $\sigma_P = 1.0$. Da har vi at

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} = 1.0$$

Vi setter inn verdier vi allerede har regnet ut:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2 2.24 + (1-w)^2 126.00 + 2 \cdot w(1-w) 1.50 \cdot 11.22(-1.0)} = 1.0$$
$$\sigma_p^2 = w^2 2.24 + 126.00 - 252.00w + 126.00w^2 - 33.66w + 33.66w^2 = 1.0$$
$$= 161.90w^2 - 285.66w + 125.00 = 0$$

Vi har altså en kvadratisk ligning av formen $aw^2 + bw + c = 0$ som løses med:

$$w = \frac{-(-285.66) \pm \sqrt{285.66^2 - 4 \cdot 161.90 \cdot 125.00}}{2 \cdot 161.90} : w_+ = 0.96, \qquad w_- = 0.80$$

Vi er interesserte i den porteføljen som gir høyest avkastning for denne risikoen. Vi finner da avkastningen for de to porteføljene:

$$w = 0.96 \qquad E(r_P) = 0.96 \cdot 7.60 + 0.04 \cdot 13.00 = 7.82$$
$$w = 0.80 \qquad E(r_P) = 0.80 \cdot 7.60 + 0.20 \cdot 13.00 = 8.68$$

$w = 0.80$ er altså den porteføljen som gir den høyeste avkastningen for en risiko på 1.0. Denne porteføljen befinner seg på effisiensgrensen, samlingen av alle de porteføljer som maksimerer avkastning for en gitt risiko.

7.3

7.3.1

Verdien av de gjenværende kontantstrømmer ved prosjektets begynnelse:

$$V_0^L = \sum_{t=0}^{T} \frac{K_t}{(1 + r_{wacc})^t} \tag{7.10}$$

Kapitalkostnaden r_{wacc} er beregnet fra

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + (1 - \tau_c) \frac{D}{E+D} r_D \tag{7.11}$$

Kapitalkostnaden er:

$$r_{wacc} = \frac{1000}{1500} 15.00 + (1.00 - 0.27) \frac{500}{1500} 8.00 = 11.95\%$$

Beregning av kontantstrømmer og NNV er vist i tabell 7.4.

Gjenværende verdi V_0^L er altså 114.66. Prosjektet viser positiv NNV og bør

Tabell 7.4 Utregning av prosjektets netto nåverdi ved hjelp av totalkapitalmetoden

	Periode			
	0	1	2	3
Salg		200.00	250.00	225.00
Solgte varers kostnad		-75.00	-93.75	-84.38
Driftsutgifter		-80.00	-90.00	-87.00
Avskrivning		-29.00	-29.00	-29.00
EBIT		16.00	37.25	24.63
Bedriftsskatt 27%		-4.32	-10.06	-6.65
Avskrivning		29.00	29.00	29.00
Investeringer	-87.00			
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00
Fri kontantstrøm	-87.00	40.68	56.19	46.98
Nåverdier	-87.00	36.34	44.84	33.48
NNV	27.66			

altså gjennomføres.

7.3.2

Justert nåverdi får vi når vi beregner virkninger av investeringen og finansiering hver for seg og legger sammen. Vi skal altså diskontere den frie kontantstrømmen med kapitalkostnaden til et gjeldfritt selskap. Dette er jo det samme som r_{wacc} uten skattejustering, dvs:

$$r_U = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D = r_{wacc} \text{ før skatt} \tag{7.12}$$

Dette er jo også det samme som avkastningskravet til prosjektets eiendeler, eller prosjektets forretningsrisiko. Denne er jo den samme uansett gjeldsnivå, og etter Modigliani and Miller (1958) er den gjennomsnittlige kapitalkostnaden uberørt av gjeldsnivå. Vi har dermed at

$$r_U = \frac{2}{3} \cdot 15.00 + \frac{1}{3} \cdot 8.00 = 12.67$$

Investeringsdelen til prosjektet har dermed verdien

$$V^U = \frac{40.68}{1.1267^1} + \frac{56.19}{1.1267^2} + \frac{46.98}{1.1267^3} = 113.22$$

Neste oppgave er finne nåverdien av renteskattefordelen. Vi må beregne

gjeldskapasiteten fra tabell 7.4, renter som er betalt i hvert år og så renteskattefordelene av disse betalingene. Rentene er selvsagt gitt av

$$\text{Renter betalt i år } t = r_D \cdot D_{t-1} \tag{7.13}$$

Gjeldskapasiteten D_t er gitt av

$$D_t = d \cdot V_t^L \tag{7.14}$$

Her er d målsettingen om gjeldsandel og V_t^L er prosjektets gjenværende nåverdi på tidspunkt t. Prosjektets gjenværende nåverdi på hvert tidspunkt t kan ta utgangspunkt i siste året og arbeide seg fremover. Den neddiskonterte verdien i hver periode må jo være lik neste periodes kontantstrøm og V_t^L:

$$V_t^L = \frac{K_{t+1} + V_{t+1}^L}{1 + r_{wacc}} \tag{7.15}$$

Tabell 7.5 Beregning av gjeldskapasitet og renteskattefordel

	0	1	2	3
Fri kontantstrøm		40.68	56.19	46.98
Gjenværende verdi	114.66	87.68	41.96	0.00
Gjeldskapasitet	38.22	29.23	13.99	0.00
Renter 8%		3.06	2.34	1.12
Renteskattefordel		0.83	0.63	0.30

Nåverdien av renteskattefordelen (RSF) er

$$NNV_{RSF} = \frac{0.83}{1.1267} + \frac{0.63}{1.1267^2} + \frac{0.30}{1.1267^3} = 1.44$$

og dermed er $JNV = 113.22 + 1.44 = 114.66$ som før.

7.3.3

Beregningene stemmer altså med tidligere metoder. Kontanstrømmen diskonteres nå med kapitalkostnaden for egenkpaitalen, r_E.

Endring i lån er fremkommet ved $\Delta D_t = D_t - D_{t-1}$ der D er gjelden. Beregningene er vist nedenfor.

Tabell 7.6 Beregning av prosjektverdien etter EK-metoden

	0	1	2	3
EBIT		16.00	37.25	24.63
Renteutgifter		-3.06	-2.34	-1.12
Driftsresultat før skatt		12.94	34.91	23.51
Bedriftsskatt 27%		-3.49	-9.43	-6.35
Driftsresultat		9.45	25.49	17.16
Avskrivning		29.00	29.00	29.00
Investeringer	-87.00			
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00
Endring i lån	38.22	-8.99	-15.24	-13.99
Fri kontantstrøm til eierne	-48.78	29.45	39.25	32.17
Nåverdier	-48.78	25.61	29.68	21.15
NNV	27.66			

Tabell 7.7 Beregning av endring i lån, d.v.s. tilgang til kreditt og betaling av avdrag på lånet

	0	1	2	3
Fri kontantstrøm	-87.00	40.68	56.19	46.98
Gjenværende verdi	114.66	87.68	41.96	0.00
Lånekapasitet	38.22	29.23	13.99	0.00
Endring i lån	38.22	-8.99	-15.24	-13.99

7.4

7.4.1

Forventet verdi er definert ved

$$E\left(S_{i1}\right) = 0.5\left(\left(S_{i1H}\right) + \left(S_{i1L}\right)\right) \qquad i = A, B \tag{7.16}$$

S_{i1} er verdi til A eller B og ett-tallet står for periode 1. Vi har:

$S_{A1} = 0.5(125 + 75) = 100$
$S_{B1} = 0.5(110 + 90) = 100$

7.4.2

Her brukes en binomisk prismodell. Vi kan finne verdien til en opsjon ut fra:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \tag{7.17}$$

Vi forutsetter at utøvelsesprisen er 100. Da har vi for A:

$$C_{0A} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.25)}{0.25-(-0.25)}25.00 + \frac{0.25-0.05}{0.25-(-0.25)}0.00\right] = 14.29$$

Det samme for B:

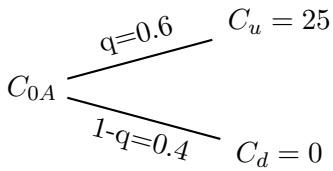
$$C_{0B} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.10)}{0.10-(-0.10)}10.00 + \frac{0.10-0.05}{0.10-(-0.10)}0.00\right] = 5.71$$

Større volatilitet er positivt for opsjonens verdi.

Vi kan også regne ut de risikonøytrale sannsynlighetene:

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} = 0.60, \qquad 1-q = 0.40$$

Problemet kan nå illustreres slik:

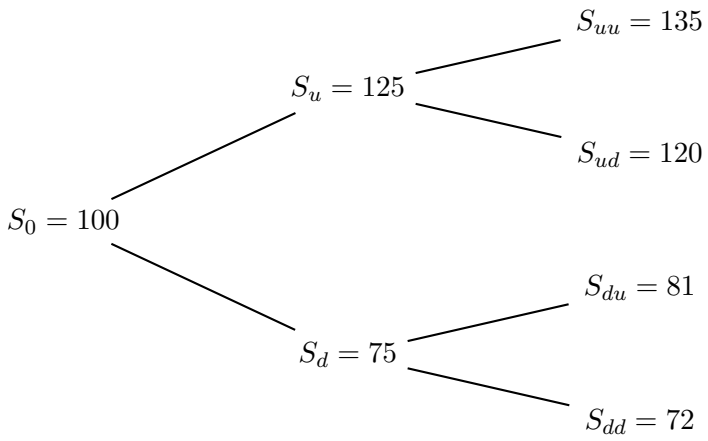


Figur 7.1: Første periodes opsjonsproblem for A med risikonøytral prising

7.4.3

Med den oppgitte veksten vil A-aksjen i periode 2 være en av verdiene $120, 135$ og $72, 81$. B-aksjen vil ha verdiene $105.60, 118.80$ og $86.40, 97.20$. Det kan være hensiktsmessig å vise prisprosessen for begge periodene, se figur 7.2. For A-aksjen har vi altså følgende prisprosess i to perioder:

Figur 7.2 viser at vi får en positiv opsjonsverdi i periode 1, C_u. $C_d = 0$ siden $\max[S_{du} - X] = 0$ og $\max[S_{dd} - X] = 0$. Vi trenger altså bare å regne ut



Figur 7.2: Prisprosessen for A over to perioder

for C_u:

$$C_{uA} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.04)}{0.08-(-0.04)}35.00 + \frac{0.08-0.05}{0.08-(-0.04)}20.00\right] = 29.76$$

Nå kan vi finne opsjonsverdien i periode 0:

$$C_{0A} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.25)}{0.25-(-0.25)}29.76 + \frac{0.25-0.05}{0.25-(-0.25)}0.00\right] = 17.01$$

Som ventet, siden det er lenger tid til forfall, er opsjonen mer verdt, selv om veksten i siste periode er mindre enn i første.

På samme måte finner vi for aksjen B at opsjonen er verdt

$$C_{uB} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.04)}{0.08-(-0.04)}18.80 + \frac{0.08-0.05}{0.08-(-0.04)}5.60\right] = 14.76$$

I dag er opsjonen verdt:

$$C_{0B} = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05-(-0.10)}{0.10-(-0.10)}14.76 + \frac{0.10-0.05}{0.10-(-0.10)}0.00\right] = 8.44$$

Endringen i opsjonsverdi er større for B enn for A. For begge er lenger tid til forfall positivt, men for B øker volatiliteten og den avtar for A.

Kapittel 8

Eksamen 2014

8.1

8.1.1

Prisen på en obligasjon som betaler en årlig rente er:

$$B = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^T} + \frac{M}{(1+r)^T} \tag{8.1}$$

Utregning av obligasjonens pris i denne oppgaven er gitt av tabell 8.1

Tabell 8.1 Prisen på obligasjonen

År	KS	Rente-faktor	Nåverdi
1	5	0.9302	4.65
2	5	0.8653	4.33
3	5	0.8050	4.02
4	5	0.7488	3.74
5	5	0.6966	3.48
5	100	0.6966	69.66
Pris			89.89

Rentefaktoren er

$$\text{Rentefaktor} = \frac{1}{(1+r)^t}$$

8.1.2

En nullkupongobligasjonen betaler ikke renter i perioden frem til forfall. Ved forfall innløses M. Det kan vises at avkastning til forfall for en nullkupongobligasjon er:

$$y_T = \left(\frac{M}{B}\right)^{1/T} - 1 \tag{8.2}$$

For år 5 får vi at avkastning frem til forfall er:

$$y_5 = \left(\frac{50.00}{34.73}\right)^{1/5} - 1 = 0.0756 \qquad 7.56\%$$

De øvrige avkastningene til forfall er vist i tabell 8.2.

Tabell 8.2 Avkastning til forfall for de ulike nullkupongobligasjonene

År	1	2	3	4	5	5
Pålydende	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	1000.00
Pris	47.17	44.08	40.81	37.44	34.73	694.62
Avkastning	6.00	6.50	7.00	7.50	7.56	7.56

Avkastningskurven er altså stigende.

8.1.3

Vi kan beregne prisen på obligasjonen ved hjelp av avkastning til forfall ut fra følgende sammenheng:

$$B(T) = \frac{C}{(1+y_1)^1} + \frac{C}{(1+y_2)^2} + \cdots + \frac{C+M}{(1+y_T)^T} \tag{8.3}$$

hvor $B(T)$ markerer at dette er en kupongobligasjon med T år til forfall. Innsetting gir umiddelbart:

$$\begin{aligned} B(T) &= \frac{5}{1.060} + \frac{5}{1.065^2} + \frac{5}{1.070^3} + \frac{5}{1.075^4} + \frac{5}{1.0756^5} + \frac{100}{1.0756^5} \\ &= 4.717 + 4.408 + 4.081 + 3.744 + 3.473 + 69.462 \\ &= \underline{89.89} \end{aligned}$$

som er det samme som vi fikk for beregningen av prisen på kupongobligasjonen. Vi kan altså bruke avkastningen til forfall for et sett nullkupongob-

ligasjoner til å prise obligasjonen med kupongutbetalinger. Nullkupongobligasjonene replikerer til sammen kupongobligasjonen.

8.2

8.2.1

Vi bestemmer kravet til avkastning fra kapitalverdimodellen (KVM):

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i \tag{8.4}$$

hvor $E(r_i)$ er forventet avkastning på aksje i, eller avkastningskravet, r_f er risikofri rente, $E(r_m)$ er forventet avkastning på markedsporteføljen og β_i er aksjens følsomhet overfor endringer i markedsporteføljen.

β_i er ikke oppgitt direkte, men vi kjenner dens verdi ut fra sammenhengen

$$\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \cdot \rho_{im} \tag{8.5}$$

Her er σ_i volatiliteten til aksje i, σ_i volatiliteten til markedsporteføljen og ρ_{im} er korrelasjonen mellom aksjen og markedsporteføljen. Alle de opplysningene vi trenger for å beregne β_i er gitt i oppgaven. For aksje B har vi dermed:

$$\beta_B = \frac{15}{10} \cdot 0.75 = 1.13$$

og kravet til avkastning er:

$$E(r_B) = 3.00 + (7.00 - 3.00)1.13 = 7.50$$

Vi gjør tilsvarende for de andre aksjene og har resultatene i tabell 8.3.

8.2.2

Tabell 8.3 viser også viser også en beregning av alfa. Alfa er meravkastning utover kravet til avkastning $\alpha = r_{i,ny} - E(r_i)$. I likevekt skal $\alpha = 0$, men ny informasjon kan bidra til at $\alpha \neq 0$.

Ut fra opplysningene i tabell 8.3 ville jeg investere i aksjene B, D og E, og jeg ville selge i aksjene A og C.

Tabell 8.3 Beregning av krav til avkastning for aksjene

Sel-skap	Forventet avkastning	Beta	Krav til avkastning	Alfa
A	18.00	4.00	19.00	-1.00
B	15.00	1.13	7.50	7.50
C	7.00	1.20	7.80	-0.80
D	7.00	0.30	4.20	2.80
E	3.00	-0.10	2.60	0.40
Marked	7.00	1.00	7.00	0.00
Risikofri	3.00			

8.2.3

KVM impliserer at en investor bør holde markedsporteføljen. Men det er ganske vanlig at individuelle investorer underdiversifiserer, enten pga. **favoritter**, dvs. man investerer i selskaper man kjenner eller har en forkjærlighet for, for eksempel fotballklubber, eller for **naboeffekten**, dvs. det at man investerer i selskaper som naboer eller venner holder med.

Studier basert på investorers psykologiske mekanismer har brukt ulike forklaringer på underdiversifisering. Det kan være *overdreven selvtillit* eller *sensasjonsoppsøking*. Et tegn på overdreven selvtillit oppstår når man mener man har bedre innsikt i verdsettingen av en aksje enn investorer flest. Sensasjonsoppsøking finner sted når man blir inspirert av det neste spennende investeringsmuligheten. Med teknologiaksjer har dette blitt å lete etter "det neste Microsoft".

8.3

8.3.1

Vi ser først på selskapets stilling i starten se tabell 8.4.

Tabell 8.4 Sjans' mulige innbetalinger etter ett år

	Tilstand			
	Gunstig 50%	Ugunstig 50%	Forventet verdi	$NV(r = 10\%)$
Selskapet	180	115	147.50	134.09
Långiverne	110	110	110.00	100.00
Eierne	70	5	37.50	34.09

Vi ser at prosjektet er lønnsomt, idet $NNV = 143.18 - 100 = 43.18$ og det bør derfor gjennomføres.

8.3.2

Nå får Sjans et nytt prosjekt B som er helt uavhengig av prosjekt A. Vi ser på hvordan dette virker inn på betalingene til långivere og eiere. Siden prosjektene er uavhengige, kan gunstigtilstanden for B inntreffe med like stor sannsynlighet i både gunstig- og ugunstigtilstanden for A.

Tabell 8.5 Oversikt over selskapsverdier ved ulike mulige kombinasjoner av A og B. G er Gunstig tilstand, U er Ugunstig.

	Tilstander A		
Tilstander B	G: 180	U: 115	$E(A) = 147.50$
G: 100	280	215	247.50
U: -100	80	15	47.50
$E(B) = 0$			
Sum prosjekter	180	115	147.50

Prosjekt B har altså forventet verdi 0 og dermed en negativ netto nåverdi. Prosjektet burde følgelig ikke gjennomføres. Vi fordeler verdiene i midtruten hvor prosjektene møtes på eiere og långivere, se tabell 8.6.

Tabell 8.6 Fordeling av selskapsverdier på långivere og eiere ved ulike mulige kombinasjoner av A og B

	Tilstander A		
Tilstander B	G: 180	U: 115	$E(A) = 147.50$
G: 100	$D = 110$	$D = 110$	110.00
	$E = 170$	$E = 105$	137.50
U: -100	$D = 80$	$D = 15$	47.50
	$E = 0$	$E = 0$	0.00
$E(B) = 0$			
$E(D)$	95	62.50	78.75
$E(E)$	85	52.50	68.75

Nåverdien av gjeld er 71.59 og for egenkapitalen 62.50. Forskjellen i nåverdi for långiverne er -28.41 ved også å velge prosjekt B, det samme som eierne vinner med motsatt fortegn. Det vil altså lønne seg for eierne å gjennomføre prosjekt B. Eierne får i stand en risiko-overveltning på långiverne ved hjelp av et prosjekt med negativ NNV.

8.3.3

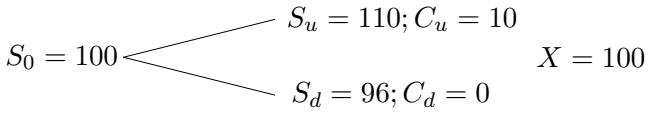
Denne tilstanden kan ikke opprettholdes i et fungerende marked. For det første vil man anta at långiverne gjennomskuer konsekvensene av å akseptere prosjekt B. De vil derfor ikke låne mer enn 67.05, den neddiskonterte forventede verdien av lånet. For det andre vil man skrive kontrakter med selskapet som forbyr denne type handlinger. Vi må vente at långiverne sikrer seg mot at selskapsledelsen velger en mer risikabel investeringsstrategi.

8.3.4

Vi kan tenke på selskapet som en opsjon. Eierne har en kjøpsopsjon på selskapets verdier med utøvelsespris lik gjelden. I utgangspunktet har selskapet bare ett prosjekt, A. Ved å utvide selskapet med prosjekt B, øker ikke selskapsverdien, men selskapets volatilitet øker. Økt volatilitet øker generelt en kjøpsopsjons verdi. I dette tilfellet øker eierverdiene på bekostning av långiverne.

8.4

I dette tilfellet må vi bruke en binomisk prismodell. Etter en periode har vi følgende:



Figur 8.1: Aksjens prisprosess og opsjonens verdi i to tilstander

Vi har sammenhengene

$$S_u = S_0(1+u) = 100 \cdot 1.10 = 110; \qquad S_d = S_0(1+d) = 100 \cdot 0.96 = 96$$

8.4.1

Det kan vises at opsjonsprisen for en enperiodisk opsjon er:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}c_u + \frac{u - r_f}{u-d}c_d\right] \tag{8.6}$$

Utregning gir nå:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1.05}\left(\frac{0.05-(-0.04)}{0.10-(-0.04)}10.00+\frac{0.10-0.05}{0.10-(-0.04)}0.00\right) \\ &= \frac{1}{1.05}(6.43) \\ &= \underline{6.12} \end{aligned}$$

8.4.2

Det kan alternativt investeres i en likeverdig portefølje av aksjer og et lån. Den skal gi samme kontantstrømmer som opsjonen. Vi kan sette:

$$\Delta S_0 + B \begin{cases} \Delta S_u + (1+r_f)\,B = C_u \\ \Delta S_d + (1+r_f)\,B = C_d \end{cases}$$

Figur 8.2: Verdien av en porteføljen: To sluttverdier er mulige.

Vi ønsker å finne ut hvor stor andel av aksjen vi bør investere i (Δ) og hvor stort lån vi bør ta opp. Fra figur 8.2 har vi to ligninger og to ukjente, Δ og B:

$$\begin{aligned} \Delta S_u + (1+r_f)\,B &= C_u \\ \Delta S_d + (1+r_f)\,B &= C_d \end{aligned}$$

dvs. vi kan løse for de to ukjente, Δ og B. Vi har altså:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \qquad \Delta \geq 0 \tag{8.7}$$

og

$$B = \frac{C_d - S_d\Delta}{1+r_f} \qquad B \leq 0 \tag{8.8}$$

Innsetting av verdier vise at:

$$\Delta = \frac{10.00-0.00}{110-96} = 0.71; \qquad B = \frac{0.00-96.00\cdot 0.71}{1.05} = -65.31$$

Vi skal altså holde en andel på ca. 71% av porteføljen i aksjen og balansere dette med et lån på 65.31.

Siden porteføljen og opsjonen har samme kontantstrømmer i periode 1, må

de også ha samme verdi i periode 0. Dermed har vi opsjonens pris:

$$C_0 = \Delta S_0 + B \tag{8.9}$$

Det betyr at vi har $c_0 = 0.71 \cdot 100 - 65.31 = \underline{6.12}$, som altså er den samme som vi fikk ved hjelp av formel.

8.4.3

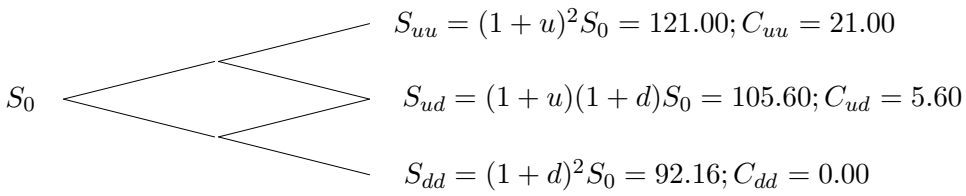
Vi bruker på ny (8.6):

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1.05}\left(\frac{0.05-(-0.04)}{0.20-(-0.04)}20.00 + \frac{0.20-0.05}{0.20-(-0.04)}0.00\right) \\ &= \frac{1}{1.05}(7.50) \\ &= \underline{7.14} \end{aligned}$$

Siden $u = 0.20$ nå og størrelsene ellers er uforandret, betyr det at volatiliteten i aksjen har økt. Opsjonsverdien har følgelig økt, som den skal gjøre.

8.4.4

Vi skal nå vurdere opsjonen hvis forfall først er om to år. Vi må først spesifisere prisprosessen. Etter to perioder kan vi ha to påfølgende økninger eller reduksjoner. I tillegg har vi to tilfeller da prisen veksler. I det ene tilfellet går prisen opp, for så å falle i siste periode. I det andre tilfellet kan prisen falle, for så å øke i siste periode. Figur 8.3 gir oversikt over mulighetene og de tilhørende prisene.



Figur 8.3: Aksjens prisprosess i to perioder: Tre sluttverdier er mulige.

Vi kan regne oss frem til opsjonsprisen ved først å beregne opsjonsverdiene i periode 1 for de to trekantene til høyre i figur 8.3 og så regne ut opsjonsprisen i periode 0 fra verdiene i periode 1. Men det er lettere å bruke risikonøytral

prising. Definer sannsynlighetene

$$q = \frac{r_f - d}{u - d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} \tag{8.10}$$

Da kan vi bruke formelen for risikonøytral prising i to perioder:

$$C_0 = \frac{1}{(1 + r_f)^2} \left[q^2 c_{uu} + 2q(1 - q)c_{ud} + (1 - q)^2 c_{dd} \right] \tag{8.11}$$

Vi finner at q og $1 - q$ er:

$$q = \frac{0.05 - (-0.04)}{0.10 - (-0.04)} = 0.6429; \qquad 1 - q = \frac{0.10 - 0.05}{0.10 - (-0.04)} = 0.3571$$

Vi ser at $q + (1 - q) = 0.6429 + 0.3571 = 1.0000$ som sannsynligheter skal være. Nå kan opsjonsverdien regnes ut fra (8.11):

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{(1.05)^2} \left(0.6429^2 21.00 + 2 \cdot 0.6429 \cdot 0.3571 \cdot 5.60 + 0.3571^2 0.00 \right) \\ &= \frac{1}{(1.05)^2} (8.68 + 2.57) \\ &= \underline{10.20} \end{aligned}$$

Ved at tid til forfall er utvidet til to år, har altså opsjonen økt betydelig i verdi. Dette er igjen osm forventet. Med lenger tid til forfall er det større sjanse for at aksjen vil nå høyere verdier.

Kapittel 9

Kontinuasjon vår 2015

9.1

9.1.1

Her kan *eier-* og *interessentperspektivet* (shareholder/stakeholder) diskuteres. Ulike interessenter må listes opp, slik som ansatte, leverandører, kunder, det offentlige etc.

- Eierperspektivet gir en enkel målfunksjon, som bla. innebærer en enkel beslutningsregel: Velg prosjekter med positiv netto nåverdi.
- Med spredt eierskap oppstår agentproblemer. Her kan det utbroderes.
- Interessentperspektivet impliserer en uklar målfunksjon, idet problemer oppstår med aggregering av ulike interessenters målfunksjon i en felles målfunksjon. F.eks. vil eieres og leverandørers målfunksjoner være motsatte.
- Løser interessentperspektivet agentproblemet? Muligheter for drøfting.

Her premieres selvstendig vurdering av spørsmålet.

9.1.2

Anta daglig leder (DL) arbeider i et selskap med spredt eierskap. Vi kan videre anta at eierne har aksjer i flere selskaper, dvis. de holder en diversifisert portefølje. DL er udiversifisert, dvs. inntekten er i holvedsak knyttet til arbeidet for selskapet, og en stor del av hans eller hennes kunnskapskapital er bundet til selskapet.

DL og eierne kan dermed ha ulik risikoholdning. Eierne har diversifisert bort den selskapsspesifikke risikoen, DL har det ikke. DL vil derfor være mer

risikoavers enn eierne, og vil derfor ha en tendens til å velge bort prosjekter med høy risiko.

9.1.3

Prosjektet fører altså til høyere volatilitet i aksjen, mens forventet avkastning er den samme. Vi må tolke "forventet avkastning" som avkastningen på prosjektet. Her kan man utnytte at eierne har en kjøpsopsjon på selskapets verdi, der utøvelseskurs er selskapets gjeld. Da er det enkelt å vise at økt volatilitet øker verdien for eierne. De vil altså isolert sett være interessert i å øke risikoen i selskapets aksje.

Det spørres bare om eierne. Men det kan også nevnes at långiverne har en motsatt interesse. De ønsker ikke at selskapet tar en større risiko og dermed setter evnen til tilbakebetaling i fare. Den forventede verdien for långiverne reduseres jo som følge av økt volatilitet.

9.2

Dette er en porteføljeoppgave. Det kan vises at porteføljens avkastning er definert ved

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2, \tag{9.1}$$

og at porteføljens risiko er:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{9.2}$$

9.2.1

Det kan vises at porteføljen med lavest varians kan skrives:

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{9.3}$$

Vi finner da w:

$$w = \frac{84 - 2.64 \cdot 9.17 \cdot 0.05}{6.96 + 84 - 2.64 \cdot 9.17 \cdot 0.05} = 0.923$$

Vi skal altså plassere 92.3% i aksje 1.

Da har vi avkastningen på porteføljen:

$$E(r_p) = 0.923 \cdot 3.20 + (1 - 0.923) \cdot 14 = 4.03$$

Risikoen er:

$$\sigma_p = \sqrt{0.923^2 6.96 + (1 - 0.923)^2 84^2 + 2 \cdot 0.923(1 - 0.923)2.64 \cdot 9.17 \cdot 0.05} = 2.57.$$

9.2.2

Vi får en risikofri rente r_f som er på 2.00%. Vi kombinerer denne med minimum-variansporteføljen (MVP) og finner meravkastningen til den nye, sammensatte porteføljen $E(r_{pr})$:

$$\text{Sharpe-forholdet} = \frac{E(r_{pr}) - r_f}{\sigma_{pr}} = \frac{\text{Porteføljens meravkastning}}{\text{Porteføljens volatilitet}} \tag{9.4}$$

Meravkastningen avhenger selvsagt av hvor mye som er plassert i den risikofrie eiendelen og hvor mye som er investert i aksjeporteføljen. Hvis andelen i den risikofrie eiendelen er 100%, er jo meravkastningen 0, men hvis alt er investert i aksjeporteføljen, er meravkastningen $4.03 - 2.00 = 2.03$. Meravkastningen vil altså variere mellom 0 og 2.03.

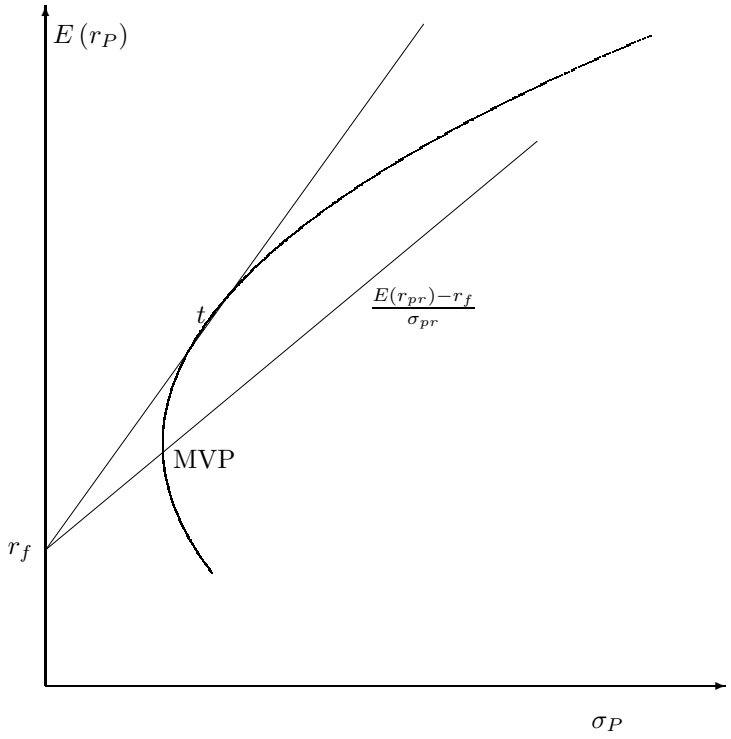
9.2.3

Vi vet at når en risikabel eiendel, f.eks. en portefølje, kombineres med en risikofri eiendel, er linjen rett med utgangspunkt i avkastningen til den risikofrie eiendelen og opp til porteføljen av risikable eiendeler, se figur 9.1. Her er r_f kombinert med MVP i utgangspunktet.

Vi kan forbedre kombinasjonen (r_f, MVP) opp til tangeringspunktet t. Det betyr at vi kan gjøre kombinasjonen bedre opp til den maksimale verdien av Sharpe-forholdet.

Her kreves det ikke at man finner det maksimale Sharpe-forholdet. Men figur 9.1 viser at vi må ha mer av aksje 2 inn i porteføljen, dvs. $w < 0.923$. Vi kan regne ut Sharpe-forholdet til (r_f, MVP)-kombinasjonen med et annet valg av w i aksjeporteføljen. Velger man f.eks. $w = 0.80$, er $E(r_p) = 5.36$ og $\sigma_p = 2.86$. Sharpeforholdet (SH) er da:

$$SH = \frac{5.36 - 2.00}{2.86} = 1.17$$



Figur 9.1: Kombinasjon av et risikofritt prosjekt og en risikabel portefølje

som er bedre enn Sharpe-forholdet ved MVP:

$$SH_{MVP} = \frac{4.03 - 2.00}{2.57} = 0.79.$$

9.3

9.3.1

Den forventede verdien av prosjektet til Hitt $E(P)$ om ett år er

$$E(P) = 0.5 \cdot 150 + 0.5 \cdot 25 = 87.50$$

Investeringen er 75. Vi diskonterer $E(P)$ med risikofri rente, siden kapitalkostnaden etter kapitalverdimodellen

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i = r_f \tag{9.5}$$

når $\beta_i = 0$. Netto nåverdi er dermed:

$$NNV = \frac{87.50}{1.05} - 75.00 = 8.33.$$

Prosjektet har altså i utgangspunktet positiv forventet netto nåverdi og bør gjennomføres. Egenkapitalen er altså lik selskapets verdi som nå inneholder verdien av prosjektet, dvs. $V_U = E = 75.00 + 8.33 = 83.33$.

9.3.2

I et perfekt kapitalmarked vil lånerenten være den samme som risikofri rente. Vi antar at lånet på 75 er beløpet i år 1. Fordelingen på gjeld og egenkapital vises i tabell 9.1.

Tabell 9.1 Fordeling av kontantstrøm på lån og EK hvis prosjektet finansieres med lån eller egenkapital

	Gunstig	Ugunstig
Kontantstrøm	150.00	25.00
Lånefinansiering		
Lån	75.00	25.00
Egenkapital	75.00	0.00
EK-finansiering		
Egenkapital	150.00	25.00

Kommentarer. Med EK-finansiering bærer eierne all risiko selv. Hvis det ugunstige tilfellet slår til, vil eierne tape 50 siden investeringen er 75. Realiseres det gunstige tilfellet, vil eierne ha økt egenkapitalen med 75. Hvis prosjektet lånefinansieres, unngår eierne tapet i det ugunstige tilfellet, men beholder 75 i økt egenkapital i det gunstige tilfellet. Risikoen for tap er nå veltet over på långiverne. Den forventede tilbakebetaling av gjelden er $0.5(75+25) = 50$, og de taper 50 hvis det ugunstige tilfellet inntreffer.

Långiverne vil neppe se seg tjent med slike utsikter. De vil kreve høy rente for å låne til prosjektet, sikkerhet i andre deler av eiernes formue, og bindende forpliktelser fra Hitts side for å unngå det ugunstige utfallet.

9.3.3

Vi antar igjen at lånerente er den samme som den risikofrie rente. For full EK-finansiering har vi allerede funnet netto nåverdi. Hvis prosjektet lånefinansieres, er nåverdien av forventet egenkapital $E = 0.5 \cdot (75.00 + 0.00)/1.05 = 35.71$ når vi antar at långiverne ikke legger noen restriksjoner

på lånet i form av høyere lånerente eller andre kostnadskrevende tiltak. I forhold til EK-finansiering, har altså den forventede netto nåverdi av egenkapitalen økt betydelig, fra 8.33 til 35.71.

Forventet nåverdi av långivernes kapital er:

$$NV_D = 0.5 \cdot \frac{75.00 + 25.00}{1.05} = 47.62$$

Långiverne har altså et forventet tap på 25.60 på sitt opprinnelige utlån på 75.00. Selskapets verdi er som før: $V_L = E+D = 35.71+47.62 = 83.33$.

Långiverne vil gjennomskue denne risiko-overveltingen som eierne legger opp til. De vil derfor enten ikke delta i finansieringen og/eller kreve vilkår som sikrer deres kapital.

9.3.4

Krise- og konkurskostnader (KK) er 10 i det svake alternativet. I dette alternativet får eierne ingenting og långivernes utbetaling er altså nå 15. Nåverdien av lånet er denne gang:

$$NV_D = 0.5 \cdot \frac{75.00 + 15.00}{1.05} = 42.86 \tag{9.6}$$

Nåverdien av KK er altså 4.76. Egenkapitalen er i utgangspunktet uendret, slik at ny verdi av selskapet er $V_L = 35.71 + 42.86 = 78.57$.

9.3.5

Det er altså 1 million aksjer i selskapet. Før gjeldsopptaket er da aksjekursen 83.33. Långiverne er ikke villige til å betale KK. Investorene forutser dette og justerer kursen på aksjen ned til 78.57. Vi ser i (9.6) at gjelden nå har verdien 42.86. Det er denne gjelden Hitt nå kjøper tilbake. Hitt vil altså kjøpe

$$\text{Tilbakekjøpte aksjer} = \frac{42.86m}{78.57} = 545,500.83 \sim 545,500 \text{ aksjer}$$

Det er derfor 454,500 aksjer tilbake i selskapet. Den nye aksjekursen er dermed:

$$\text{Aksjekurs} = S_0 = \frac{35.71m}{454,500} = 78.57.$$

9.4

Dette er en opsjonsoppgave hvor vi bruker kjente definisjoner og formler.

9.4.1

Vi bruker formelen fra Black-Scholes-Merton (BSM) for å løse denne delen av oppgaven. Forutsetningene for modellen oppsummeres slik:

- Prisprosessen er kontinuerlig.
- De finansielle markedene er perfekte, dvs. uten transaksjonskostnader og skatter. Short-salg er tillatt, og eiendelene er perfekt oppdelbare.
- Alle investorer kan låne og låne ut til samme risikofrie rente, som er konstant frem til opsjonens forfall.
- Aksjen gir ikke noe utbytte.
- Markedene er komplette, dvs. alle eiendeler i økonomien har en pris, markedene er alltid åpne og handelen skjer kontinuerlig.

BSM-modellen er:

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{9.7}$$

Vi har at $\sigma = 0.40$, $S_0 = 65.00$, $X = 60.00$, $T = 0.5$ og $r_f = 0.05$. Innsetting i (9.7) viser at $C_0 = 10.66$.

9.4.2

Vi skal finne verdien på en salgsopsjon når vi allerede kjenner verdien av kjøpsopsjonen på den samme aksje. Vi går ut fra *salg-kjøps-pariteten*:

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f} X = P_0 + S_0 \qquad \text{eller} \qquad C_0 + \frac{1}{1+r_f} X - P_0 - S_0 = 0 \tag{9.8}$$

Nå er jo salgsopsjonen gitt av de tre andre størrelsene i (9.8):

$$P_0 = C_0 + \frac{1}{1+r_f} X - S_0$$

Har vi altså funnet prisen på en (europeisk) kjøpsopsjon, kan vi altså alltids finne prisen på en tilsvarende salgsopsjon.

T er altså et halvt år. En enkel tilnærming til halvtårsrenten er å dele helårsrenten på to. Vi finner da at prisen på salgsopsjonen bør være:

$$P_0 = 10.66 + \frac{1}{1.025} \cdot 60.00 - 65.00 = 4.20.$$

9.4.3

Salgsopsjonen omsettes for 5.00. Da bør en investor være i stand til å få en *arbitrasjegevinst* på $5.00 - 4.20 = 0.80$ pr. opsjon.

Tabell 9.2 Realisering av arbitrasje salgsopsjonen selges for 5.00

Handlinger i dag $t = 0$	Betalinger
Selg aksje, motta S_0	65.00
Selg salgsopsjon, motta P_0	5.00
Kjøp en kjøpsopsjon, betal C_0	-10.66
Lån ut $\frac{1}{1+r_f}X$	-58.54
Samlet kontantstrøm $t = 0$	0.80

Arbitrasjegevinsten på 0.80 realiseres i dag. Samtidig sikrer (9.8) at kontantstrømmen ved forfall er lik null. Vi tjener penger i dag og betaler ikke noe ved forfall.

Kapittel 10

Eksamen 2015

10.1

Fra opplysningene i oppgaven kan vi sette

Symbol	Forklaring	Verdi
$EBIT$	Driftsresultat år 1	2000
DIV	Utbetalt dividende år 1	2000
n	Antall aksjer	200
Div	Dividende pr. aksje år 1	10
r_E	EK-kostnad	10%

10.1.1

Vi benytter at prisen på en aksje med konstant dividende i overskuelig fremtid og med en forutsetning om fast kapitalkostnad er

$$S_0 = \frac{Div}{r_E} \tag{10.1}$$

Da har vi $S_0 = 10/0.10 = \underline{100}$.

10.1.2

Vi har varierende vekst i de nærmeste årene. Det innebærer at vi må bruke den generelle formelen for aksjekursen basert på dividendeutbetalinger i

kommende år:

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{S_T}{(1+r_E)^T} \tag{10.2}$$

Det letteste er å dele opp denne kontantstrømmen i tre deler. For det første har vi i det første leddet til høyre i (10.2) to veksthastigheter i henholdsvis fem og tre år. Vi kan da skrive dette leddet som

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} = \sum_{t=1}^{6} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \sum_{t=7}^{9} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} \tag{10.3}$$

Vi vet at $Div_2 = Div_1\,(1+g_1)$, der g_1 er veksthastigheten i de første fem årene. Veksthastigheten i de tre siste vekstårene er g_2. Det siste leddet til høyre i (10.2) kan skrives:

$$\frac{S_T}{(1+r_E)^T} = \frac{1}{(1+r_E)^T} \frac{Div_{T+1}}{r_E} \tag{10.4}$$

siden vi har en evig kontantstrøm fra og med år $T+1$. Nå kan vi beregne høyresidene i (10.3) og (10.4) hver for seg og legge sammen. Vi får resultatet i tabell 10.1.

Tabell 10.1 Beregning av pris

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Div_t		10.00	10.50	11.03	11.58	12.16	12.76	13.02	13.28	13.54	13.54
NV		9.09	8.68	8.28	7.91	7.55	7.20	6.68	6.19	5.74	
$NV\left(\sum_{t=1}^{9} Div_t\right)$	67.33										
Div_{10}/r_E										135.44	
$NV\,(Div_{10}/r_E)$	57.44										
Pris	124.77										

Prisen er altså $S_0 = \underline{124.77}$, ca. 25% høyere enn i tilfellet uten vekst. Vi har brukt *additivitetsprinsippet* for å komme frem til dette resultatet.

10.2

10.2.1

Markedsmodellen er benyttet her:

$$r_{HA} = \alpha + \beta r_{osebx} + u. \tag{10.5}$$

Her er r_{HA} avkastningen til HA og r_{osebx} er avkastningen på markedsindeksen OSEBX. u er et feilledd som fanger opp det vi ikke har forklart med regresjonen. α og β skal beregnes.

Fra markedsmodellen er vi først og fremst interessert i verdien av β. Denne betaen er anslaget på beta i kapitalverdimodellen:

$$r_i = r_f + (r_m - r_f)\,\beta_i \tag{10.6}$$

der r_f er risikofri rente, r_m er forventet avkastning til markedsporteføljen og r_i er forventet avkastning på aksje nr. i. $\beta_m = 1.0$ er beta til markedsporteføljen. Beta til enkeltaksje kan altså være lik markedsporteføljen, eller høyere eller lavere. Beta er et mål på den såkalte systematiske risikoen til markedsporteføljen og til enkeltaksjene.

For å beregne α og β har følgende fremgangsmåte vært benyttet. For det første er det hentet data fra Oslo Børs om HA og den brede aksjekursindeksen OSEBX. Deretter er avkastningen på HA's aksje for hver periode beregnet som $r_{HA} = (S_t/S_{t-1} - 1)\,100$, dvs. vi har brukt aritmetiske avkastninger. Tilsvarende er gjort for OSEBX-indeksen. Til slutt er det gjennomført en enkel regresjon med avkastningen til HA som avhengig variabel og avkastningen på OSEBX som uavhengig variabel. Vi antar at OSEBX er en god tilnærming til markedsporteføljen.

Hvis markedet er rimelig effisient, vil vi vente at $\alpha \approx 0$.

10.2.2

Resultatene fra regresjonen kan skrives:

$$r_{HA} = 0.061 + 1.137 r_{osebx} \tag{10.7}$$

Resultatet viser at $\alpha \approx 0$, og at $\beta_{HA} = 1.137$, dvs. HA-aksjen har noe høyere systematisk risiko enn markedsporteføljen. Vi kan benytte (10.7) til å predikere en forventet avkastning på HA. Antar vi for eksempel at $r_{osebx} = 10\%$, vil vi vente at

$$r_{HA} = 0.061 + 1.137 \cdot 10 = 11.43\%$$

Videre ser vi av tabellene at β_{HA} er signifikant på 1%'s nivå og faktisk enda lavere, mens α ikke er signifikant på vanlig 5%'s-nivå, noe som krever en t-verdi på ca 2.0. Vi kan derfor ikke forkaste en hypotese om at $\alpha = 0$. Tabellene viser videre at $R^2 = 0.148$. Dette viser at regresjonen alt i alt har forklart 14.8% av den totale variasjonen i r_{HA}. Det innebærer at det er mye spredning rundt regresjonslinjen.

10.2.3

For det første kan resultatene nå brukes til å finne EK-kostnaden til HA ved hjelp av kapitalverdimodellen (10.6). Som en illustrasjon har vi at dersom $r_f = 5.0\%$ og $r_m = 10.0\%$, vil den forventede EK-kostnaden være:

$$r_{HA} = 5.0 + (10.0 - 5.)1.137 = 10.67\%$$

Vi bruker gjerne også uttrykket krav til EK-kostnad om denne størrelsen.

Den andre anvendelsen kommer i porteføljeforvaltning. En forvalter vil gjerne vite hvor risikabel porteføljen til sammen er, slik at risikoen er i overensstemmelse med målsettingene for porteføljen. Det kan vises at porteføljens beta er den veide summen av enkeltbetaene i porteføljen, med markedsverdien av den enkelte aksje over samlet markedsverdi i porteføljen som vekt. Kjenner man enkeltaksjenes beta, kan man altså finne porteføljens beta.

10.3

Oppgaven handler om kapitalstruktur, dvs. fordelingen av gjeld og egenkapital i finansieringen av foretaket.

10.3.1

Generelt har vi at

$$V = E + D \tag{10.8}$$

Når kapitalstrukturen ikke påvirker selskapet verdi, må vi ha at

$$V_U = V_L \qquad \text{og} \qquad E_U = E_L + D \tag{10.9}$$

Vi har altså at rentebetalingen er $r_D D = 0.05 \cdot 7500 = 375$.

	Utmark		Utslått	
	Lav KS	Høy KS	Lav KS	Høy KS
EBIT	800.00	1600.00	800.00	1600.00
Renter	0.00	0.00	375.00	375.00
Dividende	800.00	1600.00	425.00	1225.00

10.3.2

Når vi eier 10% i Utmark vil vi få kontantstrømmen $0.10 \cdot 800 = 80$ når KS er lav og tilsvarende 160.00 når den er høy. Kan vi duplisere denne kontantstrømmen? Vi kan utnytte at *EK i selskap uten gjeld* er det samme som *EK i selskap med gjeld pluss gjeld* etter Miller og Modiglianis teori om verdien av selskapet når det er et perfekt kapitalmarked. Dette innebærer at det ikke er skatter, ingen transaksjonskostnader og ingen asymmetrisk informasjon. Videre kan investorer og bedrifter låne og låne ut til samme lånerente.

Når disse forutsetningene er til stede, kan det vises at

$$V_E = V_L \tag{10.10}$$

Verdien av selskapet uten gjeld er altså lik et tilsvarende selskap med gjeld. Videre har vi at

$$V = E + D \tag{10.11}$$

noe som innebærer at

$$E_U = E_L + D \qquad \text{og} \qquad E_L = E_U - D \tag{10.12}$$

Vi kan kjøpe 10% av egenkapital og 10% av gjelden i B. Det gir oss tilgang

til kontantstrømmen:

$$EBIT_{lav} = 0.10 \cdot 425 + 0.10 \cdot 375 = 80.00$$
$$EBIT_{hy} = 0.10 \cdot 1225 + 0.10 \cdot 375 = 160.00$$

Vi har altså duplisert kontantstrømmen til Utmark ved å kjøpe egenkapital og gjeld i Utslått. Vi har altså utnyttet den venstre sammenhengen i (10.12).

10.3.3

Dette er det motsatte problemet av det vi hadde i forrige spørsmål. Vi bruker den høye sammenhengen i (10.12). Vi vil replikere, eller etterligne, kontantstrømmen fra det å eie i Utslått med å eie i Utmark og samtidig ta opp et lån på privat hånd. Vi utnytter altså at *EK i selskap med gjeld* er det samme som *EK i selskap uten gjeld pluss privat lån*. Vi låner tilsvarende 10% av gjelden i Utslått og kjøper 10% av aksjekapitalen Utmark. Det gir kontantstrømmene i de to tilstandene:

$$EBIT_{lav} = 0.10 \cdot 800.00 - 0.10 \cdot 375.00 = 42.50$$
$$EBIT_{hy} = 0.10 \cdot 1600.00 - 0.10 \cdot 375.00 = 122.50$$

Vi har altså gjenskapt kontantstrømmene i Utslått ved å kjøpe aksjer i Utmark og samtidig ta opp et lån tilsvarende 10% av gjelden i Utslått.

10.4

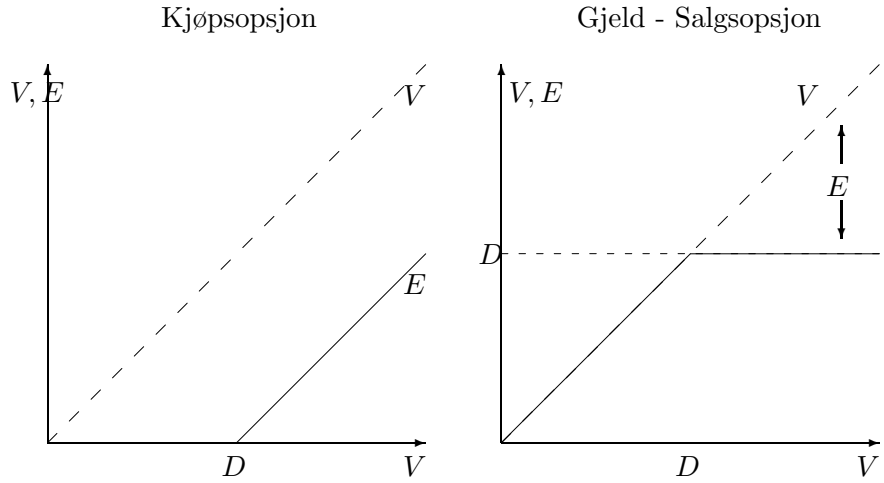
10.4.1

Vi har altså at

$$V = E + D \qquad E = V - D \qquad D = V - E \tag{10.13}$$

Skal egenkapitalen være positiv, må $V > D$. Vi kan tenke på egenkapitalen som en kjøpsopsjon med utøvelseskurs lik gjelden D. Gjelden er på sin side sammensatt av det lånte beløpet minus en salgsopsjon utstedt til eierne med utøvelseskurs lik gjeldens pålydende D. Situasjonen er fremstilt i figur 10.1.

De heltrukne linjene viser at egenkapitalen kan oppfattes som en kjøpsopsjon, gjelden som et lån og en utstedt salgsopsjon til eierne. I diagram-



Figur 10.1: Egenkapitalen som en kjøpsopsjon, gjelden som å holde gjeld og utstede en salgsopsjon til eierne

met til høyre går det frem at eierne selvsagt vil benytte sin salgsopsjon når $E < V - D$.

10.4.2

Det kan vises at prisen på en opsjon avhenger av dens volatilitet, dvs. flyktigheten i den underliggende prisprosessen. Jo høyere volatilitet, jo større verdi på opsjonen. Overført til egenkapitalen som kjøpsopsjon, betyr dette at egenkapitalen er mer verdt, jo større volatilitet aksjen har. Samtidig betyr jo større volatilitet at sannsynligheten for konkurs øker. Konflikter kan oppstå mellom eiere og långivere over nivået på foretakets volatilitet. Långiverne har som målsetting å sikre sine penger og vil ha en tendens til å motsette seg større volatilitet.

10.4.3

De kan frykte *risiko-overveltning*, dvs. at selskapet øker risikoen, noe som øker selskapets verdi, men som påfører långiverne en større risiko. Långiverne bruker låneavtalen til å begrense sin risiko eller å søke kompensasjon for økt risiko. For det første kan de øke lånerenten hvis de ser at at foretaksrisikoen øker. Dernest kan de legge begrensninger på hvilke investorer som har prioritet i utbetalinger. For eksempel kan det komme et krav om at

selskapet ikke skal foreta utbetalinger av dividende før gjeldsandelen er nede på et akseptabelt nivå, slik som 40%. Et slikt krav inneholder ofte også at selskapet ikke tar opp nye lån. Et tredje moment er at långiverne kan kreve begrensninger i selskapets investeringsbeslutninger både når det gjelder omfang og type. Långiverne kan frykte at selskapet foretar investeringer med lav sannsynlighet for å lykkes, men stor gevinst hvis det lykkes.

Kapittel 11

Utsatt eksamen 2016

11.1

11.1.1 Aksjeselskap og partnerskap

- Partnerskap. Selskapet eies og drives av flere personer sammen. Eierne er ansvarlige for gjeld.
- Aksjeselskap. Selskapet eies av investorer som bare har ansvar for den kapital som er skutt inn i foretaket. Eierne har *begrenset ansvar*.

Aksjeselskapets *fordeler* ligger i to forhold. For det første er aksjeselskapet et eget rettssubjekt som innebærer at eierne er bare ansvarlige for den kapital som er skutt inn. For det andre er tilgangen på kapital enkel. Selskapet kan ta opp lån på egen hånd og det kan hente inn ny egenkapital hvis det trengs. Et aksjeselskap gjør det relativt enkelt å kjøpe og selge eierandeler, noe som har betydning ved generasjonsskifter og generelt ved eierskifter. Dette gjelder alle slags aksjeselskaper, men fordelene forsterkes hvis selskapet er børsnotert. *Ulemper* kommer først og fremst når selskapet blir stort og uoversiktlig. Det kan bli en stor avstand mellom hva eierne ønsker for selskapet og hva ledelsen ønsker. Agentkonflikter kan opptre når eierne ikke er i stand til å følge godt nok med, eller ledelsen har andre ønsker for selskapet enn det eierne har.

Et partnerskaps *fordeler* er først og fremst den nære tilstedeværelsen til driften av selskapet. Et partnerskap er ofte å finne blant arkitekter, advokater, leger og revisorer. Hver partner har gjerne sin egen kundeliste og så samarbeider man om markedsføring og fellestjenester, slik som et forværelse. Det er godt samsvar mellom partnernes individuelle ønsker og selskapets interesser. *Ulemper* kan oppstå hvis man møter begrensninger på tilgang på kapital

i tider man ønsker å ekspandere, og ved eierskifter. En partners verdi ved uttreden kan være vanskelig å fastslå.

11.1.2 Børsnotert og ikke børsnotert

Fordelene for et børsnotert selskap er at det er forholdsvis lett å hente inn ny kapital. Man kan utvide tallet på aksjer og selge de nye i markedet. Siden aksjen er notert, er det rimelig enkelt for investorer å anslå prisen på de nye aksjene. Markedet gir så å si en uavhengig tredjeparts vurdering av prisen. Videre vet investorer at å investere i børsnoterte selskaper, er det forholdsvis lett å komme ut av aksjen igjen. De vil derfor ikke kreve en risikopremie for å sitte på aksjen, med andre ord, egenkapitalkostnaden for børsnoterte selskaper er lavere enn for ikke børsnoterte.

11.1.3 Aksjeselskapsformer

I Norge har vi to typer, AS og ASA. Et børsnotert er alltid et ASA, men ikke alle ASA'er er børsnoterte. Det er flere forhold som skiller AS fra ASA, selv om det meste av lovgivningen for de to aksjeklassene er felles. I et AS kan daglig leder og styreleder være samme person, det er ikke lov i ASA. Et ASA krever mer omfattende rapportering. Et ASA har også bestemmelser om kvotering for kvinner.

11.2

11.2.1

Størrelsen på avkastning og risiko finner vi etter formlene

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{11.1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}}\end{aligned} \tag{11.2}$$

Symbolene har de vanlige definisjonene. Vi skal finne avkastning og risiko

når $w = 0.5$. Avkastningen er etter (A.4):

$$E\left(r_p\right) = 0.5(10 + 4) = 7.0\%,$$

og risikoen er fra (A.5):

$$\begin{aligned} &= \left(0.5^2 15^2 + 0.5^2 10^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 0.1\right)^{0.5} \\ &= 0.5(225 + 100 + 30)^{0.5} = 9.42. \end{aligned}$$

11.2.2

Minimum/variansporteføljen finner vi etter formelen

$$w_{min} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{11.3}$$

som gir:

$$w = \frac{10^2 - 15 \cdot 10 \cdot 0.1}{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 0.1} = 0.288.$$

Avkastning er da $E\left(r_p\right) = 5.73$ og risikoen er $\sigma_p = 8.69$ etter formlene ovenfor.

11.2.3

Vi har altså at $\rho = -1.0$. Dette betyr at en oppgang i aksje 1 motsvares av en like stor nedgang i aksje 2. Dette er svar på det første spørsmålet i deloppgaven. En perfekt negativ korrelasjon betyr at vi kan finne en porteføljе som er risikofri. Vi kan vise dette ved å bruke (A.6). Vi kan også leke oss med en utledning.

Utgangspunktet er at vi kan finne en porteføljе som gir $\sigma_p = 0$. Vi kan skrive:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2(-1)} = 0.0 \tag{11.4}$$

En enkel omforming gir:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 - 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 + (1-w)^2\sigma_2^2} = 0.0$$

Under rottegnet gjenkjenner vi nå en kvadrert sum av to ledd:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{(w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2)^2} = 0.0 \\ &= w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2 = 0.0 \\ &= w\sigma_1 - \sigma_2 + w\sigma_2 = 0.0\end{aligned}$$

som gir muligheten for å isolere w:

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{11.5}$$

Det betyr at $w = 10/25 = 0.40$, følgelig $E(r_p) = 6.4$ og risikoen kan vi vise er:

$$\sigma_p = w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2 = 0.4 \cdot 15 - 0.6 \cdot 10 = 0.0$$

11.2.4

I denne delene er det viktig å få frem en del momenter:

- Markedsmodellen avslører hvor mye aksjen reagerer på endringer i markedsporteføljen. En koeffisient til r_{osebx} på 1.0 viser at aksjen har like store utslag i aksjekursen som markedsporteføljen har. Denne koeffisienten er en beregning av aksjens beta, som er en sentral størrelse i kapitalverdimodellen (KVM). I utskriften viser det seg at to aksjer har en beta godt over 1.0, mens den tredje, Marine Harvest, er omtrent 1.0. Alle disse tre koeffisientene er sterkt signifikante, dvs. alle tre har signifikansnivå lavere enn 1%. Det er med andre ord et lite slingringsmonn rundt de estimerte verdiene, og vi kan stole på at betaene er i dette området for den perioden som er studert.
- Når vi kjenner aksjens beta, kan vi beregne selskapets kapitalkostnad ved hjelp av KVM. De øvrige elementene i KVM er risikofri rente og avkastning på markedsporteføljen. Dette er offentlig tilgjengelig informasjon. En beta er også nyttig for en porteføljeforvalter som ønsker å holde en bestemt risikoprofil, og dermed kan bruke informasjon om aksjenes beta til å justere risikonivået.
- Den andre koeffisienten, α har verdi nær null og er ikke signifikant, bortsett fra for PGS. $\alpha = 0$ og $\beta \gtreqless 1.0$ er nullhypotesen for testen. Vi kan ikke avvise nullhypotesen for DNB og MH, mens den er delvis avvist for PGS. α er et mål på feilprising i aksjemarkedet. Muligens har den økende usikkerheten om olje- og gassbransjen ført til at modellen ikke fanger opp den prising som foregår imarkedet.

11.3

11.3.1 Perfekte kapitalmarkeder

Et perfekt kapitalmarked har vi når det er ingen skatter eller avgifter, ingen transaksjonskostnader og ingen asymmetrisk informasjon (dvs. både kjøpere og selgere i dette markedet har full informasjon). Da kan et selskaps verdi vurderes ved hjelp av

$$V_E = \frac{EBIT}{r_U} = V_L = \frac{EBIT}{r_U} \tag{11.6}$$

hvor vi har brukt vanlige kjente symboler. Vi kjenner $EBIT$ fra oppgaveteksten. r_U er kapitalkostnaden for et helt EK-finansiert selskap. r_U er derfor også kapitalkostnaden til eiendelene, r_A, som avspeiler den forregtningsmessige risikoen i selskapet. Vi finner r_U fra KVM:

$$E\left(r_U\right) = r_f + \left(E\left(r_m\right) - r_f\right)\beta_i \tag{11.7}$$

som gir

$$r_U = 6 + (12 - 6)1.5 = 15\%.$$

Fra (A.10) har vi da at

$$V_E = \frac{750}{0.15} = 5000$$

for Hel, som er uten gjeld. For Halv må vi justere kapitalkostnaden. Generelt er kapitalkostnaden gitt av

$$r_E = r_U + \left(r_U - r_D\right)\frac{D}{E} \tag{11.8}$$

Vi ser at $r_E = r_U$ når selskapet er uten gjeld, $D = 0$. Vi kjenner alle størrelsene og setter inn:

$$r_E = 15 + (15 - 6)1.0 = 24.$$

Men halvparten av nødvendig kapital er finansiert med gjeld, slik at samlet kapitalkostnad for Halv må justeres med innslaget av gjeld og dens kostnad. Generelt er dette:

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D}r_E + \frac{D}{E+D}r_D = r_U = r_A \tag{11.9}$$

Vi setter inn i (A.11) of finner:

$r_{wacc} = 0.5 \cdot 24 + 0.5 \cdot 6 = 15.$

Siden kapitalkostnaden er den samme som Hel, selskapet uten gjeld, må de to selskapene ha lik verdi, dvs. $V_U = V_L = 5000$. Dette er jo også det ligning (A.10) forteller.

Konklusjonen er da: I et perfekt kapitalmarked er verdien av et selskap ikke påvirket av måten selskapet er finansiert på. Dette var jo konklusjonen til Miller og Modigliani (1958) om at selskapets finansiering ikke påvirker dets verdi.

11.3.2 Bedriftsskatt

Miller og Modigliani introduserte bedriftsskatter i en senere artikkel. Dette er situasjonen her. Det kan vises at verdien til et selskap uten gjeld kan nå skrives:

$$V_U = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} \tag{11.10}$$

Innsetting gir med det samme:

$$V_U = \frac{750(1 - 0.25)}{0.15} = 3750.$$

Det kan også vises at verdien av selskapet med gjeld kan bestemmes fra:

$$V_L = \frac{EBIT \times (1 - \tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} = V_U + \tau_c D \tag{11.11}$$

For å regne ut denne verdien, kreves altså størrelsen D. Fra spørsmål 11.3.1 har vi at $V_U = 5000$, det innebærer jo at $D = 2500$. Dermed finner vi:

$V_L = 3750 + 0.25 \cdot 2500 = 4375$

Det er *renteskattefordelen* i $\tau_c D$ som gjør at selskapet med gjeld er mer verdt enn selskapet uten.3

11.3.3 Skatt på bedrift, inntekt og utbytte

Når alle tre skattetyper introduseres, kan det vises at verdien av et selskap kan skrives:

$$V_L = V_U + \left[1 - \frac{(1-\tau_c)(1-\tau_d)}{(1-\tau_i)}\right] \times D = V_U + N^* \times D \tag{11.12}$$

I dette tilfellet er altså verdien av Hel som før, 3750, siden $D = 0$. Vi har at N^* er:

$$N^* = 1 - \frac{(1-0.25)(1-0.00)}{1-0.25} = 0.00$$

Da har vi altså $V_L = V_U = 3750$. Med like satser på bedrifts- og inntektsskatt kombinert med ingen skatt på utbytte, er vi altså tilbake i Miller og Modiglianis første versjon, slik at selskapets verdi ikke påvirkes av dets finansiering.

11.3.4 Kommentarer

11.4 Opsjon

11.4.1 Opsjonsparitet

11.4.2 Definisjoner

Prisen på en kjøpsopsjon kan skrives:

$$C_0 = \max[S_0 - X; 0] \tag{11.13}$$

og salgsopsjonen:

$$P_0 = \max[X - S_0; 0] \tag{11.14}$$

Definisjonene lyder:

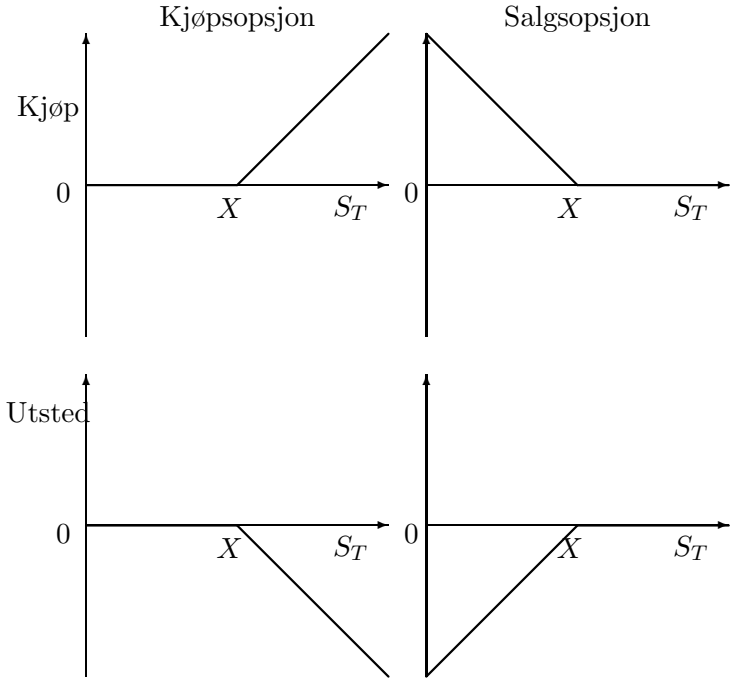
En *kjøpsopsjon* er en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe et bestemt antall aksjer på et bestemt tidspunkt eller før, til en på forhånd avtalt pris (utøvelsesprisen).

Definisjon 11.1: Kjøpsopsjonen

En *salgsopsjon* er en rett, men ikke en plikt, til å selge et bestemt antall aksjer på et bestemt tidspunkt eller før, til en på forhånd avtalt pris (utøvelsesprisen).

Definisjon 11.2: Salgsopsjonen

En opsjon kan kjøpes, eller holdes, og den kan utstedes. Dette gir fire forskjellige avkastningsprofiler for kjøps- og salgsopsjonene, se figur 11.1.



Figur 11.1: Avkastningsprofilene til europeiske kjøps- og salgsopsjoner ved forfall

Siden en eier av opsjonen kan velge å bruke opsjonen eller la være, vil alle avkastningsprofilene ha en knekk ved utøvelsesprisen.

11.4.3 Renteparitet

Vi skal finne kjøpsopsjonens pris, og ser at vi kan bruke paritetssammenhengen for formålet. Følgende sammenheng mellom opsjonspriser, aksjekurs og lån finnes i et arbitrasjefritt marked:

$$C_0 = P_0 + S_0 - \frac{1}{1+r_f}X \tag{11.15}$$

Vi finner ved innsetting:

$$C_0 = 10 + 75 - \frac{1}{1.05}80 = 8.81.$$

11.4.4 Risikonøytral prising

En aksje har i dag verdi 10.00, som også er kjøpsopsjonens utøvelsespris. I neste periode kan prisen gå opp 20.0% eller falle 2.5%. Risikofri rente i markedet er 5.0%.

1. Hva er kjøpsopsjonens pris i dag? Bruk risikonøytral prising.
2. Anta nå at prisen kan enten gå opp 40% eller falle 5% neste periode. Hva er nå kjøpsopsjonens pris?
3. Hva er de viktigste faktorene som forklarer opsjonens pris?

11.4.5 Kjøpsopsjonens pris

Det kan vises at prisen på en kjøpsopsjon vurdert ved hjelp av risikonøytral prising er gitt av:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d\right] \tag{11.16}$$

Vi har at $C_u = \max[12-10, 0] = 2$ og $C_d = \max[9.75-10, 0] = 0$. Da finner vi:

$$q = \frac{r_f - d}{u - d} = \frac{0.05 - (-0.025)}{0.20 - (-0.025} = \frac{0.075}{0.2251} = 0.33$$

og

$$1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} = \frac{0.20 - (-0.05)}{0.20 - (-0.025)} = 0.67$$

og prisen er:

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left(0.33 \cdot 2 + 0.67 \cdot 0.00\right) = 0.63$$

11.4.6 Virkningen av høyere volatilitet

Volatiliteten i aksjekursen øker slik at vi nå får $C_u = \max[14-10, 0] = 4$ og $C_d = \max[9.50-10, 0] = 0$. Med samme type utregninger som ovenfor, viser

det seg at $q = 0.22$ og $1 - q = 0.78$. Da blir den nye opsjonsprisen $C_0 = 0.84$. En høyere volatilitet gir altså en høyere pris på opsjonen.

11.4.7 Hvorfor høyere opsjonspris?

Høyere volatilitet gir altså høyere opsjonspris. Vi ser grunnnen til dette fra uttrykkene for C_u og C_d i de to situasjonene.

Volatilitet	C_u	C_d
$u = 0.20, d = -0.025$	2.00	0.00
$u = 0.40, d = -0.05$	4.00	0.00

Den økte volatiliteten fører bare til at opsjonsverdien i "oppbevegelsen" endres og blir større. Opsjonsverdien påvirkes jo ikke av at avstanden mellom aksjekurs og utøvelseskurs blir større, nå aksjekursen er lavere enn utøvelseskursen. Opsjonen er jo mer verdt, dersom "oppbevegelsen" er større enn tidligere.

Kapittel 12

Eksamen 2016

12.1

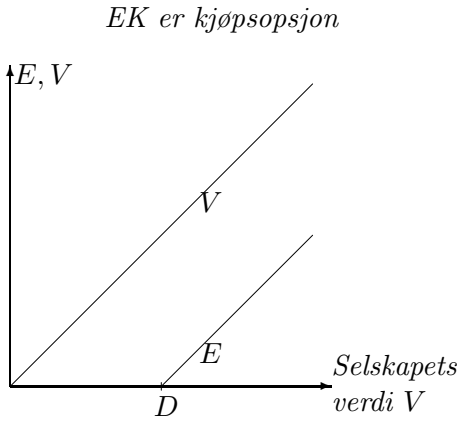
12.1.1 Begrenset ansvar

Når eierne av et selskap har *begrenset ansvar* er de bare ansvarlig for den kapital som er skutt inn i foretaket. Det kan være flere fordeler med et aksjeselskap som har begrenset ansvar:

1. Begrenset ansvar: Hver investor er bare ansvarlig for den kapital vedkommende har skutt inn.
   - Appellerer til mange ulike investorer.
   - Investorene kan *diversifisere* sine investeringer i ulike selskaper og oppnå risikoreduksjon.
2. Overføring av kontroll og utvidelse/innskrenkning av kapitalgrunnlaget er enkelt.
   - Kan hente ny EK når firmaet vokser; utsteder nye aksjer eller tar opp nye lån på selskapets hånd.
   - Eierskiftene er enkle. Feks ved konkurs: Eierkontroll går over fra nåværende eiere til kreditorer.
3. Tillater skille mellom *eierskap* og *ledelse*:
   - Profesjonelle ledere kan hyres
4. Selskapet er en egen "legal person", og kan bl.a. ta opp gjeld.

12.1.2 Aksjeselskapets risiko

Egenkapital kan tolkes som en kjøpsopsjon som er "In-The-Money" når verdien av selskapet er høyere enn selskapets gjeld.



Figur 12.1: Egenkapital som en kjøpsjon

Dette kan stimulere til å ta sjanser, spesielt hvis EK er lav.

12.1.3 Et arbitrasjefritt marked

Et arbitrasjefritt marked er et marked hvor man ikke kan oppnå en positiv netto nåverdi på en investering ved å utnytte prisforskjeller i markedet. I et arbitrasjefritt marked vil loven om en pris gjelde. Finansielle markeder regnes som arbitrasjefrie markeder.

12.2 Positiv alfa?

Investoren kan være på jakt etter såkalte positiv alfa-aksjer. Det er aksjer som har en forventet avkastning høyere enn krav til avkastning etter kapitalverdimodellen, d.v.s.

$$\alpha_s = E(r_s) - r_f - (E(r_m) - r_f)\beta_s > 0 \tag{12.1}$$

Alfa-verdiene er vist nedenfor når opplysningene fra oppgaven er tatt inn.

Aksje	Forventet avkastning	Risikofri rente	Risiko-premie	Beta	Krav til avkastning	Alfa
C	15	5	5	1.75	13.75	1.25
D	11	5	5	1.42	12.10	-1.10
H	10	5	5	0.55	7.75	2.25
D	7	5	5	1.17	10.85	-3.85

Investoren bør sette sine penger i aksjene C og H, som begge har en positiv alfa. En positiv alfa innebærer også at forventet avkastning plasserer seg over SML-linjen i diagrammet med systematisk risiko β og forventet avkastning på henholdsvis horisontal og vertikal akse.

12.3 Renteskattefordel og stresskostnader

12.3.1

Fra Miller og Modigliani vet vi at når vi tar hensyn til bedriftsskatter, vil nåverdien av selskapets renteskattefordel (RSF) være $NV(RSF) = \tau_c \cdot D$.

Stresskostnadene (S) er oppgitt å være nåverdier. Da er forventede stresskostnader $E(S) = Pr(S) \cdot S$. Utregninger er gitt i tabell 12.1.

Tabell 12.1 Beregning av optimalt gjeldsnivå når skattesatsen er 23%

	Gjeld (mill)						
	0	40	50	60	70	80	90
NV(RSF)	0.00	9.20	11.50	13.80	16.10	18.40	20.70
Prob(Stress)	0.00	0.00	0.05	0.07	0.10	0.16	0.31
Stresskostnader	10.00	15.00	20.00	22.00	24.20	26.62	29.28
NV(Stresskostnader)	0.00	0.00	1.00	1.54	2.42	4.26	9.08
Fordel gjeld	0.00	9.20	10.50	12.26	13.68	14.14	11.62
Optimalt gjeldsnivå						80	

12.3.2

Med en bedriftsskattesats $\tau_c = 0.10$ blir optimalt gjeldsnivå flyttet ned til 70 mill. Fordel av gjeld er da 4.58, altså langt under nivået i forrige deloppgave.

12.3.3 Ulike typer stresskostnader

Her er en liste over mulige stresskostnader:

- Direkte kostnader: Advokatkostnader etc. kan bli høye i krisesituasjoner
- Indirekte kostnader: Finansiell stress gir dårligere driftsbeslutninger.
  - *Kunder forlater selskapet* Stoler ikke på at det er i markedet i morgen. EKS.: SAAB

- *Leverandører svikter* Kan kreve kontant betaling. Kan la være å investere i bedriftsspesifikk kunnskap og utstyr
- *Ansatte sier opp* Ansatte føler usikkerhet og ser seg om etter ny arbeidsgiver. Vanskelig å holde på nøkkelpersonell
- *Tap på fordringer* Vansker med å inndrive fordringer, skyldnere mener de har ikke noe å tape på å la være å betale
- *Panikksalg av eiendeler* Kan måtte selge eiendeler på billigsalg for å få likvider til å drive videre
- *Ledelsestid* Ledelsen bruker tid på brannslukking og tar få beslutninger med langsiktige konsekvenser

Det ventes at studenten utdyper i hvert fall et par underpunkter her.

12.4 Signalisering med tilbakekjøp

12.4.1

Selskapsverdien EV til Kjop er gitt av $EV = E + D -$ Kontanter. Da har vi at egenkapitalen i Kjop er $E = EV +$ Kontanter, slik at

$$S_0 = \frac{100m + 10m}{1,1m} = 100.00$$

12.4.2

Kjop kan altså kjøpe tilbake $10m/100 = 100,000$ aksjer. Det er da 1,0m aksjer i tilbake i selskapet. Den gode nyheten sender aksjekursen til $150m/1m = 150.00$ og den dårlige til $50m/1m = 50.00$.

12.4.3

Nyheten er altså kjent internt i selskapet, og så kommer kunngjøringen om tilbakekjøp. Da stiger aksjekursen til $(150 + 10)/1,1 = 145.45$ hvis den gode nyheten inntreffer. med den dårlige nyheten synker aksjekursen til $(50 + 10)/1,1 = 54.55$. Legg merke til at prisutslagene (volatiliteten) i aksjekursen er mindre nå enn i avsnitt 12.4.2, fordi aksjeverdien inneholder jo også de 10m kontanter selskapet har liggende.

12.4.4

Selskapets ledelse ønsker å maksimere aksjekursen. Hvis de vet at nyheten er god, vil de foreta tilbakekjøpet før de annonserer nyheten. Da vil jo kursen stige til 150.00. Hvis nyheten er dårlig, vil de derimot vente. Kursen vil jo da være 54.55 i stedet for 50.00.

12.4.5

Ut fra svaret i avsnitt 12.4.4 vil altså ledelsen annonsere tilbakekjøp uten at der foreligger andre nyheter. Utenforstående investorer vil ta dette som et signal på at ledelsen sitter på gode nyheter, og følgelig vil aksjekursen stige. Hvis selskapet *ikke* har gode nyheter, men likevel annonserer tilbakekjøp, vil utenforstående investorer i etterhånd anse dette som forsøk på kursmanipulasjon. Aksjen kan få en kortsiktig stigning, men vil så falle under tidligere nivå, fordi selskapets ledelse nå har mistet tillit i markedet. En falsk nyhet er altså kostbar i dette tilfellet og selskapene vil avholde seg fra en slik virksomhet. Et signal om tilbakekjøp er altså et *troverdig* signal om en god nyhet.

12.4.6

12.4.7

Vi har en problemstilling med prising av en opsjon når den underliggende aksje følger en binomisk prisprosess. Prisen på aksjen kan altså neste periode være enten $S_u = 50 \cdot 1.15 = 57.50$ eller $S_d = 50 \cdot 0.95 = 47.50$. Kjøpsopsjonen er verdt $C_1 = \max[S_1 - X, 0]$ der fotskriften 1 inneholder både opp- og nedtilstanden, d.v.s. $1 \in [u, d]$. Kjøpsopsjonen er altså åpenbart enten $C_u = 17.50$ eller $C_d = 7.50$. Det kan vises at en generell formel for opsjonsprisen i periode 0 er

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \tag{12.2}$$

Da har vi prisen i dag med opplysningene fra oppgaven:

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05 - (-0.05)}{0.15 - (-0.05)} \cdot 17.50 + \frac{0.15 - 0.05}{0.15 - (-0.05)} \cdot 7.50\right] = \underline{11.90}.$$

Ved å sette

$$q = \frac{r_f - d}{u-d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u-d} \tag{12.3}$$

kan vi prise opsjonen ved hjelp av *risikonøytral prising*:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d\right] \tag{12.4}$$

I denne oppgaven er opplagt $q = 0.50$.

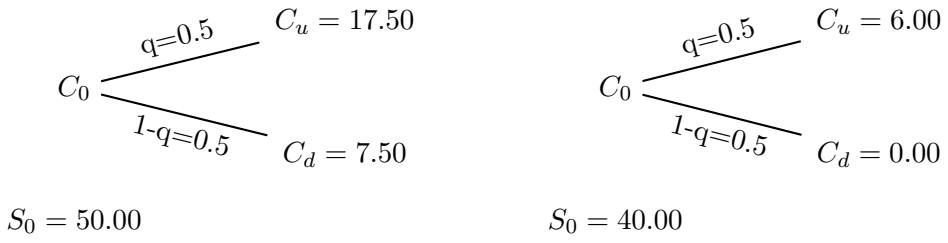
12.4.8

Vi får en ny aksjekurs $S_0 = 40.00$. Prisene blir nå enten $S_u = 40{\cdot}1.15 = 46.00$ eller $S_d = 40{\cdot}0.95 = 38.00$ og opsjonen er i de to tilstandene enten $C_u = 6.00$ eller $C_d = 0.00$. La oss bruke risikonøytral prising for å beregne dagens verdi på kjøpsopsjonen:

$$C_0 = \frac{1}{1.05}(0.50 \cdot 6.00 + 0.50 \cdot 0.00) = \underline{2.86}.$$

12.4.9

I forrige deloppgave er aksjekursen lavere enn i avsnitt 12.4.7 mens andre forhold ved opsjonen er de samme. Dette svarer til en situasjon der fordelingen av aksjekurs flytter seg til lavere verdier. Når andre forhold holdes konstante, må det bli vanskeligere å oppnå at opsjonen er "In-The-Money". Problemet er illustrerert i figur 12.2.



Figur 12.2: Kjøpsopsjonens verdi faller når aksjekursen er lavere

Ved siden av aksjekurs kan andre forhold påvirke opsjonens verdi. En kjøpsopsjon påvirkes av flere forhold. Her nevnes tre viktige i tillegg til aksjekurs:

Utøvelseskurs Jo høyere utøvelseskursen er, jo lavere er kjøpsopsjonens verdi

Volatilitet Jo større volatiliteten er, jo høyere er kjøpsopsjonens verdi

Tid til forfall Jo lengre tid til forfall opsjonen har, jo høyere er kjøpsopsjonens verdi

Kapittel 13

Utsatt eksamen 2017

13.1 Arbitrasje

13.1.1 Arbitrasjefri pris

Aksje	Aksjekurs	Antall	Verdi
Borregaard	84.50	2	169.00
Storebrand	45.92	3	137.76
Aker	154.50	1	154.50
Arbitrasjefri pris			461.26

En *arbitrasjefri pris* er en pris som gjør det umulig å utnytte prisforskjeller på samme gode.

13.1.2

Prisen på Notert er 430. Her oppstår en arbitrasjemulighet, d.v.s. en situasjon hvor det er mulig å oppnå en positiv kontantstrøm uten å ta risiko og uten å investere ved å utnytte prisforskjellen mellom den arbitrasjefrie prisen og prisen i markedet.

Hvordan kan du utnytte arbitrasjemuligheten? Kjøp en andel i Notert, den er jo billig. Selg samtidig alle aksjene i Notert. Inntekten er 461.26 og kostnaden er 430. Arbitrasjegevinsten er 31.26.

13.1.3

Prisen på Notert er nå 475. Her oppstår på ny en arbitrasjemulighet. Nå gjør vi det motsatte av i forrige oppgave. Vi selger en andel i Notert for 475 og kjøper to aksjer i Borregaard, tre i Storebrand og en i Aker. Arbitrasjegevinsten er $475.00 - 461.26 = 13.74$.

13.1.4 Verdiaddivitet

Verdiaddivitet betyr at verdien av en portefølje er summen av eiendelene i porteføljen. Porteføljen i dette tilfellet er en andel i Notert og eiendelene er de tre aksjene. Summen av verdien til aksjene i porteføljen bør være lik den arbitrasjefrie prisen på en andel i Notert.

13.2 Kapitalverdimodellen

Oppgaven inviterer til å bruke KVM:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i \tag{13.1}$$

β_i er jo videre gitt av

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{im}\sigma_i\sigma_m}{\sigma_m^2} = \rho_{im} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \tag{13.2}$$

13.2.1

Fra KVM har vi at kapitalkostnaden i Soek er:

$$E(r_i) = 4 + 10 \cdot 0.75 \cdot \sqrt{\frac{0.09}{0.0625}} = 13\%.$$

Da er netto nåverdi av investeringen:

$$NNV = -650 + \frac{800}{1.13} = \underline{57.96}.$$

$NNV > 0$ og prosjektet bør derfor gjennomføres.

13.2.2 Bedre enn markedsporteføljen?

Her er noen argumenter man kan utbrodere:

- Skal man slå markedsporteføljen, må noen andre tape. Men siden ingen ønsker å tape og alle ønsker å vinne, vil det over tid være svært vanskelig å gjøre det bedre enn gjennomsnittet, markedsporteføljen.
- Mange og godt informerte aktører gir svært små rom for arbitrasjemuligheter.
- Teknologiske endringer i det siste har ført til at informasjonsspredningen er svært rask, og at roboter i dag brukes til arbitrasjehandel.
- Undersøkelser har vist at selv de antatt best informerte aktørene, forvaltere av aksjefond, har store problemer med å slå markedsporteføljen over tid etter at deres kostnader er fratrukket.

13.3 MM med skatt: Rekapitalisering

Oppgaven handler om hvordan selskapet kan fange renteskattegevinsten til fordel for sine eiere ved å utstede gjeld i en situasjon der selskapet i utgangspunktet er gjeldfritt.

13.3.1 Selskapets verdi

Vi ser at Frommes verdi uten gjeld er

$$V_U = \frac{EBIT\,(1-\tau_c)}{r_E} = \frac{106.67(1.00-0.25)}{0.10} = 800.00.$$

Aksjekursen er i utgangspunktet $S = 800/200 = 4$. En ny gjeld skaper en renteskattegevinst og vi har sett at nåverdien av denne er $\tau_c D$, slik at vi har at renteskattegevinsten er $0.25 \cdot 400 = 100$. Frommes nye verdi er dermed

$$V_L = V_U + \tau_c D = \underline{900.00}.$$

13.3.2 Eiernes gevinst

Egenkapitalen er nå selvsagt $E_L = V_L - D$, d.v.s. 500. Men hele verdien av selskapet, 900, tilhører eierne. Alle eierne skal ta del i verdistigningen som følge av rekapitalisering. For at aksjonærer skal være villige til å selge sine aksjer til selskapet, må Fromme tilby en pris på $S_{pre} = 900/200 = 4.50$ pr. aksje, hvor S_{pre} viser til prisen før tilbakekjøp. Investorer hører nyheten om rekapitalisering, og innser med en gang at den nye prisen må være 4.50. Dermed er selvsagt ingen villige til å selge for lavere enn 4.50. Med en gjeld på 400, betyr dette at Fromme kan kjøpe tilbake $N = 400/4.50 = 88.88$ aksjer, d.v.s. 89 aksjer. Da er det 111 aksjer igjen i selskapet. Aksjekursen

etter at de 400 er brukt til å kjøpe tilbake aksjer, er $S_{ex} = 500/111 = 4.50$ (med avrunding), hvor S_{ex} er prisen på aksjen etter at tilbakekjøpet er fullført.

Vi kan tenke at hele prosessen foregår i tre etapper som vi illustrerer med en markedsbalanse i tabell 13.1. De tre delprosessene er kunngjøringen, låneopptak og til slutt tilbakekjøpet.

Tabell 13.1 Markedsbalansen for de tre steg i rekapitaliseringen av Fromme

	Opprinnelig	Steg 1 Kunngjøring	Steg 2 Låneopptak	Steg 3 Tilbakekjøp
Eiendeler				
Kontanter	0	0	400	0
Eiendeler (V_U)	800	800	800	800
$NV(RSG)$	0	100	100	100
Sum eiendeler	800	900	1300	900
Gjeld og EK				
Gjeld	0	0	400	400
EK	800	900	900	500
Aksjer	200	200	200	111
Pris pr. Aksje	4.0	4.5	4.5	4.5

Legg merke til at den nye prisen pr. aksje inntreffer allerede på kunngjøringstidspunktet, ikke når tilbakekjøpet foretas. Dette følger av ikkehandelsteoremet. Prisen justerer seg til det nye likevektsnivået så snart informasjonen er kjent.

13.4 Opsjoner – BSM

Her brukes Black–Scholes–Merton–modellen:

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{13.3}$$

13.4.1 Prisen på en kjøpsopsjon

Vi har alle opplysningene til å beregne (13.3), bortsett fra volatiliteten σ. Vi kan bruke definisjonen av beta i (13.2) for å beregne volatiliteten.

$$\beta_i = \rho_{im} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \Rightarrow 1.0 = 0.5 \frac{\sigma_i}{0.125}$$

som impliserer at $\sigma = 0.25$. Nå kan vi sette inn i (13.3). Vi finner først d_1 og d_2.

$$d_1 = \frac{\ln(100/110) + \left(0.5 \cdot 0.25^2\right) 0.75}{0.25 \cdot \sqrt{0.75}} = -0.15876$$

og

$$d_2 = -0.15876 - 0.25 \cdot \sqrt{0.75} = -0.37527$$

Fra tabellen finner vi at $\mathcal{N}(d_1) = 0.436929$ og $\mathcal{N}(d_2) = 0.353731$. Da kan vi sette inn i (13.3):

$$C_0 = 100 \cdot 0.436929 - 110 \cdot e^{-0.05 \cdot 0.75} \cdot 0.353731 = \underline{6.21}.$$

13.4.2 Prisen på salgsopsjonen

Prisen på en salgsopsjon med samme utøvelseskurs er gitt av:

$$P_0 = C_0 + e^{-r_f T} X - S_0 \tag{13.4}$$

slik at vi har:

$$P_0 = 6.21 + e^{-0.05 \cdot 0.75} \cdot 110 - 100 = \underline{12.16}$$

13.4.3 Virkning av lavere utøvelsespris

Vi går gjennom de samme beregninger som før og finner at $C_0 = \underline{16.38}$ og $P_0 = \underline{3.07}$. Virkningen av lavere utøvelsespris er altså at kjøpsopsjonen blir mer verdt, mens salgsopsjonen blir mindre. Det er større sannsynlighet for at kjøpsopsjonen ender "in-the-money" sammenlignet med 13.4.1. Samtidig er det mindre sannsynlig at salgsopsjonen blir utøvd.

Kapittel 14

Eksamen 2017

14.1

14.1.1

Her ventes det at man kjenner til viktige organisasjonsformer som:

- Eneeier og partnerskap. Selskapet eies og drives av en person, eller av flere personer sammen. Eierne er ansvarlige for gjeld.
- Samvirke. Foretaket eies av:
  - Leverandørene. Eks.: Meierisamvirket.
  - Ansatte. Eks.: Arbeiderstyrte bedrifter, partnerskap.
  - Forbrukerne. Eks.: Boligsamvirke, Coop.
- Aksjeselskap. Selskapet eies av investorer som bare har ansvar for den kapital som er skutt inn i foretaket. Eierne har *begrenset ansvar*.

14.1.2

Et aksjeselskap er en egen *legal person* og kan bla. ta opp lån i selskapets navn. Fordeler kan være:

1. Begrenset ansvar: Hver investor er bare ansvarlig for den kapital vedkommende har skutt inn.
   - Appellerer til mange ulike investorer, for eksempel både store og små eiere.
   - Investorene kan *diversifisere* sine investeringer i ulike selskaper og oppnå risikoreduksjon.
2. Overføring av kontroll og utvidelse/innskrenkning av kapitalgrunnlaget er enkelt.

   - Kan hente ny EK når firmaet vokser; utsteder nye aksjer eller tar opp nye lån på selskapets hånd.
   - Eierskiftene er enkle. Feks ved konkurs: Eierkontroll går over fra nåværende eiere til kreditorer. Et generasjonsskifte er enklere. Etterkommere som ikke ønsker å være med lenger kan selge sine aksjer.
3. Tillater skille mellom *eierskap* og *ledelse*:
   - Profesjonelle ledere kan ansettes og eiere kan ta seg av kapitalforvaltning.

Den største ulempen med aksjeselskapet er at det kan oppstå agentproblemer: Styret og daglig leder (DL) gjør beslutninger som ikke nødvendigvis er best for eierne.

- Styret og DL maksimerer egen nytte, som ikke alltid sammenfaller med eiernes interesser.
- DL kan ikke diversifisere, og opplever risiko for oppsigelse. DL vil derfor velge prosjekter med mindre usikkerhet enn det godt diversifiserte eiere vil gjøre.
- Styret kontrollerer ikke DL godt nok.

14.1.3

En fordel med målsettingen om å maksimere selskapets verdi for eierne er at den er klar og enkel. Alternativet er å ha flere målsettinger, for eksempel for miljø, sikkerhet, rettferdighet. Problemet med flersidige målsetting er at de er vanskelige å vurdere mot hverandre. For eksempel kan et selskap vise svak lønnsomhet, men samtidig gjøre det bra på miljøfeltet.

Målsettingen om maksimering gjelder for hele selskapet under ett, ikke for enkeltgrupper slik som ansatte eller samfunnet rundt selskapet. Tilhengere av interessentteorien ("stakeholder theory") hevder at selskapet må ta hensyn til ansatte, leverandører etc., dvs. alle som har en interesse i selskapet. Men disse interessentene forfølger sine egne, avgrensede målsettinger for sin gruppe.

Et selskap som søker å maksimere selskapets verdi for eierne må ta hensyn til kunder, ansatte etc. for å kunne drive forsvarlig og for å overleve i markedet. For eksempel vil en baker som ikke leverer gode varer vil over tid ha problemer med å beholde kunder.

14.2

14.2.1

Vi skal finne forventet avkastning og risiko. Vi definerer "Olje" som eiendel 1 og "Annet" som eiendel 2. Når vi definerer i som tilstand nr. i, finner vi for "Olje":

Til-stand	Sanns p_i	Utfall r_{1i}	$p_i r_{1i}$	$r_{1i} - E(r_1)$	$(r_{1i} - E(r_1))^2$	$p_i (r_{1i} - E(r_1))^2$
1	0.33	40.00	13.33	15.00	225.00	75.00
2	0.33	30.00	10.00	5.00	25.00	8.33
3	0.33	5.00	1.67	-20.00	400.00	133.33
	1.0	$E(r_1)$	25.00		σ_1^2	216.67
					σ_1	14.72

For "Annet" har vi:

Til-stand	Sanns p_i	Utfall r_{2i}	$p_i \cdot r_{2i}$	$r_{2i} - E(r_2)$	$(r_{2i} - E(r_2))^2$	$p_i (r_{2i} - E(r_2))^2$
1	0.33	2.50	0.83	-7.50	56.25	18.75
2	0.33	10.00	3.33	0.00	0.00	0.00
3	0.33	17.50	5.83	7.50	56.25	18.75
	1.00	$E(r_2)$	10.00		σ_2^2	37.50
					σ_2	6.12

Vi skal også finne korrelasjonen mellom de to eiendelene. Da må vi først beregne kovariansen. Den er:

Tilstand	Sanns	$r_{1i} - E(r_1)$	$r_{2i} - E(r_2)$	$p_i (r_{1i} - E(r_1))(r_{2i} - E(r_2))$
1	0.33	15.00	-7.50	-37.50
2	0.33	5.00	0.00	0.00
3	0.33	-20.00	7.50	-50.00
			σ_{12}	-87.50

Siden korrelasjonen er definert som $\rho_{12} = \sigma_{12} / (\sigma_1 \sigma_2)$, har vi at

$$\rho_{12} = \frac{-87.50}{14.72 \cdot 6.12} = -0.97$$

14.2.2 Ulike målsettinger

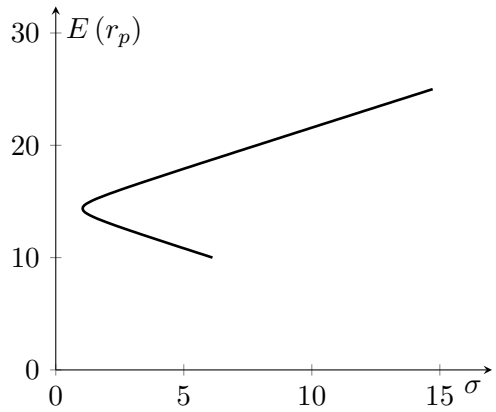
Fondet har en portefølje av "Olje" og "Annet". Avkastning for en portefølje med to eiendeler er:

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{14.1}$$

der w er andelen plassert i eiendel 1. Risikoen i porteføljen er definert som:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}}\end{aligned} \tag{14.2}$$

Ved å variere w fra 0.0 til 1.0 fremkommer porteføljefronten i figur 14.1.



Figur 14.1: Porteføljefronten

14.2.3 Maksimal avkastning

Maksimal avkastning får vi ved å plassere hele porteføljen i den eiendelen som har størst avkastning. Det er "Olje". Her får vi en avkastning på 25.00% når $w = 1.0$.

14.2.4 Minimal risiko

Hvis målsettingen er minimal risiko, kan det vises at minimumvariansporteføljen (MVP) er definert av

$$w_{mvp} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{14.3}$$

Innsetting gir:

$$w_{mvp} = \frac{37.50 - (-87.50)}{216.67 + 37.50 - 2(-87.50)} = 0.2913$$

Det viser seg at fondet bør holde 29.13% av investeringene i olje og resten i Annet. Legger man mer vekt på risiko, vil andelen som investeres i oljesektoren nødvendigvis falle.

Med 29.13% i "Olje", viser det seg at porteføljens risiko er:

$$\sigma_p = \left(0.2913^2 216.67 + 0.7087^2 37.50 + 2 \cdot 0.2913 \cdot 0.7087 \cdot (-87.50)\right)^{0.5} = 1.045$$

Dette er også som forventet. Med en korrelasjon $\rho_{12} = -0.97$, forstår vi at det meste av porteføljens risiko er mulig å diversifisere bort.

14.2.5 Målsettinger om avkastning og risiko

14.2.6 Avkastning på 20.0%

Avkastningen av porteføljen er gitt av (14.1). Vi vet avkastningen skal være 20.0%. Innsetting gir videre:

$$E\left(r_p\right) = w25.00 + (1 - w)10.00 = 20.00$$

Vi isolerer w og finner at $w = 2/3$ eller 66.67%. Med et avkastningskrav på 20.00%, vil altså to tredjedeler av porteføljen plasseres i "Olje".

14.2.7 Risiko er gitt til 5%

Vi bruker nå (14.2). Fra figur 14.1 ser vi at en risiko på 5.00 inntreffer to ganger. Med alle opplysningene på plass har vi at:

$$\sigma_p = \left(w^2 216.67 + (1 - w)^2 37.50 + 2w(1 - w)(-87.50)\right)^{0.5} = 5.00$$

Med ordning av uttrykket munner dette ut i den kvadratiske funksjonen

$$429.17w^2 - 250.00w + 12.50 = 0$$

som har løsningene

$$w = \frac{250.00 \pm \sqrt{250^2 - 4 \cdot 429.17 \cdot 12.50}}{2 \cdot 429.17} = \frac{250 \pm 202.587}{858.34}.$$

Vi finner at w kan være $w = 0.5273$ og $w = 0.0552$. Figur 14.1 viser at det er to løsninger. Men løsningen med $w = 0.0552$ gir høyere avkastning for den samme risiko. En investor som foretrekker høyere avkastning for samme risiko vil derfor velge denne porteføljen. En kontroll med $w = 0.5273$ viser at

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left(0.5273^2 216.67 + (1 - 0.5273)^2 37.50 + 2 \cdot 0.5273(1 - 0.5273)(-87.50)\right)^{0.5} \\ &= 5.0004\end{aligned}$$

dvs. praktisk talt $\sigma_p = 5.00$.

En porteføljerisiko på $\sigma_p = 5.00$ gir som ventet en høyere andel i "Olje", men likevel lavere enn hvis man velger et avkastningsnivå på $E(r_p) = 0.20$.

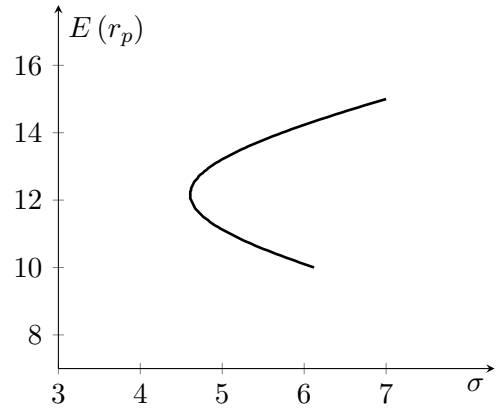
14.2.8 Endring i olje

Først må vi finne avkastning og risiko for "Olje" og "Annet". Ved å bruke kjente formler kommer vi frem til følgende størrelser.

	Olje	Annet
Avkastning	15.00	10.00
Varians	49.00	37.50
Stavvik	7.00	6.12
Korrelasjon	0.00	

14.2.9 Målsetting: Maksimal avkastning

Fremdeles får fondet høyest forventet avkastning dersom man plasserer det hele i olje. Man får nå $E(r_p) = 15\%$.



Figur 14.2: Porteføljefronten når avkastning og risiko endres i "Olje"

14.2.10 Minimal risiko

Vi bruker igjen (14.3) og får nå:

$$w_{mvp} = \frac{37.50 - (7.00 \cdot 6.12 \cdot 0.00)}{49.00 + 37.50 - 2(7.00 \cdot 6.12 \cdot 0.00)} = 0.4335$$

Minimal risiko oppnås nå ved å holde 43.35% i "Olje". Dette er en høyere andel enn det vi først fikk, i deloppgave 14.2.4.

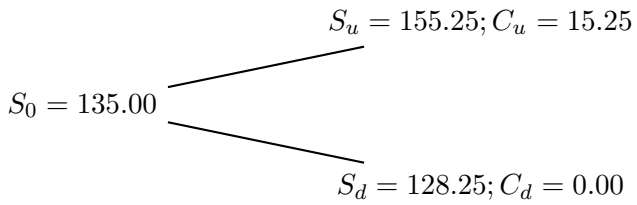
Det er godt mulig at oljesektoren vil se lave oljepriser i tiden som kommer. Men her er det motstridende tendenser.

1. I mange land begrenser man nå bruken av kull til produksjon av elektrisitet og går over til gass og fornybar energi. Overgang til gass tilsier en høyere oljepris.
2. Økt bruk av fornybar energi i sol, vind og vannfall til stadig lavere priser skaper vanskelige konkurranseforhold for olje. Dette tilsier lavere eller ikke stigende oljepris i fremtiden.

14.3

Ut fra opplysningene i oppgaven ser vi at prisprosessen etter en periode gir verdiene

Vi ser av figur 14.3 at utøvelseskursen X må være $X = 155.25 - 15.25 = 140.00$.



Figur 14.3: Prisprosess og opsjonsverdier i utgangspunktet

14.3.1 Opsjonsprisen

For å finne opsjonsprisen starter vi med å danne en replikerende portefølje av en andel aksje og et lån og setter porteføljen lik verdien av opsjonen i de to tilstandene i periode 1. Vi konstruerer altså porteføljen slik at

$$\Delta S_u + (1 + r_f) B = C_u \tag{14.4}$$

og

$$\Delta S_d + (1 + r_f) B = C_d \tag{14.5}$$

Innsetting av verdier fra oppgaven gir ligningssettet:

$$\Delta 155.25 + 1.05B = 15.25$$
$$\Delta 128.25 + 1.05B = 0.00$$

Vi finner at $\Delta = 0.5648$ og $B = -68.99$. Porteføljen settes altså sammen av 56.48% av aksjen og et lån på 68.99.

Siden porteføljen er lik opsjonen i periode 1, må det samme gjelde i periode 0. Vi må altså ha at

$$C_0 = \Delta S_0 + B$$

Opsjonsverdien er dermed:

$$C_0 = 0.5648 \cdot 135.00 - 68.99 = 7.26$$

Opsjonsprisen er 7.26.

14.3.2 Paritet

Hvis det er likevekt i markedet , skal vi ha at følgende partitetsbetingelse gjelder:

$$P_0 = C_0 + \frac{1}{1+r_f}X - S_0 \tag{14.6}$$

Vi får:

$$P_0 = 7.26 + \frac{1}{1.05}140.00 - 135.00 = 5.59$$

Prisen på salgsopsjonen må være 5.59 for at det skal være paritet i prisene for kjøps- og salgsopsjonen.

14.3.3 To perioder

Vi kan bruke risikonøytral prising i to perioder for dette problemer. Opsjonsprisen er gitt av

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2C_{dd}\right] \tag{14.7}$$

Her mangler verdiene til q og $1-q$. Disse er generelt gitt som:

$$q = \frac{r_f - d}{u - d}; \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} \tag{14.8}$$

Vi finner først u, d:

$$u = \frac{155.25}{135.00} - 1.00 = 0.15; \qquad d = \frac{128.25}{135.00} - 1.00 = -0.05$$

Nå er q og $1-q$:

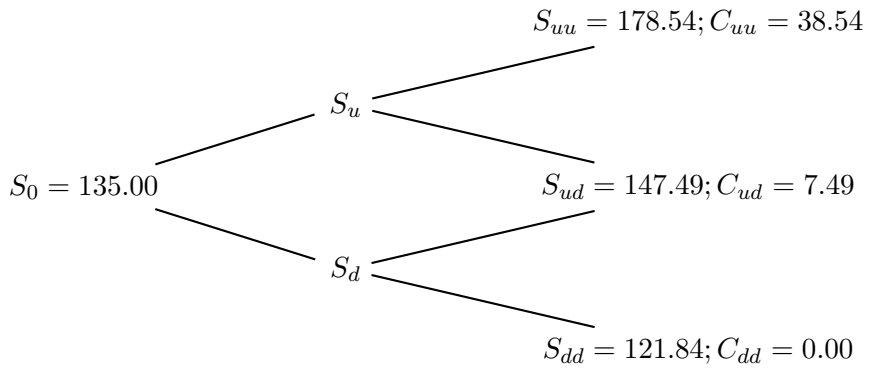
$$q = \frac{0.05 - (-0.05)}{0.15 - (-0.05)} = 0.50; \qquad 1 - q = \frac{0.15 - 0.05}{0.15 - (-0.05)} = 0.50$$

Videre trenger vi opsjonsverdiene i andre periode. Figur 14.4 viser prisprosess og andre periodes opsjonsverdier.

Nå kan vi bruke (14.7):

$$C_0 = \frac{1}{1.05^2}\left(0.50^2 38.54 + 2 \cdot 0.50^2 7.49 + 0.50^2 0.00\right) = 12.14$$

Prisen på opsjonen har økt betydelig i forhold til verdien i første periode.

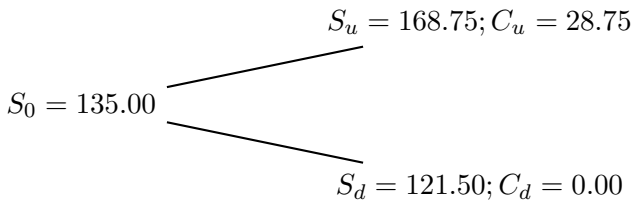


Figur 14.4: Prisprosess og opsjonsverdier når forfall er om to perioder

Forklaringen er at med ytterligere en periode er det mulig å oppnå høyere opsjonsverdier enn i første. Opsjonen er enda mer "In The Money".

14.3.4 Høyere volatilitet

Prisutslagene er nå enda sterkere, idet $u = 0.25$ og $d = -0.10$. Prisprosess og opsjonsverdier er da i dette enperiodes problemet vist i figur 14.5.



Figur 14.5: Prisprosess og opsjonsverdier med høyere volatilitet

Vi har opsjonsprisen direkte fra

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d}C_u + \frac{u - r_f}{u-d}C_d\right] \tag{14.9}$$

Dermed får vi:

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left(\frac{0.05-(-0.10)}{0.25-(-0.10)}28.75 + \frac{0.25-0.05}{0.25-(-0.10)}0.00\right) = 11.73.$$

Opsjonsprisen stiger med høyere volatilitet. Økningen i forhold til utgangspunktet er betydelig. Forklaringen på økt verdi er at opsjonsverdien i "opptilstanden" er nå høyere enn i utgangspunktet. Samtidig er opsjonsverdien

i "nedtilstanden" like stor, nemlig null. Alt i alt må derfor opsjonsverdien stige.

14.4 Risiko-overveltning og kapitalstruktur

14.4.1 Investere i tapsprosjekt?

Vi ser først på selskapets stilling i starten med bare prosjekt A, se tabell 14.1.

Tabell 14.1 Welltings verdi med bare prosjekt A

	Tilstand			
	Høy 50%	Lav 50%	Forventet verdi	$NV(r = 10\%)$
Selskapet	240.00	90.00	165.00	150.00
Långiverne	82.50	82.50	82.50	75.00
Eierne	157.50	7.50	82.50	75.00

Nå får altså Wellting et nytt prosjekt B som er helt uavhengig av prosjekt A. Vi ser på hvordan dette virker inn på betalingene til långivere og eiere. Siden prosjektene er uavhengige, kan høy- og lavtilstanden for B inntreffe med like stor sannsynlighet i både høy- og lavtilstanden for A. Vi kaller høy for H og lav for L.

Tabell 14.2 Oversikt over selskapsverdier ved ulike mulige kombinasjoner av A og B

	Prosjekt A		
	H: 240.00	L: 90.00	Tilstands-
Prosjekt B	$E(A) = 165.00$		verdier
H: 75.00	315.00	165.00	240.00
L: -90.00	150.00	0.00	75.00
$E(B) = -7.50$			
Tilstandsverdier	232.50	82.50	157.50

Nåverdien av prosjekt B er $NV(B) = -7.50/1.1 = -6.82$ og av selskapet med A og B er $NV(A+B) = 157.50/1.1 = 143.18$. Med negativ nåverdi for prosjekt B ville en forsvarlig vurdering resultere i et avslag.

Hva skjer nå med fordelingen av selskapets verdi mellom eiere og långivere? Dette er satt opp i tabell 14.3. Her står E for Eiere og D for Långivere.

Nåverdien av gjeld er $NV(D) = 41.25/1.1 = 37.50$ og for egenkapitalen $NV(E) = 63.75/1.1 = 57.95$.

Tabell 14.3 Oversikt over selskapsverdier ved ulike mulige kombinasjoner av A og B

	Prosjekt A		
	H: 240.00	L: 90.00	Tilstands-
Prosjekt B	$E(A) = 165.00$		verdier
H: 75.00	E: 232.50	E: 82.50	E: 157.50
	D: 82.50	D: 82.50	D: 82.50
L: -90.00	E: 67.50	E: 0.00	E: 33.75
	D: 82.50	D: 0.00	D: 41.25
$E(B) = -7.50$			
Tilstandsverdier	232.50	82.50	157.50
Forventet verdi eiere			95.63
Forventet verdi bank			61.88

Sammenlignet med tabell 14.1 viser det seg nå at eierne økt sine forventede verdier fra 75 med bare prosjekt A til $E(Eier) = 0.5(157.50 + 33.75) = 95.625$ ved at man godtok et risikabelt prosjekt B i tillegg. Det risikable prosjektet har ført til en *risikooovervelting* fra eiere til långivere. Konkursrisikoen har økt, og det medfører en risiko for at långiverne ikke får noe i den verst tenkelige tilstand.

14.4.2 Avveiningsteorien

Avveiningsteorien sier at det er fordeler og ulemper med gjeld. Selskapets bestemmer hvilken fordeling av egenkapital og gjeld som er optimal for selskapet. Avveiningsteorien innebærer for det første at det kan være et optimalt nivå på kapitalstruktur. Dette strider mot Miller og Modigliani sine resultater. For det andre innebærer teorien at det optimale nivået kan være unikt for hvert selskap.

Fordeler med gjeld. Den viktigste fordelen er antakelig renteskattefordelen. Når vi tar hensyn til bedriftsskatter, er det jo slik at verdien av et selskap med gjeld er høyere enn et helt likt selskap uten gjeld, dvs. $V_L = V_U + r_D D$ der $r_D D > 0$ er renteskattefordelen.

En annen fordel med gjeld er at den gir ledelsen et insentiv til god drift av selskapet. Gjeld begrenser den frie kontantstrømmen for ledelsen, de må jobbe hardere for å oppnå tilfredsstillende resultater for selskapet.

Ulemper med gjeld. Her kan det nevnes mange faktorer. Et skille er mellom direkte og indirekte kostnader med høy gjeldsandel. De direkte kostnadene kan måles i advokathonorar, gebyrer etc., de indirekte påvirker forretingsdriften på ulike måter. En høy gjeldsandel kan føre til at selskapet opplever

tap av handlefrihet. Leverandører krever kontant betaling, fordi de er usikre på om selskapet vil eksistere eller ikke i nær fremtid. Ansatte kan slutte av samme årsak, kunder vil begynne å lete etter andre leverndører for å sikre seg osv. Det er også viktig å nevne at ledelsens tid brukes til å berge selskapet nærmest fra dag til dag.

Tillegg A

Symboler, formler og tabell

S_t	Aksjekurs i periode t
B	Kurs på obligasjon
M	Obligasjonens pålydende
y	Avkastning til forfall (også YTM)
K_t	Kontantstrøm i periode t
I	Investering
V	Selskapets verdi; V_U uten gjeld, V_L med gjeld
E, D	Egenkapital, gjeld
DIV_t	Utbytte i periode t
Div_t	Utbytte pr. aksje i periode t
C_0	Kjøpsopsjonens verdi i periode 0
P_0	Salgssopsjonens verdi i periode 0
X	Utøvelseskurs
q	Risikonøytral sannsynlighet
r_E	Avkastning på egenkapitalen
r_D	Selskapets lånerente
r_{wacc}	Veid gjennomsnittlig kapitalkostnad
r_f	Risikofri rente
r_i	Avkastning på verdipapir i
r_m	Avkastning på markedet i gjennomsnitt
r_U	Aksjeavkastning på et gjeldfritt selskap
r_L	Aksjeavkastning på et selskap med gjeld
g	Veksthastighet
EPS	"Earnings per share" Driftsresultat/(antall aksjer)
r_P	Avkastning på porteføljen
τ_c	Selskapsskattesats
τ_d	Skattesats på utbytte
τ_i	inntektsskattesats
τ_g	Skattesats på kursstigning
β_i	Systematisk risiko for aksje i
σ_i	Selskapsspesifikk risiko for selskap i
σ_p	Porteføljens risiko
σ_{ij}	Kovariansen mellom selskapene i og j
ρ_{ij}	Korrelasjonen mellom selskapene i og j

Liste over formler

$$y = \left(\frac{M}{B}\right)^{1/T} - 1 \tag{A.1}$$

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{S_T}{(1+r_E)^T} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta EBIT}{EBIT} &= \text{Driftsresultatets vekstrate} \\ &= \text{Tilbakeholdsandel} \times \text{Avkastning på investering} \\ &= \left(1 - \frac{Div}{EPS}\right) \times \text{Avkastning på investering} \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}} \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{A.6}$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_{ij} + \frac{1}{N}\left(\sigma^2 - \sigma_{ij}\right) \tag{A.7}$$

$$E\left(r_i\right) = r_f + \left(E\left(r_m\right) - r_f\right)\beta_i \tag{A.8}$$

$$r_E = r_U + \left(r_U - r_D\right)\frac{D}{E} \tag{A.9}$$

$$V_E = \frac{EBIT}{r_U} = V_L = \frac{EBIT}{r_U} \tag{A.10}$$

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D = r_U = r_A \tag{A.11}$$

$$V_U = \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} \\ &= V_U + \tau_c D \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)(1-\tau_c)\frac{D}{E} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} V_L &= V_U + \left[1 - \frac{(1-\tau_c)(1-\tau_d)}{(1-\tau_i)}\right] \times D \\ &= V_U + N^* \times D \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f} X = P_0 + S_0 \qquad \text{eller} \qquad C_0 + \frac{1}{1+r_f} X - P_0 - S_0 = 0 \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d} C_u + \frac{u - r_f}{u-d} C_d\right] \\ &= \frac{1}{1+r_f}\left[q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d\right] \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q) C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \tag{A.18}$$

$$
\begin{aligned}
C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

$$
\beta_E = \frac{A\Delta}{A\Delta + B}\beta_U = \frac{(E+D)\Delta}{E}\beta_U = \Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)\beta_U \tag{A.20}
$$

$$
\beta_D = (1-\Delta)\frac{A}{D}\beta_U = (1-\Delta)\left(1 + \frac{E}{D}\right)\beta_U \tag{A.21}
$$

$$
\beta_U = \frac{\beta_E}{\Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)} \tag{A.22}
$$

$$
\frac{NNV}{I} = \frac{\beta_D}{\beta_E} \cdot \frac{D}{E} \tag{A.23}
$$

Tabell A.1 Verdier i den standardiserte normalfordelingen

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
-3.00	0.00135	-2.30	0.01072	-1.60	0.05480	-0.90	0.18406	-0.20	0.42074
-2.98	0.00144	-2.28	0.01130	-1.58	0.05705	-0.88	0.18943	-0.18	0.42858
-2.96	0.00154	-2.26	0.01191	-1.56	0.05938	-0.86	0.19489	-0.16	0.43644
-2.94	0.00164	-2.24	0.01255	-1.54	0.06178	-0.84	0.20045	-0.14	0.44433
-2.92	0.00175	-2.22	0.01321	-1.52	0.06426	-0.82	0.20611	-0.12	0.45224
-2.90	0.00187	-2.20	0.01390	-1.50	0.06681	-0.80	0.21186	-0.10	0.46017
-2.88	0.00199	-2.18	0.01463	-1.48	0.06944	-0.78	0.21770	-0.08	0.46812
-2.86	0.00212	-2.16	0.01539	-1.46	0.07215	-0.76	0.22363	-0.06	0.47608
-2.84	0.00226	-2.14	0.01618	-1.44	0.07493	-0.74	0.22965	-0.04	0.48405
-2.82	0.00240	-2.12	0.01700	-1.42	0.07780	-0.72	0.23576	-0.02	0.49202
-2.80	0.00256	-2.10	0.01786	-1.40	0.08076	-0.70	0.24196	0.00	0.50000
-2.78	0.00272	-2.08	0.01876	-1.38	0.08379	-0.68	0.24825	0.02	0.50798
-2.76	0.00289	-2.06	0.01970	-1.36	0.08691	-0.66	0.25463	0.04	0.51595
-2.74	0.00307	-2.04	0.02068	-1.34	0.09012	-0.64	0.26109	0.06	0.52392
-2.72	0.00326	-2.02	0.02169	-1.32	0.09342	-0.62	0.26763	0.08	0.53188
-2.70	0.00347	-2.00	0.02275	-1.30	0.09680	-0.60	0.27425	0.10	0.53983
-2.68	0.00368	-1.98	0.02385	-1.28	0.10027	-0.58	0.28096	0.12	0.54776
-2.66	0.00391	-1.96	0.02500	-1.26	0.10383	-0.56	0.28774	0.14	0.55567
-2.64	0.00415	-1.94	0.02619	-1.24	0.10749	-0.54	0.29460	0.16	0.56356
-2.62	0.00440	-1.92	0.02743	-1.22	0.11123	-0.52	0.30153	0.18	0.57142
-2.60	0.00466	-1.90	0.02872	-1.20	0.11507	-0.50	0.30854	0.20	0.57926
-2.58	0.00494	-1.88	0.03005	-1.18	0.11900	-0.48	0.31561	0.22	0.58706
-2.56	0.00523	-1.86	0.03144	-1.16	0.12302	-0.46	0.32276	0.24	0.59483
-2.54	0.00554	-1.84	0.03288	-1.14	0.12714	-0.44	0.32997	0.26	0.60257
-2.52	0.00587	-1.82	0.03438	-1.12	0.13136	-0.42	0.33724	0.28	0.61026
-2.50	0.00621	-1.80	0.03593	-1.10	0.13567	-0.40	0.34458	0.30	0.61791
-2.48	0.00657	-1.78	0.03754	-1.08	0.14007	-0.38	0.35197	0.32	0.62552
-2.46	0.00695	-1.76	0.03920	-1.06	0.14457	-0.36	0.35942	0.34	0.63307
-2.44	0.00734	-1.74	0.04093	-1.04	0.14917	-0.34	0.36693	0.36	0.64058
-2.42	0.00776	-1.72	0.04272	-1.02	0.15386	-0.32	0.37448	0.38	0.64803
-2.40	0.00820	-1.70	0.04457	-1.00	0.15866	-0.30	0.38209	0.40	0.65542
-2.38	0.00866	-1.68	0.04648	-0.98	0.16354	-0.28	0.38974	0.42	0.66276
-2.36	0.00914	-1.66	0.04846	-0.96	0.16853	-0.26	0.39743	0.44	0.67003
-2.34	0.00964	-1.64	0.05050	-0.94	0.17361	-0.24	0.40517	0.46	0.67724
-2.32	0.01017	-1.62	0.05262	-0.92	0.17879	-0.22	0.41294	0.48	0.68439

Tabell A.2 Verdier i den standardiserte normalfordelingen (forts.)

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
0.50	0.69146	1.20	0.88493	1.90	0.97128	2.60	0.99534
0.52	0.69847	1.22	0.88877	1.92	0.97257	2.62	0.99560
0.54	0.70540	1.24	0.89251	1.94	0.97381	2.64	0.99585
0.56	0.71226	1.26	0.89617	1.96	0.97500	2.66	0.99609
0.58	0.71904	1.28	0.89973	1.98	0.97615	2.68	0.99632
0.60	0.72575	1.30	0.90320	2.00	0.97725	2.70	0.99653
0.62	0.73237	1.32	0.90658	2.02	0.97831	2.72	0.99674
0.64	0.73891	1.34	0.90988	2.04	0.97932	2.74	0.99693
0.66	0.74537	1.36	0.91309	2.06	0.98030	2.76	0.99711
0.68	0.75175	1.38	0.91621	2.08	0.98124	2.78	0.99728
0.70	0.75804	1.40	0.91924	2.10	0.98214	2.80	0.99744
0.72	0.76424	1.42	0.92220	2.12	0.98300	2.82	0.99760
0.74	0.77035	1.44	0.92507	2.14	0.98382	2.84	0.99774
0.76	0.77637	1.46	0.92785	2.16	0.98461	2.86	0.99788
0.78	0.78230	1.48	0.93056	2.18	0.98537	2.88	0.99801
0.80	0.78814	1.50	0.93319	2.20	0.98610	2.90	0.99813
0.82	0.79389	1.52	0.93574	2.22	0.98679	2.92	0.99825
0.84	0.79955	1.54	0.93822	2.24	0.98745	2.94	0.99836
0.86	0.80511	1.56	0.94062	2.26	0.98809	2.96	0.99846
0.88	0.81057	1.58	0.94295	2.28	0.98870	2.98	0.99856
0.90	0.81594	1.60	0.94520	2.30	0.98928	3.00	0.99865
0.92	0.82121	1.62	0.94738	2.32	0.98983	3.02	0.99874
0.94	0.82639	1.64	0.94950	2.34	0.99036	3.04	0.99882
0.96	0.83147	1.66	0.95154	2.36	0.99086	3.06	0.99889
0.98	0.83646	1.68	0.95352	2.38	0.99134	3.08	0.99896
1.00	0.84134	1.70	0.95543	2.40	0.99180	3.10	0.99903
1.02	0.84614	1.72	0.95728	2.42	0.99224	3.12	0.99910
1.04	0.85083	1.74	0.95907	2.44	0.99266	3.14	0.99916
1.06	0.85543	1.76	0.96080	2.46	0.99305	3.16	0.99921
1.08	0.85993	1.78	0.96246	2.48	0.99343	3.18	0.99926
1.10	0.86433	1.80	0.96407	2.50	0.99379	3.20	0.99931
1.12	0.86864	1.82	0.96562	2.52	0.99413	3.22	0.99936
1.14	0.87286	1.84	0.96712	2.54	0.99446	3.24	0.99940
1.16	0.87698	1.86	0.96856	2.56	0.99477	3.26	0.99944
1.18	0.88100	1.88	0.96995	2.58	0.99506	3.28	0.99948

Bibliografi

Michael C. Jensen and William Meckling. Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs, and ownership structure. *Journal of Financial Economics*, 3:305–360, 1976.

Franco Modigliani and Merton H. Miller. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment. *American Economic Review*, 48(3): 261–297, 1958.

Franco Modigliani and Merton H. Miller. Corporate income taxes and the cost of capital: A correction. *American Economic Review*, 53(3):433–443, 1963.

Eksamensoppgaver Foretaksfinans

Øystein Strøm

28. januar 2018

Forord

Dette er eksamensoppgaver i faget Foretaksfinans gitt ved Handelshøyskolen i OsloMet - Storbyuniversitetet i perioden 2010 til 2017. Fyldige løsningsforslag er gitt til hver oppgave i en egen bok.

Pensumlitteraturen i faget har variert mellom Brealey et al. (2008), Berk and DeMarzo (2017) og til sist min egen bok Strøm (2017). Oppgavene har variert en del i temavalg, noe som avspeiler dels ulik pensumlitteratur, men også hvilke deler av pensum jeg har valgt å fokusere på i det enkelte kurs. Eksamensstoffet har følgelig variert. En student som skal forberede seg til eksamen vil finne oppgaver som passer til det stoffet som er gjennomgått, men også oppgaver som vil være uaktuelle.

Innhold

1 Eksamen 2010 **1**
1.1 1
1.2 1
1.3 1
1.4 2

2 Kontinuasjonseksamen vår 2011 **3**
2.1 3
2.2 3
2.3 4
2.4 4

3 Eksamen 2011 **5**
3.1 5
3.2 5
3.3 6
3.4 6
3.5 6

4 Kontinuasjonseksamen våren 2012 **9**
4.1 9
4.2 10
4.3 10
4.4 10

5 Eksamen 2012 **13**
5.1 13
5.2 13
5.3 14
5.4 14
5.5 15

6 Eksamen 2013 **17**

6.1 . . . 17
6.2 . . . 17
6.3 . . . 18
6.4 . . . 18

7 Kontinuasjon våren 2014 **19**
7.1 . . . 19
7.2 . . . 19
7.3 . . . 19
7.4 . . . 20

8 Eksamen 2014 **21**
8.1 . . . 21
8.2 . . . 21
8.3 . . . 22
8.4 . . . 22

9 Kontinuasjon 2015 **25**
9.1 . . . 25
9.2 . . . 25
9.3 . . . 26
9.4 . . . 26

10 Eksamen 2015 **27**
10.1 . . . 27
10.2 . . . 27
10.3 . . . 28
10.4 . . . 28

11 Utsatt eksamen 2016 **29**
11.1 . . . 29
11.2 . . . 29
11.2.1 . . . 29
11.3 . . . 30
11.4 . . . 30
11.5 . . . 31
11.5.1 . . . 31
11.5.2 . . . 31

12 Eksamen 2016 **33**
12.1 . . . 33
12.2 . . . 33
12.3 . . . 34
12.4 . . . 34
12.5 . . . 35

13 Utsatt eksamen 2017 **37**
13.1 37
13.2 37
13.3 38
13.4 38

14 Eksamen2017 **39**
14.1 Selskapsform 39
14.2 Portefølje 39
14.3 Opsjon 40
14.4 Kapitalstruktur; risiko-overvelting 40

A Symboler, formler og tabell **43**

Bibliografi **51**

Kapittel 1

Eksamen 2010

1.1

En obligasjon har fem år til forfall. Den har pålydende kr 1,000 og kupongrenten er 6.0%. Markedsrenten er i dag 7.5%.

1. Hva omsettes obligasjonen for i dag?
2. Hva er dens varighet (durasjon)?
3. Anta at markedsrenten øker med en prosent. Vis hvordan den nye prisen kan beregnes ved hjelp av varighet. Hva blir den nye prisen?
4. Anta at obligasjonen omsettes for kr 900.00. Hva er dens effektive rente, også kalt avkastning til forfall ("yield-to-maturity")?

1.2

Det sies at alle eierne i et selskap vil være enige om at maksimering av netto nåverdi er den beste målsettingen for selskapet.

1. Vis begrunnelsen for utsagnet.
2. Drøft mulighetene for å realisere et slikt styringssignal.

1.3

Anta at det ikke er skatt i en økonomi. Gjeld og egenkapital verdsettes etter markedsverdi. To bedrifter, Dal og Eng, har samme forretningsrisiko, men har ulik kapitalstruktur. Mens Dal er gjeldfritt, har Eng 50% gjeld. Både Dal og Eng har salgsinntekter på 1500, variable kostnader 400, faste betalbare kostnader 200 og avskrivninger er 500. Anta at disse størrelsene

forblir konstante i overskuelig fremtid. Dals β er 1.25. Risikofri rente er 4.5% og forventet avkastning på børsen er 12.5%. Gjeldsrenten for både privatpersoner og bedrifter er risikofri rente pluss 1.5%, og gjeldsbeta antas å være null. Investor Fjell vurderer en investering i enten Dal eller i Eng.

1. Hva er Dals og Engs verdi?
2. Hva er Fjells verdi av en investering på 10% av selskapets verdi i enten Dal eller Eng?
3. Fjell vurderer en annen strategi. Hva om han kjøper 10% av Dal, men finansierer dette med et lån tilsvarende 10% av Engs gjeld samt egne midler? Sammenlign resultatet med investeringen i Eng under forrige punkt. Hva forteller det om selskapenes verdi?
4. En alternativ teori om kapitalstruktur legger vekt på at selskapene velger å finansiere ny investering med ny egenkapital helt til slutt. Dette er den såkalte finansieringens hakkeorden. Hva går teorien ut på?

1.4

En kjøpsopsjon med utøvelsespris lik 100 skrives på en underliggende aksje. Aksjens kan enten øke med 10% eller falle med 5%. Aksjens pris i dag er 100, og risikofri rente er 5%.

1. Bruk en binomisk modell for å besvare spørsmålene nedenfor. Hva er forutsetningene for å bruke modellen?
2. Anta en periode. Hva er opsjonen verdt i dag?
3. Anta tre perioder. Hva er opsjonen verdt i dag?
4. Hvorfor blir opsjonen mer verdt når volatiliteten øker?

Kapittel 2

Kontinuasjonseksamen vår 2011

2.1

Anta en statsobligasjon A med fem år til forfall har en pålydende verdi på 100.00 og en årlig kupongrente på 5%. Kupongene utbetales årlig. Markedsrenten er 6.5%.

1. Hva er den høyeste pris du ville betale for obligasjonen?
2. Tenk deg at markedsrenten er 5% i stedet. Forklar med egne ord og uten å foreta beregninger hva obligasjonen omsettes for.
3. Anta en annen obligasjon B har samme kjennetegn som A, bare med den forskjell at kupongrenten er lik null. Hva er durasjonen (varigheten) til denne obligasjonen? Markedsrenten er nå tilbake til 6.5%.

2.2

To aksjer har en prosentvis avkastning i tre ulike konjunkturtilstander som vist nedenfor.

Konjunktur	Sannsynlighet	Avkastning selskap 1	Avkastning selskap 2
Høy	0.2	-30	10
Middels	0.5	10	15
Lav	0.3	30	-15

1. Finn forventet avkastning og risiko for de to aksjene. Finn også korrelasjonen mellom dem.

2. Finn minimum-variansporteføljen.
3. Hvorfor er systematisk risiko et viktig begrep når vi behandler kapitalverdimodellen (KVM)?
4. I William Shakespeare's *Hamlet* formaner en far at sønnen hverken skal låne penger av andre eller låne penger til andre. ("Neither a lender nor a borrower be.") Forutsett at faren tror på KVM. Hvor på markedslinjen mener du han anbefaler at sønnen bør plassere sin formue?

2.3

Rennren er en bedrift som venter å oppnå en fri kontantstrøm de neste årene på 48 millioner. Dens kapitalkostnad er 12%, bedriften er uten gjeld, men den har 20 millioner mer i kontantbeholdningen enn den trenger for den løpende drift. Styret møtes for å drøfte hva man bør gjøre med disse 20 millionene. Tre forslag fremmes. Det første er å utbetale 2.00 i ekstraordinært utbytte på alle de 10 millioner aksjer i selskapet. Det andre forslaget er å bruke beløpet til å kjøpe tilbake aksjer fra eierne. Det tredje forslaget er å hente inn ny kapital for å betale et enda høyere utbytte, siden man forventer høy fri kontantstrøm i tiden som kommer.

1. Hva er aksjekursen for de tre forslagene?
2. Hvilken utbyttepolitikk vil aksjonærene foretrekke?

Det forutsettes at kapitalmarkedene er perfekte og at betalingsmåten ikke spiller noen rolle.

2.4

Europeiske kjøps- og salgsopsjoner i selskapet Tomme Tønner (TT) omsettes for henholdsvis 1.00 og 7.00, og har forfall om ett år til en felles utøvelseskurs 55.00. I dag er aksjekursen 44.00, og om ett år ventes kursen å være enten 58.00 eller 34.00. TT betaler ikke utbytte eller foretar tilbakekjøp av aksjer innenfor overskuelig fremtid. En investor kan låne til 10% rente.

1. Er det arbitrasjemuligheter i markedet for selskapets opsjoner og aksjer?
2. Anta salgsopsjonen prises til 6.00. Vis hva arbitrasjegevinsten er verdt i dag.

Kapittel 3

Eksamen 2011

3.1

Neste år venter eiendomsmegleren Hus og Fritid AS (HF) et driftsresultat pr. aksje på 8.00, som i sin helhet deles ut til aksjonærene. Med en slik utbyttepolitikk ventes driftsresultatet å holde seg konstant i fremtiden. Aksjekursen er for tiden 64.00. Finansdirektøren peker på at HF alternativt kan utvide virksomheten med nye filialer. Avkastningen på slike investeringer er beregnet til 15.0%.

1. Beregn kapitalkostnaden for egenkapitalen hvis utbyttepolitikken holdes fast.
2. Beregn aksjekursen hvis utbyttepolitikken endres slik at utdelingen til aksjonærene er 4.00 og avkastningen er 15.0%.
3. Bør HF investere halvparten av driftsresultatet hvis avkastningen i stedet er 10.0%?

3.2

To selskaper U og L er helt like bortsett fra at de er finansiert ulikt. Mens U ikke har noen gjeld, har L 250. Verdien av U er 500. Selskapene kan låne eller låne ut til samme risikofrie rente, 5.0%, som også er den rente individuelle investorer forholder seg til. Det er ikke skatt i denne økonomien, og kontantstrømmene i U og L er konstante i overskuelig fremtid.

1. Hva er verdien av L? Presiser forutsetninger du bruker og vis utregninger.

3.3

Vekstbedriften Auk vurderer to prosjekter. Det ene (prosjekt K) er fortsettelse av dagens virksomhet, det andre (prosjekt N) er i en ny bransje for Auk, en bransje som gjennomgående er kjent for høyere risiko. Bortsett fra dette, er prosjektene like. Blant annet er det opplyst at prosjektene har samme salg og driftsutgifter etc., se nedenfor.

	0	1	2	3	4
Salg		90.00	112.50	123.75	136.13
Solgte varers kostnad		-22.50	-28.13	-30.94	-34.03
Driftsutgifter		-36.00	-45.00	-49.50	-54.45
Investering	-80.00				

Uansett hvilket prosjekt man velger, insisterer Auk på å holde samme kapitalstruktur som i dag. Selskapets markedsverdi er 1300 og egenkapitalen er på 800. Videre er kravet til avkastning på egenkapitalen 10.0% og Auk kan låne til 5% rente. Auk har funnet ut at i bransjen til det nye prosjektet N er kravet til avkastning på egenkapitalen 12.0%, lånerenten er 6.0%, og virksomhetene finansieres vanligvis med like mye lån og egenkapital. Auk betaler 28% skatt. Investeringene har ingen restverdi etter år 4 og avskrives lineært. Se bort fra behovet for arbeidskapital i denne oppgaven.

1. Vurder prosjekt K ved hjelp av totalkapitalmetoden, justert nåverdimetoden og egenkapitalmetoden.
2. Vurder prosjekt N ved hjelp av totalkapitalmetoden.

3.4

En bedrift har gjeld på til sammen 100.

1. Bruk kjøps- og salgsopsjoner til å vise hva som tilfaller eierne og hva som tilfaller långiverne i ulike tilstander.
2. Hva menes med overinvesteringsproblemet?

3.5

Gjelden til selskapet Stessmax på 100 forfaller i sin helhet om tre år. For tiden omsettes denne gjelden for 60. Lånet er risikofritt og bærer en rente på 5.0%. Ut fra aksjekursene estimeres selskapets egenkapital til 50, og den beregnede beta til egenkapitalen er 1.40. Den årlige volatiliteten i aksjen har den siste tiden vært 30%.

1. Finn beta til gjelden.
2. Stressmax kan gjennomføre et prosjekt som er ventet å gi en netto nåverdi på 10 på en investering på 15. Bør bedriften gjennomføre prosjektet?

Kapittel 4

Kontinuasjonseksamen våren 2012

Obligasjonen A utstedt av bedriften Sveis og Mek har pålydende på 1,000, kupongrente 5.0% med innbetaling en gang i året og forfall om fem år. Hele lånebeløpet innløses i år 5. Markedsrenten er for tiden 6.0%.

1. Hva er markedsprisen på obligasjonen?
2. Hva er obligasjonens durasjon, også kalt varighet?
3. Anta at renten øker til 7.0%. Hva er nå en sannsynlig markedspris?
4. Hvordan kan obligasjonen verdsettes ved hjelp av en portefølje?

4.1

Du kjøper en aksje i periode 1 og holder den frem til periode 10. Aksjen har kursene som følger i perioden:

Periode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kurs	1720	1700	1680	1750	1720	1740	1740	1750	1740	1770

1. Hva har den gjennomsnittlige avkastningen på investeringen vært i hele perioden?
2. Anta du bruker historiske erfaringer for å forutsi hva avkastningen er i fremtiden. Hva vil kursen være i periode 15?

4.2

Som nyansatt finansanalytiker er du satt til å beregne prisen på risiko basert på kapitalverdimodellen. Den risikofrie renten er 5.0% og risikopremien er like stor. Selskapet Sveis og Mek samvarierer med markedet som helhet, slik at kovariansen mellom selskapet og markedet er 200. Standardavviket til markedsporteføljen er beregnet til 10 basert på historiske erfaringer.

1. Hva er Sveis og Mek's egenkapitalkostnad?
2. Vis sammenhengen mellom risiko og avkastning i markedet ("SML = Security Market Line").
3. Den forventede avkastningen til pølsemakeren Brat er 15.0%. Korrelasjonen mellom Brat og markedsporteføljen er 0.50, og standardavviket i Brats avkastninger er 20.0. Hvis du antar at dette vil holde seg en periode fremover, ville du anbefale overfor sjefen din at firmaet ditt handler aksjer i Brat? Hvordan ville du legge opp handlestrategien?

4.3

To ellers like bedrifter Gjeldfri og Gjeldsatt har begge et driftsresultat før renter og skatt på 1,000. Gjeldfri har ingen gjeld mens Gjeldsatt har en gjeld på 2,000 som den betaler 7.5%'s rente på. Det betales en bedriftssatt på 28% av skattbart driftsresultat. Kapitalkostnaden for Gjeldfri er 10%. Disse størrelsene forventes å være konstante i overskuelig fremtid.

1. Hva er kontantstrømmen til långivere og eierne i de to bedriftene?
2. Hva er verdien av Gjeldfri og Gjeldsatt?
3. Hva er Gjeldsatts egenkapitalkostnad?
4. Anta Gjeldsatt vurderer også andre gjeldsnivåer. Hva er egenkapitalkostnaden dersom bedriften reduserer gjelden til 1,000 og hvis den øker til 3,000?

4.4

Du er bedt om å vurdere opsjonsprisen på en aksje. Aksjen omsettes i dag for 10 kroner. Egenkapitalkostnaden i selskapet er 12.5%, risikofri rente er 5%, opsjonen har forfall om tre måneder, aksjens volatilitet er 40% og utøvelsesprise er 9.

1. Hva er markedsprisen på en kjøpsopsjon i dag? Klargjør hvilken modell og hvilke forutsetninger modellen bygger på.

2. Det sies at en opsjon er mer risikabel enn en aksje. Vis at dette er tilfellet.

Kapittel 5

Eksamen 2012

5.1

Selskap A forventer et driftsresultat på 3000 neste år. Egenkapitalen i selskapet er fordelt på 100 aksjer. Kapitalkostnaden for egenkapitalen er beregnet til 12%, avkastningen på en bredt sammensatt markedsporteføljе er 8% og den risikofrie renten er 4%. Bedriften har som retningslinje at 50% av det årlige driftsresultatet deles ut til aksjonærene i form av et utbytte. Man venter at driftsresultatet vil øke med 5% de neste fem årene, for deretter å falle ned til ingen vekst de neste årene og inn i overskuelig fremtid.

1. Hva er aksjekursen i dag?
2. Hva er aksjekursen om driftsresultatet fortsetter å vokse med 5% "i all evighet"?
3. Anta at veksten i driftsresultatet fortsetter, men bare med 1% etter at den første vekstperioden er over. Hva er nå aksjekursen?
4. I stedet for å dele ut utbytte, vurderer ledelsen om man heller skal kjøpe tilbake aksjer fra eierne. Hvilken virkning vil dette ha for aksjekursen?

5.2

Du har fått oppgitt utdrag av en regresjonsanalyse av et foretak B. I regresjonen inngår data over daglige avkastninger på Oslo Børs (OB) og foretaket over en viss periode. Utskriften fra Excel viser:

Regresjonsstatistikk	
Multippel R	0.797
R-kvadrat	0.634
Justert R-kvadrat	0.634
Standardfeil	1.486
Observasjoner	1256

	Koeffisienter	Standardfeil	t-Stat	P-verdi
Skjæringspunkt	-0.0115	0.0419	-0.2746	0.7837
X-variabel 1	0.9693	0.0208	46.6526	0.0000

Du bes tolke resultatene for toppledelsen. Spesielt er man interessert i følgende.

1. Hva er sammenhengen mellom Oslo Børs og B i denne perioden? Kan vi stole på sammenhengen?
2. Hvordan kan resultatene brukes i praksis? Gi eksempler.

5.3

Selskapene C og D er begge i samme bransje og de skaper begge et årlig skattbart driftsresultat på 1000. Bedriftsskattesatsen er 28%. Kapitalkostnaden for egenkapitalen i C er 10% og begge selskapene kan låne til 5% rente. C er uten gjeld. Disse størrelsene ventes å vedvare i overskuelig fremtid.

1. Hva er kapitalkostnaden for egenkapitalen og selskapenes verdi for C og D hvis C fortsetter uten gjeld, mens D bruker 2000 i finansieringen?
2. Hva er D's kapitalkostnad for egenkapitalen og selskapets verdi hvis gjelden er 4000 og hvis den er 8000?
3. Hvilke fordeler ser du ved at selskapet øker gjeldsandelen, og hvilke ulemper kan oppstå?

5.4

Selskapet E har pådratt seg en gjeld på 1000, og långiverne har tinglyst en betingelse for å innvilge dette siste lånet at det skal betales tilbake før senere lån. Lånet skal innfris i sin helhet om ett år. Samtidig har ikke E vært i stand til å ta opp nye lån for å finansiere nye prosjekter. Kapitalkostnaden for egenkapitalen er 15% i selskapet og lånerenten er 7%. Selskapet har ikke ledige likvider. Nå vurderer man et nytt ettårig investeringsprosjekt med en kostnad på 200. Etter ett år vil prosjektet gi en utbetaling som enten er høy

eller lav. E mener det høye alternativet har en 75%'s sjanse for å inntreffe og vil da gi en utbetaling på 2000, mens det lave alternativet gir en utbetaling på 400.

1. Hva er netto nåverdi til prosjektet? Vil E kunne realisere det?

5.5

En kjøpsopsjon har utøvelsespris på 80, som også er dagens aksjekurs. Aksjen kan enten stige med 6% eller falle med 2% i kommende perioder. Den risikofrie renten er 4% i de samme periodene.

1. Vis hva prisen på kjøpsopsjonen er ved hjelp av replikerende portefølje når tallet på perioder er en.
2. Bruk risikonøytral prising for å sette prisen på kjøpsopsjonen.
3. Bruk risikonøytral prising til å fastlegge prisen på kjøpsopsjonen hvis den utøves etter to perioder.

Kapittel 6

Eksamen 2013

6.1

1. En investor i aksjemarkedet har ingen kunnskap om aksjer eller hvordan man setter sammen en optimal portefølje. Du er en kunderådgiver i lokalbanken hvor investoren er en kunde. Hvilke råd vil du gi til investoren?
2. En venn av deg anbefaler en aksje i selskapet Vinnvinn som han mener vil gi en 20 prosents avkastning i løpet av det kommende året. Kursen på aksjen er i dag 100. Du sjekker bakgrunnen for selskapet og finner at det har en kovarians med markedet generelt på 400, mens standardavviket til markedet er 12.65. Den risikofrie renten er 4.00% og avkastningen på markedet er forventet å være 9.00%. Gjør nødvendige forutsetninger for å besvare spørsmålene under.
   (a) Hvilken forventet avkastning har Vinnvinn?
   (b) Vil det lønne seg å investere i Vinnvinn?
   (c) Anta du regner med at andre investorer også oppdager eventuell feilprising. Hva blir den nye aksjekursen etter ny handel i aksjen?

6.2

Støtt Service har for tiden ikke noe gjeld, og egenkapitalen er fordelt på 30 millioner aksjer. Aksjekursen er 10.50. Selv om investorene forventer at Støtt skal forbli helfinansiert med egenkapital, annonserer Støtt at de vil låne 50 millioner og bruke pengene til å kjøpe tilbake aksjer. Støtt vil bare betale renter og har altså ingen planer om å øke eller redusere lånestørrelsen. Selskapet betaler 27% selskapsskatt.

1. Hva er markedsverdien til Støtts nåværende eiendeler før kunngjøringen?
2. Hva er markedsverdien til Støtts eiendeler like etter at gjelden er utstedt, men før aksjene er kjøpt tilbake?
3. Hva er prisen på en aksje i Støtt like før tilbakekjøpet? Hvor mange aksjer vil Støtt kjøpe tilbake?
4. Hva er Støtts markedsbalanse og aksjekurs etter tilbakekjøpet?

6.3

Aksjekapitalen i et selskap er fordelt på 10 millioner aksjer. I dag har selskapet 10 millioner i ledige kontanter og man venter at driften vil skape en kontantstrøm på 4 millioner hvert år i overskuelig fremtid. Kapitalkostnaden til selskapet er 10%. Nå vurderer styret å dele ut de 10 millionene til aksjonærene, men det er en viss uenighet i styret om hvordan dette skal gjøres. Her er forslagene:

1. Del de ti millionene ut som ekstraordinær dividende.
2. Bruk de ti millionene til å kjøpe tilbake aksjer fra aksjonærene.
3. Utsted nye aksjer eller ta opp et lån slik at utbyttet kan økes til tolv millioner.

1. Analyser hvilken verdi for aksjonærene de tre alternativene har, idet du antar at kapitalmarkedene er perfekte.

6.4

Du vurderer å investere i en europeisk kjøpsopsjon med forfall om 90 dager i et ungt og lovende selskap, Vext AS. I dag er kursen på aksjen 110, aksjens volatilitet er 40% i året, og opsjonens utøvelseskurs er 100. Den risikofrie renten er 5.5% i året. Det er 365 dager i året.

1. Finn kjøpsopsjonens pris.
2. Forklar hvilken virkning en større volatilitet i aksjen vil ha på kjøpsopsjonen.
3. Hva er prisen på en salgsopsjon på en aksje i Vext med samme forfall og samme utøvelseskurs?

Kapittel 7

Kontinuasjon våren 2014

7.1

Det hevdes at verdipapirmarkeder er arbitrasjefrie.

1. Forklar hvorfor dette kan være slik.
2. Finnes avvik fra denne teorien? Forklar.

7.2

Du har sparepenger til overs og vurderer investeringsmuligheter i verdipapirfond. Fondet H er et høyrisikofond, fondet L har lav risiko. Økonomien kan i neste periode være i en av tre mulige konjunkturtilstander, det er høy, middels og svak. Sannsynligheten for både middels og høy er 0.4. H har prosentvis avkastning på -5.00, 10.00 og 25.00 i henholdsvis lav, middels og høy konjunkturtilstand, mens avkastningen for L i de samme tilstandene er 10.00, 8.00 og 6.00.

1. Hva er forventet avkastning og risiko på H og L?
2. Finn minimum-variansporteføljen.
3. Anta at du aksepterer et risikonivå på 1.0 i standardavvik på porteføljen. Hvilken avkastning har en slik portefølje?

7.3

Prospekt AS vurderer et nytt prosjekt med kontantstrømmer som er vist i tabellen nedenfor. Prosjektet har en horisont på tre år og avskrivningene foretas lineært. Selskapets verdi er i dag 1,500 og gjelden er 500. Man ønsker

å opprettholde denne kapitalstrukturen også for de nye enkeltprosjekter som selskapet velger å gå inn i. Prosjektets risiko er den samme som for virksomheten forøvrig. Bedriften endrer ikke arbeidskapital for realisere prosjektet. Kravet til avkastning for egenkapitalen er 15% og lånerenten er 8%.

1. Finn selskapets verdi ved hjelp av totalkapitalmetoden.
2. Finn selskapets verdi ved hjelp av justert nåverdi.
3. Finn selskapets verdi ved hjelp av egenkapitalmetoden.

Opplysninger til oppgave 3:

	Periode			
	0	1	2	3
Salg		200.00	250.00	225.00
Solgte varers kostnad		-75.00	-93.75	-84.38
Driftsutgifter		-80.00	-90.00	-87.00
Avskrivning		-29.00	-29.00	-29.00
EBIT		16.00	37.25	24.63
Investeringer	-87.00			
Endring i arbeidskapital	0.00	0.00	0.00	0.00

7.4

To aksjer A og B er begge verdt 100 i dag. I neste periode kan aksjene gå opp eller ned i verdi, og begge utfall er like sannsynlige. A øker til 125 eller faller til 75, mens B øker til 110 eller faller til 90. Den risikofrie renten er 5%.

1. Hva er forventet verdi til A og B i neste periode?
2. Anta at det er mulig å kjøpe opsjoner på aksjene i dag med forfall i neste periode. Hva ville du betalt for opsjonene til A og B? Kommenter resultatene.
3. Tenk deg at forfall utvides til to perioder. I periode 2 ventes avkastningen på A å være 8% i "opptilstanden" og -4% i "nedtilstanden". Avkastningene i de to tilstandene for B er de samme som for A. Hva er prisen på opsjonen til A og B?

Kapittel 8

Eksamen 2014

8.1

1. En obligasjons pålydende er 100 og den har forfall om fem år. Obligasjonen gir eieren en utbetaling hvert år med en kupongrente på 5%. Markedsrenten er 7.5%. Hva er markedsprisen for obligasjonen i dag?
2. Det omsettes også nullkupongobligasjoner med pålydende 50 i det samme markedet til priser som vist nedenfor:

Forfall år:	1	2	3	4	5
Pålydende	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
Pris	47.17	44.08	40.81	37.44	34.73

   (a) Konstruer avkastningskurven (rentekurven) i markedet ut fra oppgavene i tabellen.
   (b) Kan du prise obligasjonen i oppgave 1 ut fra opplysningene i deloppgave a? Vis hvordan dette kan gjøres.

8.2

Du investerer i aksjer og følger spesielt med på aksjene i tabellen nedenfor. Nyheter har kommet til markedet som endrer forventet avkastning og volatilitet (i prosent) til aksjene.

Selskap	Forventet avkastning	Volatilitet	Korrelasjon
A	18	40	1.00
B	15	15	0.75
C	7	15	0.80
D	7	5	0.60
E	3	10	-0.10
Marked	7	10	
Risikofri	3		

1. Hva er kravet til avkastning for hver aksje?
2. Hvilke aksjer ville du kjøpe og hvilke ville du selge?
3. Undersøkelser har vist at mange småinvestorer setter pengene i et fåtall aksjer. Er dette en fornuftig investeringsstrategi?

8.3

Et selskap Sjans er dannet for å utnytte et ettårig prosjekt og så legges ned. Prosjektet med navn A krever en investering i dag på 100 og det gir en utbetaling på enten 115 eller 180 om ett år. Mulighetene har like stor sannsynlighet for å inntreffe. Risikofri rente er 10% og selskapets beta er null. Sjans tar opp et lån på 110 for å finansiere investeringen.

I kjølvannet av prosjekt A dukker et nytt prosjekt B opp. Dette prosjektet er helt uavhengig av A. Det krever ingen investering, men gir enten 100 eller -100 om ett år, igjen med like stor sannsynlighet.

1. Hva er verdien for eiere og långivere av prosjekt A? Bør prosjektet gjennomføres?
2. Kan det lønne seg for Sjans' eiere å gjennomføre også prosjekt B?
3. Hvordan vil Sjans' långivere reagere på kunnskapen om at Sjans også investerer i B?
4. Kan du bruke tankegang fra opsjonsprising for å løse dette problemet?

8.4

Du vurderer å investere i en aksje som i dag har en aksjekurs på 100. Du venter at aksjekursen enten vil øke med 10% eller falle med 4%. Du bestemmer deg for å kjøpe en opsjon med utøvelseskurs på 100 og forfall om ett år. Risikofri rente er 5%.

1. Hva er dagens verdi av kjøpsopsjonen?

2. Du vurderer eventuelt å investere i en likeverdig portefølje bestående av en investering i aksjen og et lån. Hva er investeringen og hva er lånet?
3. Hva er opsjonen verdt dersom aksjekursen i stedet kan stige med 20%, mens nedgangen fremdeles er 4%? Kommenter.
4. Bruk de opprinnelige verdiene. Nå kan forfall forlenges til to år. Hva er nå opsjonens verdi? Kommenter.

Kapittel 9

Kontinuasjon 2015

9.1

1. Et sentralt mål i finansiell økonomi er å øke eiernes formue.
   (a) Er dette et godt mål?
   (b) Vil en daglig leder uten aksjer i selskapet være enig i målet?
2. I selskapet Sporty er det ansatt en daglig leder som kommer med et nytt prosjekt. Hvis prosjektet godtas i styret, vil prosjektet føre til at volatiliteten i Sportys aksje øker med 50%, men prosjektet vil ha liten betydning for dets forventede avkastning. Sporty har en gjeldsandel på 50%. Vil eierne være interessert i prosjektet?

9.2

Du skal sette sammen en porteføljе av to aksjer 1 og 2 som har følgende kjennetegn:

	1	2
Avkastning	3.20	14.00
Varians	6.96	84.00
Korrelasjon	0.05	

1. Finn avkastning og risiko i den porteføljen som har lavest varians.
2. Anta at risikofri rente er 2%. Kombiner den risikofrie renten med porteføljen som har lavest varians.
   (a) Hva er meravkastningen for denne kombinasjonen?
   (b) Vis hvordan du kan forbedre kombinasjonen.

9.3

1. Selskapet Hitt har et prosjekt som gir enten 150 eller 25 om ett år med like stor sannsynlighet, og null i alle perioder deretter. Prosjektets beta er null og risikofri rente er 5.0%. Forutsetningene for et perfekt kapitalmarked gjelder. Styret i Hitt vurderer om man skal finansiere investeringen på 75 i prosjektet med egenkapital eller med lån. Beløpene er i millioner.
   (a) Hva er verdien av egenkapital og lån i periode 1? Kommenter.
   (b) Hva er nåverdien for de to finansieringsalternativene? Kommenter.
2. Anta at Hitt har 1,000,000 aksjer ved årets begynnelse og ingen gjeld. Man kunngjør planer om å ta opp lån med pålydende 75 millioner og bruke midlene til å kjøpe tilbake aksjer. Det viser seg at det oppstår krise- og konkurskostnader på 10 hvis det svake alternativet på 25 realiseres.
   (a) Hva er aksjekursen etter tilbakekjøpet av aksjer? Kommenter.

9.4

Den risikofrie renten er fremdeles 5%. En aksje omsettes for 65. Aksjens volatilitet er 40%. Det finnes kjøps- og salgsopsjoner på aksjen. Utøvelseskursen til kjøpsopsjonen er 60 og det er seks måneder til forfall.

1. Hva bør kjøpsopsjonen omsettes for?
2. Hva bør en salgsopsjon med samme utøvelseskurs omsettes for?
3. Anta at salgsopsjonen omsettes for 5.00. Kan en markedsaktør tjene penger uten å investere og uten å ta risiko ved disse prisene? Vis hvordan aktøren kan gjennomføre en eventuell lønnsom handel.

Kapittel 10

Eksamen 2015

10.1

Selskapet Eng forventer å skape et driftsresultat på 2000 neste år. Egenkapitalen i selskapet er fordelt på 200 aksjer. Kapitalkostnaden for egenkapitalen er beregnet til 10%, og egenkapitalandelen er 40%, som Eng tar sikte på å opprettholde i årene som kommer. Bedriften har som retningslinje at det årlige driftsresultatet i sin helhet deles ut til aksjonærene i form av et utbytte.

1. Anta at driftsresultatet er konstant i alle fremtidige år. Hva prisen på selskapets aksje?
2. Anta nå at driftsresultatet etter neste år øker med 5% i de påfølgende fem årene, for deretter å falle ned til 2% vekst i tre år og så ingen vekst i overskuelig fremtid. Hva er nå en aksje i Eng verdt?

10.2

Du er interessert i aksjekursutviklingen for et selskap HA på Oslo Børs. For å beregne sammenhengen mellom avkastningen på HA og aksjemarkedet generelt, har du gjennomført en regresjon med en forenklet versjon av markedsmodellen, hvor risikofri rente er ignorert. Regresjonen viser følgende resultater:

Regresjonsstatistikk	
Multippel R	0.385
R-kvadrat	0.148
Justert R-kvadrat	0.145
Standardfeil	2.573
Observasjoner	249

	Koeffisienter	Standardfeil	t-Stat	P-verdi
Skjæringspunkt	0.061	0.163	0.371	0.711
dosebx	1.137	0.173	6.556	0.000

"dosebx" er avkastningen til en bredt sammensatt portefølje på Oslo Børs.

1. Forklar nærmere hvilken modell du har anvendt og hvordan du gikk frem.
2. Hva forteller regresjonen? Kan vi stole på resultatene?
3. Hvordan kan resultatene fra analysen anvendes?

10.3

Anta at selskapene Utmark og Utslått befinner seg i en økonomi uten skatter. Utmark har ikke noe gjeld, mens Utslått har en gjeld på 7500 som det betaler 5% rente på i året. Selskapene har identiske prosjekter som skaper kontantstrømmen 800 eller 1600 hvert år. Kontantstrømmen utbetales som dividende etter at betaling av renter på gjeld er foretatt.

1. Vis betalingene til gjeld og egenkapital.
2. Anta at du eier 10% av egenkapitalen i Utmark. Du kunne valgt en annen portefølje som har samme kontatstrøm. Hvilken ville det være?
3. Anta at du eier 10% av egenkapitalen i Utslått. Du kan låne til 5% rente. Kan du da velge en alternativ strategi til denne porteføljen?

10.4

1. Bruk diagrammer til å vise hvordan opsjonsteori kan brukes til å karakterisere egenkapital og lån til bedriften.
2. Bruk teorien til å beskrive eventuelle konflikter mellom eiere og långivere.
3. Hvilke tiltak kan långivere iverksette i en eventuell konflikt?

Kapittel 11

Utsatt eksamen 2016

11.1

1. Forklar hvilke fordeler og ulemper aksjeselskapsformen har fremfor partnerskap.
2. Har børsnoterte aksjeselskaper fordeler fremfor ikke-børsnoterte? Gjør rede for slike fordeler i så fall.
3. Hvilke aksjeselskapsformer har vi i Norge? Karakteriser kort hva som kjennetegner de to formene.

11.2

11.2.1

Om aksjene til to selskaper notert på en børs i nærheten foreligger det følgende opplysninger om avkastning, risiko (standardavvik) og korrelasjon:

	Avkastning	Risiko	Korrelasjon(1,2)
1	10	15	0.1
2	4	10	

1. Hva er avkastning og risiko i en likeveid porteføljе av de to aksjene?
2. Hva er avkastning og risiko i porteføljen med minst risiko?
3. Anta at korrelasjonen(1,2) mellom de to aksjene i stedet er perfekt negativ, -1.0. Hva betyr det at aksjene er perfekt negativt korrelert? Hva er nå avkastning og risiko i porteføljen med minst varians?

11.3

Du er på jobbintervju og skal kommentere resultatene fra tre regresjoner i tabellen nedenfor. Regresjonene er foretatt med markedsmodellen

$$r_{jt} = \alpha + \beta r_{mt} + u_t. \tag{11.1}$$

r_{jt} er avkastning på selskap j i periode t, r_{mt} er avkastningen på Oslo Børs Hovedindeks (OSEBX) og u_t er et feilledd. Regresjonene ble foretatt for daglige data i 2013.

	Koeffisient	Standardfeil	t Stat	P-verdi	R^2
DNB					0.472
Konstant (α)	0.055	0.073	0.748	0.455	
r_{osebx}	1.568	0.106	14.830	0.000	
Marine Harvest					0.213
Konstant (α)	0.079	0.080	0.980	0.328	
r_{osebx}	0.946	0.116	8.149	0.000	
Petroleum Geo-Services					0.370
Konstant (α)	-0.238	0.093	-2.572	0.011	
r_{osebx}	1.610	0.134	12.031	0.000	

11.4

Selskapet Hel skaper hvert år en kontantstrøm ($EBIT$) på 750. Selskapet er i sin helhet finansiert med egenkapital. Dets beta er 1.5, risikofri rente er 6% og avkastningen på en bredt sammmensatt aksjeportefølje er 12%. Selskapet Halv har samme forretningsmessige risiko som Hel, det skaper den samme kontantstrøm hvert år, men selskapet er finansiert med 50% gjeld. Skattesatsen på selskapets driftsresultat er 25%, inntekten skattes også med 25%, mens skattesatsen på utbytte er null.

1. Anta et perfekt kapitalmarked. Hva er verdien til Hel og Halv?
2. Anta en verden med bare skatt på selskapets driftsresultat. Hva er nå verdien til de to selskapene?
3. I denne delen skal du regne med alle skatter. Finn verdien til Hel og Halv.
4. Kommenter resultatene.

11.5

11.5.1

Det skrives både kjøps- og salgsopsjoner på oppdrettsselskapet Laks sine aksjer, men du har tilgang til opplysninger bare om salgsopsjonen. Aksjen omsettes for tiden for 75.00. Aksjen betaler ikke utbytte. En ettårig europeisk salgsopsjon på aksjen med utøvelseskurs 80.00 omsettes for 10.00. Den risikofrie renten er 5%.

1. Definer kjøps- og salgsopsjon og vis deres avkastningsprofiler ved forfall.
2. Hva er prisen på en kjøpsopsjon på firmaets aksjer med samme utøvelseskurs og forfall?

11.5.2

En aksje har i dag verdi 10.00, som også er kjøpsopsjonens utøvelsespris. I neste periode kan prisen gå opp 20.0% eller falle 2.5%. Risikofri rente i markedet er 5.0%.

1. Hva er kjøpsopsjonens pris i dag? Bruk risikonøytral prising.
2. Anta nå at prisen kan enten gå opp 40% eller falle 5% neste periode. Hva er nå kjøpsopsjonens pris?
3. Forklar hvorfor opsjonsprisen endres fra delspørsmål 1 til 2. Hvilke andre faktorer forklarer prisen på en opsjon?

Kapittel 12

Eksamen 2016

12.1

1. Forklar hva som menes med eiernes begrensete ansvar og hvilke fordeler som følger.
2. Kan begrenset ansvar medføre noen form for risiko?
3. Forklar hva et arbitrasjefritt marked er.

12.2

I jakten på gode investeringsmuligheter vurderer en investor følgende aksjer, hvor avkastning og volatilitet er oppgitt i prosent:

Aksje	Forventet avkastning	Volatilitet	Beta
C	15.00	25.00	1.75
D	11.00	30.00	1.42
H	10.00	35.00	0.55
D	7.00	20.00	1.17

Avkastningen på markedsporteføljen er 10%, volatiliteten i markedsporteføljen er 12.50% og risikofri rente er 5.00%.

1. Hvilke aksjer ville du anbefale investoren å kjøpe og hvilke bør selges?

12.3

Du jobber i et selskap som vurderer å utstede evigvarende gjeld. Din oppgave er å gi et estimat over hvilket gjeldsnivå som lønner seg når du tar hensyn til renteskattefordel og stresskostnader. Stresskostnadene er beregnet til 20 millioner idet selskapet når et gjeldsnivå på 50 millioner. Deretter stiger stresskostnadene med 10% for hver 10 millioners økning i gjeld. Selskapets rentekostnad er 5% ved alle gjeldsnivåer, selskapet er i skatteposisjon og bedriftsskatten er 23%. Selskapets beta er null. Du har følgende estimat for sannsynligheten for at stresskostnader oppstår ved ulike gjeldsnivåer og noen utvalgte stresskostnader:

	Gjeld (mill)						
	0	40	50	60	70	80	90
$Prob(Stress)$	0.00	0.00	0.05	0.07	0.10	0.16	0.35
Stresskostnader	10.00	15.00	20.00				

Anta at stresskostnadene er i nåverdier.

1. Hvilket gjeldsnivå er optimalt med de opplysningene som er gitt ovenfor?
2. Anta at bedriftsskatten senkes til 10%. Hva er nå optimalt gjeldsnivå?
3. Beskriv viktige typer stresskostnader.

12.4

Aksjebeholdningen i selskapet Kjop består av 1,1 million aksjer. Selskapet har 10 millioner i ledige kontanter, ingen gjeld og markedsverdien av egenkapital er 100m. Nå har Kjop planer om å dele ut kontantene gjennom et tilbakekjøp av aksjer. Etter at tilbakekjøpet er gjennomført, kommer det frem nyheter som betyr at verdien til Kjop vil være enten 150m eller 50m.

1. Hva er aksjekursen i Kjop før tilbakekjøpet?
2. Hva er aksjekursen etter nyheten dersom den gode nyheten inntreffer? Hva er kursen hvis den dårlige nyheten skjer?
3. Anta nå at Kjop venter til etter at nyheten er sprunget med å gjøre kjent at man velger å kjøpe tilbake. Hva er nå virkningen på aksjekursen hvis den gode eller den dårlige nyheten inntreffer?
4. Anta at ledelsen forventer at gode nyheter kommer frem og anta videre at ledelsen ønsker å maksimere Kjops aksjekurs. Vil ledelsen bestemme seg for tilbakekjøp før eller etter at nyheten blir kjent, gitt svarene på spørsmålene 2 og 3?

5. Hvilken virkning vil annonsering av tilbakekjøpet ha på aksjekursen, gitt svaret i spørsmål 4?

12.5

En aksje har i dag verdi 50.00. Det er skrevet opsjoner på aksjen, og kjøpsopsjonens utøvelsespris er 40. I neste periode kan prisen gå opp 15.0% eller falle 5.0%. Risikofri rente i markedet er 5.0%.

1. Hva er kjøpsopsjonens pris i dag?
2. Anta nå at aksjekursen i utgangspunktet ($t = 0$) er 40.00, mens andre størrelser er uendret. Hva er opsjonsprisen i dette tilfellet?
3. Forklar hvorfor opsjonsprisen endres fra delspørsmål 1 til 2. Hvilke andre faktorer forklarer prisen på en opsjon?

Kapittel 13

Utsatt eksamen 2017

13.1

Du vurderer å plassere sparepengene i et fond som representerer en portefølje av enkeltaksjer. En andel i fondet Notert representerer to aksjer i Borregaard, tre i Storebrand og en i Aker. Aksjekursene til selskapene er vist nedenfor.

Aksje	Aksjekurs
Borregaard	84.50
Storebrand	45.92
Aker	154.50

1. Hva menes med en arbitrasjefri pris på en andel i Notert? Hva er den prisen?
2. Anta du finner ut at andelen omsettes for 430. Er det en arbitrasjemulighet? Kan du tjene på å kjøpe og selge Notert og aksjene i den? Hva er en arbitrasjemulighet?
3. Hva om prisen i stedet er 475? Er det en arbitrasjemulighet?
4. Hva menes med verdiadditivitet?

13.2

Selskapet Soek undersøker om det er grunnlag for å foreta en investering i forbedret markedsføring og mer salg av hovedproduktet sitt, kommunikasjonstjenester. Korrelasjonen med markedsporteføljen er 0.75, variansen i markedsporteføljen er 0.0625 og variansen til Soek er 0.16. Risikofri rente er 4% og markedets risikopremie er 10%. Investeringen har levetid ett år og

dagens investeringsbeløp er 650. Innbetalingsoverskuddet fra investeringen vil neste år være 800.

1. Bør Soek investere? Begrunn svaret med nødvendige beregninger.
2. Hvorfor er det så vanskelig å slå markedsporteføljen?
3. Nevn grunner til at personer ikke velger markedsporteføljen når de plasserer sine penger.

13.3

Firmaet Fromme er i dag uten gjeld. Egenkapitalen er fordelt på 200 aksjer. Firmaet skaper hvert år et driftsresultat ($EBIT$) på 106.67. Etterspørselen etter Frommes salgsvarer er stabil og kostnadene forutsigbare. Anta derfor at driftsresultatet vil holde seg på samme nivå i overskuelig fremtid. Kapitalkostnaden for egenkapitalen er 10%. Skattesatsen på selskapets resultat er 25%. Fromme ønsker nå å øke gjeldsandelen ved å ta opp et lån på 400 til 5% rente og bruke beløpet til å kjøpe tilbake aksjer fra nåværende eiere. Gjeldsandelen vil Fromme holde på samme nivå i fremtiden.

1. Hva er Frommes verdi når selskapet er uten gjeld og etter at gjelden er tatt opp?
2. Gjør beregninger som viser hva eierne tjener eller taper på å bytte ut egenkapital med gjeld.

13.4

Verdien av en opsjoner skal beregnes. I utgangspunktet er aksjekursen 100, utøvelsespris 110, det er ni måneder til forfall og risikofri rente er 5%. Beta til selskapets aksjer er 1.0, korrelasjonen mellom selskapet og markedsporteføljen er 0.5 og markedsvolatiliteten er 0.125.

1. Hva er en arbitrasjefri pris på en kjøpsopsjon?
2. Hva er tilsvarende pris på en salgsopsjon med samme utøvelseskurs?
3. Anta at utøvelsespris er 90. Hva er nå prisen på henholdsvis kjøps- og salgsopsjonen? Kommenter resultatet.

Kapittel 14

Eksamen2017

En nyttig formel for løsning av den kvadratiske funksjonen $ax^2 + bx + c = 0$ er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{14.1}$$

14.1 Selskapsform

1. Hva kjennetegner noen vanlige former for juridisk organisering av et selskap? Forklar.
2. Har aksjeselskapet fordeler fremfor andre former for organisering? Hva med ulempene? Forklar.
3. Bør et selskap søke å maksimere selskapets verdi for eierne? Forklar.

14.2 Portefølje

Et oljeland har også et investeringsfond som investerer i olje- og gass-selskaper over hele verden. Fondet har ellers investeringer i et vidt antall næringer og selskaper. Neste år forventes verdensøkonomien å være i en av tre tilstander. Nedenfor vises "Olje" og "Annet" sine forventede prosentvise avkastninger neste år i de tre tilstandene.

		Avkastninger	
Tilstand	Sanns	Olje	Annet
1	1/3	40.00	2.50
2	1/3	30.00	10.00
3	1/3	5.00	17.50

1. Finn forventet avkastning og risiko for begge typer investering og korrelasjonen mellom "Olje" og "Annet".
2. Det er uenighet om hva målsettingen for fondet er. Vurder og kommenter følgende alternativer
   (a) Maksimal avkastning
   (b) Minimal risiko
   Hvor stor vekt legger man på "Olje" i de to alternativene?
3. Et annet stridstema er hvor tungt man skal investere i "Olje". Vurder og kommenter følgende alternativer:
   (a) En avkastning på 20.0 prosent på porteføljen
   (b) En risiko i porteføljen på 5.0%
   Hvor stor vekt legger man på "Olje" i de to alternativene?
4. Anta nå at forventningene til "Olje" forandres slik at forventet avkastning er 15.0%, risikoen uttrykt som standardavvik er 7.0 og korrelasjonskoeffisienten mellom "Olje" og "Annet" er 0. Vis hvordan disse opplysningene forandrer konklusjonene dine fra deloppgave 2.

14.3 Opsjon

En kjøpsopsjon med forfall om seks måneder har en utøvelsespris på 48.00. Prisen på aksjen i dag er 45.00 og aksjens volatilitet er 0.40. Aksjen betaler ikke utbytte. Den risikofrie renten er 5.0%.

1. Finn kjøpsopsjonens pris.
2. Hva er prisen på kjøpsopsjonen hvis forfall flyttes til om ett år? Kommenter resultatet.
3. Anta at aksjen betaler et proporsjonalt utbytte på 5% og at andre forutsetninger er som i deloppgave 1. Hva er nå kjøpsopsjonens pris?

14.4 Kapitalstruktur; risiko-overvelting

Aksjebeholdningen i selskapet Utdel består av 1 million aksjer. Selskapet har 7,5 millioner i ledige kontanter og ingen gjeld. Virksomheten gir en sikker kontantstrøm i overskuelig fremtid på 3 millioner pr. år, som deles ut som utbytte. Risikofri rente er 8.0% og selskapets beta er lik null. Det er ingen skatt på Utdels resultat, på renteinntekter eller dividende. Det er heller ingen andre markedsimperfeksjoner i økonomien.

1. Vis hva aksjekursen blir hvis Utdel deler ut ledige kontanter som dividende.
2. Hva blir aksjekursen hvis Utdel bruker ledige kontanter til å kjøpe tilbake aksjer?

3. Er dividende eller tilbakekjøp best for en investor? Analyser for en investor som eier 1,500 aksjer i Utdel.
   (a) Anta at Utdel kjøper tilbake, men at investoren ønsker kontanter. Vis hvordan investoren kan få kontanter.
   (b) Anta at Utdel deler ut utbytte, men at investoren ønsker å reinvestere i selskapet. Vis hvordan investoren kan gjøre det.
4. Anta at Utdel utsteder aksjer til en verdi av 2,5 millioner for å finansiere et ekstrautbytte i tillegg til den ekstraordinære utbetalingen på 7,5 millioner. Utdels investeringsprogram holdes fast. Tjener investorene på en slik fremgangsmåte?

Tillegg A

Symboler, formler og tabell

S_t	Aksjekurs i periode t
B	Kurs på obligasjon
M	Obligasjonens pålydende
y	Avkastning til forfall (også YTM)
K_t	Kontantstrøm i periode t
I	Investering
V	Selskapets verdi; V_U uten gjeld, V_L med gjeld
E, D	Egenkapital, gjeld
DIV_t	Utbytte i periode t
Div_t	Utbytte pr. aksje i periode t
C_0	Kjøpsopsjonens verdi i periode 0
P_0	Salgssopsjonens verdi i periode 0
X	Utøvelseskurs
q	Risikonøytral sannsynlighet
r_E	Avkastning på egenkapitalen
r_D	Selskapets lånerente
r_{wacc}	Veid gjennomsnittlig kapitalkostnad
r_f	Risikofri rente
r_i	Avkastning på verdipapir i
r_m	Avkastning på markedet i gjennomsnitt
r_U	Aksjeavkastning på et gjeldfritt selskap
r_L	Aksjeavkastning på et selskap med gjeld
g	Veksthastighet
EPS	"Earnings per share" Driftsresultat/(antall aksjer)
r_P	Avkastning på porteføljen
τ_c	Selskapsskattesats
τ_d	Skattesats på utbytte
τ_i	inntektsskattesats
τ_g	Skattesats på kursstigning
β_i	Systematisk risiko for aksje i
σ_i	Selskapsspesifikk risiko for selskap i
σ_p	Porteføljens risiko
σ_{ij}	Kovariansen mellom selskapene i og j
ρ_{ij}	Korrelasjonen mellom selskapene i og j

Liste over formler

$$y = \left(\frac{M}{B}\right)^{1/T} - 1 \tag{A.1}$$

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Div_t}{(1+r_E)^t} + \frac{S_T}{(1+r_E)^T} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta EBIT}{EBIT} &= \text{Driftsresultatets vekstrate} \\ &= \text{Tilbakeholdsandel} \times \text{Avkastning på investering} \\ &= \left(1 - \frac{Div}{EPS}\right) \times \text{Avkastning på investering} \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$E\left(r_p\right) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \\ &= \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}} \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{A.6}$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_{ij} + \frac{1}{N}\left(\sigma^2 - \sigma_{ij}\right) \tag{A.7}$$

$$E\left(r_i\right) = r_f + \left(E\left(r_m\right) - r_f\right)\beta_i \tag{A.8}$$

$$r_E = r_U + \left(r_U - r_D\right)\frac{D}{E} \tag{A.9}$$

$$V_E = \frac{EBIT}{r_U} = V_L = \frac{EBIT}{r_U} \tag{A.10}$$

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D = r_U = r_A \tag{A.11}$$

$$V_U = \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{EBIT \times (1-\tau_c)}{r_U} + \frac{\tau_c r_D D}{r_D} \\ &= V_U + \tau_c D \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)(1-\tau_c)\frac{D}{E} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} V_L &= V_U + \left[1 - \frac{(1-\tau_c)(1-\tau_d)}{(1-\tau_i)}\right] \times D \\ &= V_U + N^* \times D \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f} X = P_0 + S_0 \qquad \text{eller} \qquad C_0 + \frac{1}{1+r_f} X - P_0 - S_0 = 0 \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f - d}{u-d} C_u + \frac{u - r_f}{u-d} C_d\right] \\ &= \frac{1}{1+r_f}\left[q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d\right] \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q) C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \tag{A.18}$$

$$
\begin{aligned}
C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

$$
\beta_E = \frac{A\Delta}{A\Delta + B}\beta_U = \frac{(E+D)\Delta}{E}\beta_U = \Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)\beta_U \tag{A.20}
$$

$$
\beta_D = (1-\Delta)\frac{A}{D}\beta_U = (1-\Delta)\left(1 + \frac{E}{D}\right)\beta_U \tag{A.21}
$$

$$
\beta_U = \frac{\beta_E}{\Delta\left(1 + \frac{D}{E}\right)} \tag{A.22}
$$

$$
\frac{NNV}{I} = \frac{\beta_D}{\beta_E} \cdot \frac{D}{E} \tag{A.23}
$$

Tabell A.1 Verdier i den standardiserte normalfordelingen

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
-3.00	0.00135	-2.30	0.01072	-1.60	0.05480	-0.90	0.18406	-0.20	0.42074
-2.98	0.00144	-2.28	0.01130	-1.58	0.05705	-0.88	0.18943	-0.18	0.42858
-2.96	0.00154	-2.26	0.01191	-1.56	0.05938	-0.86	0.19489	-0.16	0.43644
-2.94	0.00164	-2.24	0.01255	-1.54	0.06178	-0.84	0.20045	-0.14	0.44433
-2.92	0.00175	-2.22	0.01321	-1.52	0.06426	-0.82	0.20611	-0.12	0.45224
-2.90	0.00187	-2.20	0.01390	-1.50	0.06681	-0.80	0.21186	-0.10	0.46017
-2.88	0.00199	-2.18	0.01463	-1.48	0.06944	-0.78	0.21770	-0.08	0.46812
-2.86	0.00212	-2.16	0.01539	-1.46	0.07215	-0.76	0.22363	-0.06	0.47608
-2.84	0.00226	-2.14	0.01618	-1.44	0.07493	-0.74	0.22965	-0.04	0.48405
-2.82	0.00240	-2.12	0.01700	-1.42	0.07780	-0.72	0.23576	-0.02	0.49202
-2.80	0.00256	-2.10	0.01786	-1.40	0.08076	-0.70	0.24196	0.00	0.50000
-2.78	0.00272	-2.08	0.01876	-1.38	0.08379	-0.68	0.24825	0.02	0.50798
-2.76	0.00289	-2.06	0.01970	-1.36	0.08691	-0.66	0.25463	0.04	0.51595
-2.74	0.00307	-2.04	0.02068	-1.34	0.09012	-0.64	0.26109	0.06	0.52392
-2.72	0.00326	-2.02	0.02169	-1.32	0.09342	-0.62	0.26763	0.08	0.53188
-2.70	0.00347	-2.00	0.02275	-1.30	0.09680	-0.60	0.27425	0.10	0.53983
-2.68	0.00368	-1.98	0.02385	-1.28	0.10027	-0.58	0.28096	0.12	0.54776
-2.66	0.00391	-1.96	0.02500	-1.26	0.10383	-0.56	0.28774	0.14	0.55567
-2.64	0.00415	-1.94	0.02619	-1.24	0.10749	-0.54	0.29460	0.16	0.56356
-2.62	0.00440	-1.92	0.02743	-1.22	0.11123	-0.52	0.30153	0.18	0.57142
-2.60	0.00466	-1.90	0.02872	-1.20	0.11507	-0.50	0.30854	0.20	0.57926
-2.58	0.00494	-1.88	0.03005	-1.18	0.11900	-0.48	0.31561	0.22	0.58706
-2.56	0.00523	-1.86	0.03144	-1.16	0.12302	-0.46	0.32276	0.24	0.59483
-2.54	0.00554	-1.84	0.03288	-1.14	0.12714	-0.44	0.32997	0.26	0.60257
-2.52	0.00587	-1.82	0.03438	-1.12	0.13136	-0.42	0.33724	0.28	0.61026
-2.50	0.00621	-1.80	0.03593	-1.10	0.13567	-0.40	0.34458	0.30	0.61791
-2.48	0.00657	-1.78	0.03754	-1.08	0.14007	-0.38	0.35197	0.32	0.62552
-2.46	0.00695	-1.76	0.03920	-1.06	0.14457	-0.36	0.35942	0.34	0.63307
-2.44	0.00734	-1.74	0.04093	-1.04	0.14917	-0.34	0.36693	0.36	0.64058
-2.42	0.00776	-1.72	0.04272	-1.02	0.15386	-0.32	0.37448	0.38	0.64803
-2.40	0.00820	-1.70	0.04457	-1.00	0.15866	-0.30	0.38209	0.40	0.65542
-2.38	0.00866	-1.68	0.04648	-0.98	0.16354	-0.28	0.38974	0.42	0.66276
-2.36	0.00914	-1.66	0.04846	-0.96	0.16853	-0.26	0.39743	0.44	0.67003
-2.34	0.00964	-1.64	0.05050	-0.94	0.17361	-0.24	0.40517	0.46	0.67724
-2.32	0.01017	-1.62	0.05262	-0.92	0.17879	-0.22	0.41294	0.48	0.68439

Tabell A.2 Verdier i den standardiserte normalfordelingen (forts.)

d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)	d	N(d)
0.50	0.69146	1.20	0.88493	1.90	0.97128	2.60	0.99534
0.52	0.69847	1.22	0.88877	1.92	0.97257	2.62	0.99560
0.54	0.70540	1.24	0.89251	1.94	0.97381	2.64	0.99585
0.56	0.71226	1.26	0.89617	1.96	0.97500	2.66	0.99609
0.58	0.71904	1.28	0.89973	1.98	0.97615	2.68	0.99632
0.60	0.72575	1.30	0.90320	2.00	0.97725	2.70	0.99653
0.62	0.73237	1.32	0.90658	2.02	0.97831	2.72	0.99674
0.64	0.73891	1.34	0.90988	2.04	0.97932	2.74	0.99693
0.66	0.74537	1.36	0.91309	2.06	0.98030	2.76	0.99711
0.68	0.75175	1.38	0.91621	2.08	0.98124	2.78	0.99728
0.70	0.75804	1.40	0.91924	2.10	0.98214	2.80	0.99744
0.72	0.76424	1.42	0.92220	2.12	0.98300	2.82	0.99760
0.74	0.77035	1.44	0.92507	2.14	0.98382	2.84	0.99774
0.76	0.77637	1.46	0.92785	2.16	0.98461	2.86	0.99788
0.78	0.78230	1.48	0.93056	2.18	0.98537	2.88	0.99801
0.80	0.78814	1.50	0.93319	2.20	0.98610	2.90	0.99813
0.82	0.79389	1.52	0.93574	2.22	0.98679	2.92	0.99825
0.84	0.79955	1.54	0.93822	2.24	0.98745	2.94	0.99836
0.86	0.80511	1.56	0.94062	2.26	0.98809	2.96	0.99846
0.88	0.81057	1.58	0.94295	2.28	0.98870	2.98	0.99856
0.90	0.81594	1.60	0.94520	2.30	0.98928	3.00	0.99865
0.92	0.82121	1.62	0.94738	2.32	0.98983	3.02	0.99874
0.94	0.82639	1.64	0.94950	2.34	0.99036	3.04	0.99882
0.96	0.83147	1.66	0.95154	2.36	0.99086	3.06	0.99889
0.98	0.83646	1.68	0.95352	2.38	0.99134	3.08	0.99896
1.00	0.84134	1.70	0.95543	2.40	0.99180	3.10	0.99903
1.02	0.84614	1.72	0.95728	2.42	0.99224	3.12	0.99910
1.04	0.85083	1.74	0.95907	2.44	0.99266	3.14	0.99916
1.06	0.85543	1.76	0.96080	2.46	0.99305	3.16	0.99921
1.08	0.85993	1.78	0.96246	2.48	0.99343	3.18	0.99926
1.10	0.86433	1.80	0.96407	2.50	0.99379	3.20	0.99931
1.12	0.86864	1.82	0.96562	2.52	0.99413	3.22	0.99936
1.14	0.87286	1.84	0.96712	2.54	0.99446	3.24	0.99940
1.16	0.87698	1.86	0.96856	2.56	0.99477	3.26	0.99944
1.18	0.88100	1.88	0.96995	2.58	0.99506	3.28	0.99948

Bibliografi

Jonathan Berk and Peter DeMarzo. *Corporate Finance*. Pearson, Boston, MA, 4th edition, 2017.

Richard C. Brealey, Stewart C. Myers, and Franklin Allen. *Principles of Corporate Finance*. Irwin McGraw-Hill, Boston, 9. edition, 2008.

R. Øystein Strøm. *Foretaksfinans*. Universitetsforlaget, Oslo, 2017.

Kap. 1: Oppgaver – Løsningsforslag

1

Vi kan definere selskapets organisasjonsform ut fra eierskapet.

Eneeier og partnerskap Selskapet eies og drives av en person, eller av flere personer sammen. Eierne er ansvarlige for gjelden. Et advokatkontor er ofte organisert som et partnerskap. Man deler resepsjon, kontorer og kantine, men hver partner har sine egne prosjekter. Den enkelte partner betaler så sin del av felleskostnadene.

Samvirke Dette er som regel medlemsorganisasjoner. Denne formen for organisasjon er forholdsvis mye analysert, se for eksempel **?**. Hvert medlem har så en stemme, uansett hvor viktig man er overfor organisasjonen. Foretaket kan eies av:

- *Leverandørene* Et eksempel kan være meierisamvirket. Hver melkebonde har altså en stemme på generalforsamlingen hvert år, uansett hvor mye melk han eller hun har levert i løpet av året.
- *Ansatte* Arbeiderstyrte bedrifter og partnerskap.
- *Forbrukerne* Eks.: Boligsamvirke, Coop.

Aksjeselskap Selskapet eies av investorer som bare har ansvar for den kapital som er skutt inn i foretaket. Eierskapet gir to rettigheter: Til utbytte og til å velge styremedlemmer på Generalforsamlingen. En eier kan vanligvis stemme for det antall aksjer man har i selskapet. Eier man altså 12 aksjer i et selskap med 1.000 aksjer, teller de tolv stemmene 1.2% av alle stemmene på generalforsamlingen. Valgretten oppsummerer aksjonærdemokratiet, d.v.s. at hver eiers vekt i avstemmingen er eierens eierandel, eierens "sits". Eierne har *begrenset ansvar*. Det betyr at de bare kan tape den kapitalen de har vært med på å skyte inn i selskapet. Det betyr jo at den minste verdien aksjene kan ha er null. Aksjeverdien kan aldri bli negativ.

Stiftelse En stiftelse har ingen eiere. Det betaler derfor heller ikke noe ut-

bytte. En stiftelse dannes for å tjene et visst formål, for eksempel støtte til utdanning eller drift av en barnehage. Stiftelsen kan ikke forlate formålet.

2

2.1

Aksjeselskapet som eierform har fordeler over alternativer (partnerskap, samvirke etc.) fordi:

- Aksjeselskapet har *begrenset ansvar* for innskyterne av kapital i selskapet. Bare den kapital som er skutt inn kan tapes.
- Aksjeselskapet er et eget rettssubjekt og kan derfor ta opp egne lån.
- Ekspansjon av virksomheten er (relativt) enkel. Med egne lån og ved emisjon av nye aksjer kan selskapet skaffe finansiering til videre vekst uten å kreve hele finansieringen betalt av de opprinnelige stifterne.
- Overgang av eierskap til selskapet er (relativt) enkelt. Man selger (eller gir for eksempel innen familien) aksjene til en annen. En kjøper kan raskt bygge seg opp en viktig aksjepost i selskapet. Ved konkurs går eierskapet over til selskapets kreditorer.
- Aksjeselskapet legger grunnlaget for et aktivt annenhåndsmarked for selskapets aksjer på en børs. I dette markedet vil det settes en pris på selskapets aksjer og aksjens risiko vil også avdekkes.
- Aksjeselskapet gir mulighet for investorene til å diversifisere og dermed begrense sin samlede risiko.
- Eierformen gjør det også mulig å ansette en profesjonell daglig leder. Dermed oppnår man spesialisering mellom diversifiserte investorer som skyter inn kapital og profesjonelle ledere som driver virksomheten til daglig.

2.2

Aksjeselskapets *ulemper* kommer først og fremst når selskapet blir stort og uoversiktlig. Eierne overlater driften til profesjonelle ledere. Dermed kan *agentproblemer* oppstå. Det kan bli en stor avstand mellom hva eierne ønsker for selskapet og hva ledelsen ønsker. Eierne og ledelsen har ikke sammenfallende interesser. To eksempler på avstand i interesser kan være:

- Ledelsen ønsker at selskapet skal være størst mulig, noe som gir ledelsen bedre lønn, større prestisje og ofte bedre karrieremuligheter, mens eierne ønsker høyest mulig lønnsomhet.
- Ledelsen foretrekker sikkerhet og trygghet, mens eierne ønsker at selskapet tar risiko i valg av prosjekter. Ledelsens menneskelige kapital er knyttet til selskapet og kan i liten grad diversifiseres, eierne kan diversifisere sine investeringer.

2.3

Jensen og Meckling (1979) så at de aller fleste foretak er organisert som aksjeselskap. De mente at aksjeselskapets fordeler oversteg dets ulemper.

2.4

Begrenset ansvar betyr jo at eierne bare er ansvarlig for den kapital som er skutt inn i selskapet. Anta at et selskap med store lån går konkurs, og at salg av dets eiendeler ikke er tilstrekkelig for å dekke gjelden. Da kan ikke långiverne kreve at utestående lånebeløp dekkes av eiernes private formue. Selskapet er en egen *juridisk person*, og ansvaret stopper der.

Eierne har dermed en en kjøpsopsjon med selskapets verdi som underliggende eiendel. Når selskapsverdien overstiger gjelden, er egenkapitalen positiv. Dekker selskapsverdien ikke gjelden, er egenkapitalen null.

3

Felles for begge selskapene er at eierne har begrenset ansvar. Eierskapet kan karakteriseres som spredt (mange eiere) i begge tilfeller Forskjellen mellom dem ligger i avstanden til driften av selskapet. Ansatte-eid eller fjernt eierskap.

1. Et ansatte-eid AS kan har fordeler og ulemper
   (a) Fordel 1: Høy motivasjon til å skape et godt driftsresultat.
   (b) Fordel 2: Stor evne til å gjennomføre god eierstyring, fordi man har innsikt i driftsbeslutningene i bedriften.
   (c) Ulempe 1: Ingen spredning av risiko. Jobbrisikoen, dvs. hvor trygg jobben er, og eierrisikoen er konsentrert i én og samme bedrift.

(d) Ulempe 2: Samarbeidsproblemer og konflikter kan føre til at man ikke får gjort nødvendige beslutninger i tide. Det viser seg at i bedrifter som har høy andel eierskap blant ansatte velger de ansatte utenforstående, uavhengige medlemmer til styret.

2. Fordeler og ulempler ved spredt eierskap:
   (a) Fordel 1: Spredning av risiko. Eierne kan spre sine investeringer på flere selskaper.
   (b) Fordel 2: Det er lett å trekke seg ut av bedriften hvis man ikke er fornøyd med ledelsens beslutninger.
   (c) Ulempe 1: Agentproblemer kan oppstå når eierne ikke kan forsikre seg om at ledelsen foretar beslutninger i eiernes interesse.

4

Dette dreier seg om selskapets målsetting. Her er meningene delte.

4.1

Å maksimere selskapets verdi er å skape verdier for eierne. Denne målsettingen er vanlig i finansiell økonomi. En fordel med målsettingen er at den samsvarer med nåverdiregelen. Dermed kan daglig leder gis en enkel beslutningsregel: Velg de prosjekter som har positiv netto nåverdi.

4.2

Samfunnsansvar holdes gjerne opp som en motsetning til det å maksimere selskapets verdi. Selskapet skal vise ansvar overfor ansatte, kunder, leverandører, lokalsamfunn, stat og kommune, miljøet og fremtidige generasjoner.

Men samfunnsansvar behøver ikke være en motsetning til maksimering av selskapets verdi. Et selskap kan vanskelig fortsette om det ikke oppfører seg ordentlig overfor ansatte, kunder og leverandører, hvis markedet er konkuransepreget. Det lønner seg for selskapet å holde seg til lover og regler. Og et selskap er avhengig av sitt omdømme. Det kan for eksempel vanskelig være en stor forurenser og samtidig tilgodese eiere med store utbytter. Av egeninteresse oppfyller dermed selskapet det samfunnsansvar det sies å ha.

Problemet med samfunnsansvar som rettesnor er at det kan være vanskelig å si hvilket mål som er det primære og viktigste. Har man oppfylt selskapets målsettinger om for eksempel driftsresultatet er svakt, mens kunder og leverandørerer er fornøyd?

4.3

Eierne har to hovedmekanismer. Det første er å forene DL's interesser med deres egne. DL kan få en lønn som avspeiler selskapets resultat, dvs. han eller hun får høy lønn når resultatet er godt og en lavere lønn når resultatet er svakt. En trussel om oppsigelse hvis resultatene ikke er gode, virker på samme måten. Den andre metoden er å forsøke å følge nøyere med på hva DL foretar seg. Det vanlige er å ha et kompetent styre som kan følge med på DL's handlinger.

5 Selskapets målsetting

5.1

Målsettingen er tydeligvis å maksimere selskapets verdi for det aksjonærer.

Andre mål kan være å maksimere en form for samfunnsansvar. Noen selskaper satser på å maksimere sin størrelse, andre sin markedsandel.

5.2

I denne boken vil vi si at maksimering av selskapets verdi er den beste målsettingen for selskapet. I Equinors tilfelle er det norske folk den største eier. Eierne vil ønske at selskapet ikke sløser med ressursene eller foretar seg noe ulovlig.

Kap. 1: Oppgaver

1

Hva er de viktigste organisasjonsformene for privat næringsvirksomhet?

2

1. Hvilke fordeler har aksjeselskapet over andre organisasjonsformer?
2. Hva er de viktigste ulempene som aksjeselskapet har?
3. Jensen and Meckling (1979) hevdet at bedrifter over tid vil velge aksjeselskapet som eierform. Hvorfor vil de det?
4. Hva betyr frasen *begrenset ansvar* i en forretningssammenheng?

3

Det er hevdet at bedrifter som eies av de ansatte, for eksempel som et AS, er bedre enn la oss si et aksjeselskap med mange eiere uten annen tilknytning til bedriften enn eierskapet til aksjene.

1. Hva er fordeler og ulemper med de to formene for eierskap? Anta at begge bedrifter er AS'er.

4

1. Hva betyr det å maksimere selskapets verdi?
2. Kan et selskap kombinere maksimering av selskapets verdi og "samfunnsansvar"?

3. En daglig leder skal arbeide for å maksimere eiernes mål for virksomheten. Hva kan eierne gjøre for å forsikre seg om at daglig leder virkelig oppfyller dette målet?

5 Selskapets målsetting

I slutten av april 2016 meldte Equinor (på den tiden Statoil) at de skulle investere ca. 11 milliarder kroner i et tysk vindkraftprosjekt. Mesteparten av oppdragene til utbyggingen ventes å gå til tyske produsenter. I den forbindelse uttalte Irene Rummelhoff, konserdirektør for Nye energiløsninger i Statoil ifølge E24, at:

> – Statoils jobb er jo ikke først og fremst å skaffe arbeidsplasser, det er å skape verdier for våre aksjonærer. Når det er sagt så ser vi for eksempel at Hywind Skottland skaper reelle verdier for norske leverandører.

1. Hvilket mål mener Rummelhoff at Equinor skal maksimere? Finnes det andre mål for virksomheten?
2. Mener du Equinor prioriterte riktig i dette tilfelle?

Referanser

Jensen, M. C. and W. Meckling (1979). Rights and production functions: An application to labor-managed firms and codetermination. *Journal of Business 52*(4), 469–506.

Kap. 2: Oppgaver – Løsningsforslag

1

1.1

En årsak er at eiere og ledelse ikke nødvendigvis har de samme interesser. Daglig leder tenker først og fremst på sine egne interesser når prosjekter skal gjennomføres. Dette er *prinsipal-agent-problemet* (PA-problemet) som ble beskrevet i Jensen and Meckling (1976). I foretaksfinans tenker vi ofte på prinsipalen som eieren og agenten som styret og daglig leder. For at PA-problemet skal oppstå, må følgende elementer være på plass:

- Prinsipalen gir agenten fullmakt til å gjøre valg på sine vegne.
- Prinsipal og agent søker å maksimere sin individuelle nytte.
- Interessene til prinsipal og agent er ikke nødvendigvis sammenfallende.
- Agenten har informasjon som prinsipalen ikke kjenner til. Det er *asymmetrisk informasjon* i forholdet mellom prinsipal og agent.

Agentproblemer oppstår når eiere ikke lenger driver selskapet aktivt selv, men delegerer beslutninger til styret og daglig leder. Dette gjelder spesielt i selskaper hvor eierskapet er fordelt på mange eiere.

1.2

Tirole (2001) går gjennom de vanligste formene for agentproblemer mellom eiere og ledelse, som kort oppsummert er som følger.

Utilstrekkelig innsats For eksempel kan daglig leder legge veldig mye innsats i favorittengasjementer som det å følge opp veldedige formål eller sponsoraktiviteter. Ledelsen kan også unngå konflikter og heller satse

på "det gode liv" (Bertrand and Mullainathan, 2003) uten slitsomme forhandlinger med fagforeninger eller leverandører.

Ekstravagante investeringer og feilinvesteringer. I selskaper hvor eierstrukturen er spredt kan slike investeringer forekomme. Eksempler kan være unødvendig flotte bygg slik som "bankpalasser", eller eget fly. Et annet eksempel er at man bare investerer i ting man kjenner fra før og ikke er oppmerksom eller villig til å satse på nye ting. Et kjent bedriftseksempel er Kodak, som dominerte markedet for fotofilm før den digitale revolusjon. Selskapet søkte om konkursbeskyttelse i 2012.

Forskansningsstrategier. Med dette mener Tirole strategier den daglige lederen bygger rundt seg selv for å beskytte sin egen posisjon. Et eksempel kan være å sørge for at styret besettes av folk som er vennligsinnede eller avhengige av daglig leder. Allerede Berle og Means (1932) var opptatt av dette. Et annet eksempel er å gi daglig leder en beskyttelse mot et fiendtlig oppkjøp gjennom endring i selskapets statutter. Falaye (2007) viser at selskaper med forskansningsstrategier for toppledelsen har lavere børsverdi enn tilsvarende selskaper uten slik beskyttelse.

Tyveri Til slutt nevner Tirole "self-dealing", som rett og slett er tyveri fra aksjonærene. Et salg av eiendeler fra foretaket til en pris lavere enn markedspris til et annet selskap som ledelsen kontrollerer ("tunneldrift") er et eksempel på et slikt tyveri. Et annet eksempel er at man tilgodeser venner og familie med godt betalte jobber for foretaket – såkalt "nepotisme".

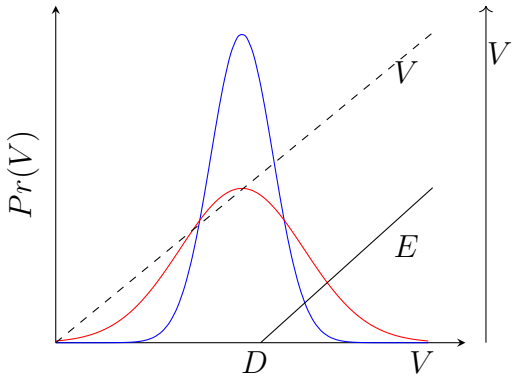
Disse problemene gjelder selvsagt ikke i alle selskaper og et agentproblem i et selskap er ikke nødvendigvis et problem i et annet. Men slike problemer ligger som en mulighet i alle selskaper som ikke har en eneeier.

1.3

Horisontale agentproblemer er problemer mellom eiere, nærmere bestemt mellom eiere av majoritetsposter mot eiere med minoritetsposter. En majoritetseier kan favorisere egne interesser på bekostning av småaksjonærer. Et eksempel er å betale et høyt utbytte til seg selv. Et annet er at man selger hele eller deler av selskapet til andre til en pris under markedspris, dvs. tunneldrift.

2

Vi kan vise at egenkapitalen er mer verdt jo større verdiutslag, eller *volatilitet* selskapsverdien har. Dette vises i figur 1. Til venstre for D er jo $E = 0$, uansett hvor stor forskjellen $V - D$ er. Vi kan vise betydningen av volatilitet ved å tenke oss at vi kan velge mellom to prosjekter. Selskapet kan bare velge det ene, og det har ikke flere prosjekter. Begge prosjektene har den samme positive forventede verdi $E(V_A) = E(V_B)$, men det ene prosjektet har langt større volatilitet enn det andre. Det sikre prosjektet kalles V_A, det usikre V_B. Vi antar at selskapsverdien er normalfordelt for begge prosjektene. Volatiliteten kan måles med standardavviket til prosjektene, dvs σ_A for prosjekt A. For prosjekt A er $\sigma_A = 0.5$, og for prosjekt B er $\sigma_A = 1.0$. Videre antar vi at gjelden er et tall større enn null: $D > 0$. Vi kan nå studere de to prosjektene i figur 1.



Figur 1: Egenkapitalen E er en kjøpsopsjon og er mer verdt når selskapet velger det riskable prosjektet V_B fremfor det sikre V_A

Prosjekt B har en sannsynlighetsfordeling som er mer utstrakt enn prosjekt A. En investor er interessert i hvilken verdi selskapet kan ha når $E > 0$, dvs. på den stigende delen av E-kurven. Prosjekt B gir mulighet for høyere verdier av egenkapitalen enn prosjekt A jo lenger ut i den høyre halen på sannsynlighetsfordelingen man kommer. Prosjekt B er derfor mer verdt for eierne enn A, selv om den forventede selskapsverdien $E(V)$ er den samme. Eierne vil altså foretrekke at det risikable prosjektet B fremfor det sikre A.

3

Eiermodellen innebærer at selskapet maksimerer eiernes formue. *Interessentmodellen* betyr at selskapet maksimerer verdi for alle *interessenter* til selskapet, slik som ansatte, leverandører og kunder.

4

4.1

Eierne har i prinsippet tre valg (Hirschman, 1970):

Protest De kan innkalle til ny generalforsamling og velge et nytt styre. De kan også reise kritikk på den årlige generalforsamlingen.

Utgang De kan forlate selskapet ved at de selger sine aksjer. I et børsnotert selskap er dette enkelt. Da kan man velge "børsvandringen". En slik børsvandring er et sterkt signal til ledelsen om å opprettholde anstrengelsene for å skape verdier for eierne, fordi kursen på selskapets aksje vil falle når flere er interessert i å selge enn det er som vil kjøpe.

Lojalitet Velger man ikke å protestere eller å forlate selskapet, sitter man altså stille og lojalt finner seg i hva ledelsen foretar seg med selskapet.

4.2

Deler av lønnen knyttes til aksjekursen. Lønnen består da av en fast del og en del som varierer med aksjekursen, dvs.

$$\text{Daglig leders lønn} = \text{Fast lønn} + B \cdot (\text{Selskapets aksjekurs}) \qquad B > 0 \quad (1)$$

Jo høyere aksjekursen for selskapet er, jo mer vil daglig leder tjene. Også eierne er selvsagt interesserte i at aksjekursen er høyere. Tanken bak en slik resultatbasert lønn er derfor at daglig leders lønn binder sammen interessene til eiere og daglig leder. Et slikt interessefellesskap fjerner agentproblemene mellom eiere og daglig ledelse.

4.3

Styrets funksjoner består i å følge opp daglig leder og påse at han eller hun ikke foretar seg handlinger som strider med eiernes interesser. En annen funksjon er å fungere som rådgiver for daglig leder. Et styre bør derfor balansere hensynet til *uavhengighet* i forhold til daglig leder mot hensynet til *rådgivningskompetanse*. Jo mer man legger vekt på kontroll, jo mer uavhengig bør styret være. Jo mer man legger vekt på rådgivning, jo mer kompetanse bør styret ha.

Referanser

Bertrand, M. and S. Mullainathan (2003, Oct). Enjoying the quiet life? Corporate governance and managerial preferences. *Journal of Political Economy 111*(5), 1043–1076.

Falaye, O. (2007). Classified boards, firm value, and managerial entrenchment. *Journal of Financial Economics 83*, 501–529.

Hirschman, A. O. (1970). *Exit, Voice and Loyalty. Responses to Decline in Firms, Organizations, and States*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Jensen, M. C. and W. Meckling (1976). Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs, and ownership structure. *Journal of Financial Economics 3*, 305–360.

Tirole, J. (2001, Jan). Corporate governance. *Econometrica 69*(1), 1–36.

Kap. 2: Oppgaver

1

1. Hvordan kan et *agentproblem* mellom eiere og daglig ledelse oppstå?
2. Beskriv noen viktige agentkostnader.
3. Hva menes med "horisontale agentproblemer"? Gi eksempler.

2

Kan selskapets verdi øke når usikkerheten i dets kontantstrømmer øker?

3

Hva menes med "eiermodellen" og "interessentmodellen"?

4

1. Anta at eierne ikke er fornøyd med måten selskapet drives på. Hva kan den enkelte eier gjøre?
2. Et aksjeselskap er børsnotert. Styret vurderer å knytte deler av daglig leders lønn til aksjekursen. Hvorfor kan det være en god ordning?
3. Et aksjeselskap med spredt eierskap skal sette sammen et styre. Hva bør Generalforsamlingen legge vekt på i valg av styre?

Kap. 3: Løsninger på Oppgaver

R. Øystein Strøm

1

Bilselskapet vil altså øke salget med 15,000 enheter om prisen settes ned. Det vil ha følgende fordel av å sette ned prisen:

$$\text{Fordel} = \text{Margin pr. bil } 50,000 \times 15,000 \text{ nye biler solgt} = 750m$$

Kostnaden med å gjennomføre tiltaket er den reduserte marginen pr. bil den ellers ville ha solgt:

$$\text{Kostnad} = \text{Redusert margin pr. bil } 20,000 \times 40,000 \text{ biler ellers solgt} = 800m$$

Fordelen minus kostnaden er $750m - 800m = -50$, så rabatten vil ikke øke fortjenesten til bilselskapet.

2

I første spørsmål finner vi at aksjebonusen er $63 \times 100 = 6,300$. Kontantbonusen er 5,000. Du kan "snu deg rundt" og selge aksjene i dag. Aksjebonusen er altså mest gunstig.

I dag er altså aksjebonusen verdt 6,300, men ikke mer heller. Hva om du må holde aksjen i ett år før du kan selge? Om ett år vet du ikke hva aksjen er verdt. Den kan være høyere, men den kan også være lavere. Valget ditt avhenger av hvilken avkastning du venter på aksjen og på aksjens risiko. Det kan hende du vurderer det mest gunstig å velge kontantbonusen på 5,000 i dag.

3

3.1

Kostnaden for de 5,000 ekstra milene er $0.03 \times 5,000 = 150$. Du ville altså kjøpe de ekstra milene fra flyselskapet.

3.2

Du kan ikke selge de milene du har opparbeidet. Kostnaden for å bruke bonusen på billett i dag, er at du ikke kan bruke dem på en annen tur. Men går bonusmilene snart ut, må du tenke på sannsynligheten for at du skal reise før utløp.

4

4.1

Ta opp et lån fra BankEn til 5.5% og plasser pengene i BankTo til 6% innskuddsrente. Arbitrasjegevinsten din er $0.005 \times 100,000 = 500$ pr. år hvis lånet er på 100,000.

4.2

BankEn vil oppleve en økt etterspørsel etter lån. I BankTo vil kunder ønske å øke innskuddene.

4.3

BankEn vil øke utlånsrenten og/eller BankTo vil senke innskuddsrenten.

5

5.1

Vi kan finne prisen pr. aksje ved å summere verdiene i aksjen:

$$S_{BNA} = 2 \times 28 + 1 \times 40 + 3 \times 14 = 138$$

Dette illustrerer prinsippet om *verdiadditivitet*.

5.2

Børskursen er for tiden 120. Her åpner det seg en arbitrasjemulighet. Du ville kjøpe BNA-aksjen for 120, siden aksjen er billig. Samtidig vil du selge to aksjer av IT-Nova, en aksje av Manuffog tre aksjer av Standard. Gevinsten fra samtidige kjøp og salg er 18.

5.3

Børskursen er i stedet 150. Her åpner det seg igjen en arbitrasjemulighet. Denne gangen ville man selge en aksje i BNA, siden aksjen er dyr. Så ville man kjøpe to aksjer i IT-Nova, en aksje i Manuff og tre aksjer i Standard. Gevinsten fra samtidige kjøp og salg er 12.

6

6.1

Vi finner verdien av hvert prosjekt ved å bestemme deres netto nåverdi:

$$NNV_A = -20000 + \frac{30000}{1.1} = 7,272.73$$
$$NNV_B = -10000 + \frac{25000}{1.1} = 12,727.27$$
$$NNV_C = -60000 + \frac{80000}{1.1} = 12,727.27$$

Alle prosjektene har positiv netto nåverdi. Zumzums investeringsbudsjett rekker til alle prosjektene, og Zumzum bør derfor investere i alle.

6.2

Samlet verdi i dag er kontanter og verdien av prosjektene. Verdien av prosjektene er 32,727.27. Kontantbeholdningen er 100,000. Samlet verdi av selskapet er dermed 132,727.27.

6.3

Etter investeringene sitter Zumzum igjen med 10,000 i kontanter. Disse investeres til 10%. Aksjonærene i Zumzum vil derfor motta kontantstrømmen $30000 + 25000 + 80000 + 10,000 \times 1.1 = 146,000$ om ett år. Nåverdien av dette er $146,000/1,1 = 132,727.27$, det samme som før.

6.4

Ubrukte kontanter er altså 10,000. Kontantstrømmen om ett år er $30000 + 25000 + 80000 = 135,000$ med en nåverdi på $135,000/1,1 = 122,727.27$. Verdien av BNA i dag er derfor $10,000 + 122,727.27 = 132,727.27$. Igjen får vi det samme svaret.

6.5

Verdien av selskapet er det samme i alle tre alternativene fordi alle metodene vurderer Zumzums verdi i nåverdier. For investorene er det likegyldig om de får utbetalt 10,000 i dag eller om selskapet investerer midlene for dem. Selskapet kan altså ikke øke sin verdi ved å gjøre ting som investorene kan gjøre på egen hånd. Dette er essensen i *separasjonsprinsippet*.

7 Former for markedseffisiens

I et effisient marked reflekterer markedsprisene all tilgjengelig informasjon spesifisert ved:

Svak form All tidligere informasjon om priser er allerede innbakt i dagens priser.

Mellomsterk form All offentlig tilgjengelig informasjon (årsrapporter etc.) er allerede innbakt i dagens priser.

Sterk form All informasjon, også den private, er innbakt i dagens priser.

8 Effisient marked?

Vi finner først de månedlige avkastningene, se tabell 1.

Tabell 1 Beregning av avkastninger

Mnd	Kurs	Avkastning	Avk(-1)
Des	662.79		
Jan	691.51	4.33	
Feb	701.78	1.49	4.33
Mar	696.84	-0.70	1.49
Apr	692.01	-0.69	-0.70
Mai	704.89	1.86	-0.69
Jun	713.19	1.18	1.86
Jul	705.06	-1.14	1.18
Aug	737.36	4.58	-1.14
Sep	747.27	1.34	4.58
Okt	784.71	5.01	1.34
Nov	815.41	3.91	5.01
Des	798.41	-2.08	3.91
Jan	815.22	2.11	-2.08
Feb	818.15	0.36	2.11

Vi får huller i dataserien fordi vi beregner avkastninger med to perioder og så tidsforskyver denne kolonnen med avkastninger med en måned for å skape den nye, tidsforskjøvne variablen. Vi kan nå beregne varians og standardavvik, se tabell 2.

Deretter beregnes kovariansen, se tabell 3.

8.1 Beregning av seriekorrelasjonen

Vi kan nå finne seriekorrelasjonen ved

$$\rho\left(r_t, r_{t-1}\right) = \frac{Kov\left(r_t, r_{t-1}\right)}{\sqrt{Var\left(r_t\right)}\sqrt{Var\left(r_{t-1}\right)}} = \frac{-0.59}{2.21 \cdot 2.34} = \underline{-0.12}$$

Vi ønsker altså en korrelasjonskoeffisient mest mulig nær 0.0. Her har vi fått en verdi godt under dette nivået. Dette tyder på at kursendringene ikke er uavhengige, men at det er en viss sammenheng mellom endringen i en periode og perioden deretter. Er endringen positiv en måned, vil man altså vente at den er negativ måneden etter. Følger man analysen slavisk, skal man selge når kursen går opp en måned og kjøpe

Tabell 2 Beregning av gjennomsnitt og varians

	Opprinnelig				Tidsforskjøvet		
Mnd	Avk	Avvik	Avvik2	Mnd	Avk	Avvik	Avvik2
Feb	1.49	0.16	0.03	Feb	4.33	2.70	7.31
Mar	-0.70	-2.03	4.11	Mar	1.49	-0.14	0.02
Apr	-0.69	-2.02	4.07	Apr	-0.70	-2.33	5.45
Mai	1.86	0.54	0.29	Mai	-0.69	-2.32	5.40
Jun	1.18	-0.15	0.02	Jun	1.86	0.23	0.05
Jul	-1.14	-2.46	6.07	Jul	1.18	-0.45	0.20
Aug	4.58	3.26	10.61	Aug	-1.14	-2.77	7.67
Sep	1.34	0.02	0.00	Sep	4.58	2.95	8.71
Okt	5.01	3.69	13.59	Okt	1.34	-0.29	0.08
Nov	3.91	2.59	6.70	Nov	5.01	3.38	11.43
Des	-2.08	-3.41	11.62	Des	3.91	2.28	5.21
Jan	2.11	0.78	0.61	Jan	-2.08	-3.71	13.80
Feb	0.36	-0.96	0.93	Feb	2.11	0.48	0.23
Gjsn	1.32			Gjsn	1.63		
Var			4.89	Var			5.46
Stavvik			2.21	Stavvik			2.34

når den går ned. Likevel er tallverdien til korrelasjonskoeffisienten lav, slik at det i praksis er vanskelig å utnytte dette for å tjene en arbitrasjegevinst.

8.2 Hvorfor?

Den viktigste årsaken til at vi har fått en såpass høy korrelasjonskoeffisient, er antakelig at vi har en veldig kort periode med observasjoner.

9 Seriekorrelasjon

Seriekorrelasjon betyr at det er en statistisk sammenheng mellom avkastningen i en periode og perioder forut.

Tabell 3 Beregning av kovariansen

Mnd	(1) Avvik	(2) Avvik(-1)	(3) (1)×(2)
Feb	0.16	2.70	0.44
Mar	-2.03	-0.14	0.29
Apr	-2.02	-2.33	4.71
Mai	0.54	-2.32	-1.25
Jun	-0.15	0.23	-0.03
Jul	-2.46	-0.45	1.11
Aug	3.26	-2.77	-9.02
Sep	0.02	2.95	0.06
Okt	3.69	-0.29	-1.05
Nov	2.59	3.38	8.75
Des	-3.41	2.28	-7.78
Jan	0.78	-3.71	-2.90
Feb	-0.96	0.48	-0.46
Kovar			-0.59

9.1

Vi skal altså finne seriekorrelasjonen for ett lag definert ved

$$\rho\left(r_t, r_{t-1}\right) = \frac{Kov\left(r_t, r_{t-1}\right)}{\sqrt{Var\left(r_t\right)}\sqrt{Var\left(r_{t-1}\right)}} \tag{1}$$

Dataene til oppgaven er nå ordnet slik at vi får frem en *tidsforskjøvet* (lagget) avkastning i tillegg til den opprinnelige avkastningen. Dette er vist i tabell 4.

Legg merke til at vi mister en observasjon når vi lagger en periode. En korrelasjonsanalyse i et statistikkprogram viser nå resultatene

$$1986 : \rho\left(r_t, r_{t-1}\right) = 0.257; \qquad 2008 : \rho\left(r_t, r_{t-1}\right) = 0.114.$$

Begge estimatene ligger godt over 0.0. Det kan se ut som om det er noe informasjon i tidligere avkastning, slik at vi kan bruke denne informasjonen til å anslå hva avkastningen er i inneværende periode. Vi kan altså ikke hevde at markedet er effisient for disse to periodene for denne aksjen. En årsak kan være at vi har brukt en kort periode i begge tilfeller slik at vi har få observasjoner i utvalget, og at vi har brukt en aksje. Slike avvik fra et effisient marked kan oppstå i kortere perioder.

Tabell 4 Avkastningene i 1986 og i 2008 og deres lag

Dag	$r_{86,t}$	$r_{86,t-1}$	$r_{08,t}$	$r_{08,t-1}$
1	4.41		-3.64	
2	5.07	4.41	-2.12	-3.64
3	1.88	5.07	0.00	-2.12
4	-0.66	1.88	0.00	0.00
5	-2.65	-0.66	0.48	0.00
6	1.36	-2.65	-1.92	0.48
7	-0.67	1.36	1.47	-1.92
8	-0.54	-0.67	-3.13	1.47
9	1.90	-0.54	3.73	-3.13
10	-1.33	1.90	3.12	3.73
11	-2.70	-1.33	0.00	3.12
12	0.00	-2.70	2.79	0.00
13	-0.56	0.00	0.00	2.79
14	1.96	-0.56	1.81	0.00
15	1.37	1.96	-1.78	1.81
16	0.00	1.37	0.23	-1.78
17	0.81	0.00	0.00	0.23
18	0.80	0.81	3.39	0.00
19	0.00	0.80	2.62	3.39
20	-2.66	0.00	6.38	2.62
21	3.01	-2.66	0.50	6.38

9.2

Korrelasjonskoeffisienten er lavere i 2008 enn i 1986. Isolert sett tyder dette på at effisiensen har økt i tiden mellom disse to målingene. Men ut fra tanken om markedseffisiens skal det være en seriekorrelasjon lik null mellom avkastningene.

9.3

Effisiensbegrepet er i dette tilfellet *svak form effisiens* idet det er bare informasjonen fra prishistorien vi studerer.

10 Hendelse: Oppkjøp

Beregningene av normalavkastning er tydeligvis gjort med *markedsmodellen*:

$$r_{lb,t} = \alpha + \beta_{lb} r_{ob,t} + u_t \tag{2}$$

Vi kjenner igjen avkastningene. I regresjonen er α skjæringspunktet med y-aksen. Ut fra kapitalverdimodellen ønsker vi den så nær null som mulig. β_{lb} er vårt estimat på beta til lb-aksjen. Til slutt er u_t et mål på den feilen vi begår, eller et mål på den usystematiske risikoen for aksjen. Regresjonen fastlegger α og β_{lb}, slik at vi kan skrive (2)

$$r_{lb,t} = -0.049 + 0.959 r_{ob,t}. \tag{3}$$

10.1

Vi skal kort kommentere regresjonsresultatene. Vi ser at $\alpha = -0.049$, en verdi temmelig nær null, som vi ønsket. Det innebærer at det ikke er noen annen faktor som systematisk varierer med avkastningen til lb. Resultatet er ikke signifikant. t-verdien er -0.392, langt fra den verdien vi gjerne ønsker ved 5% signifikansnivå, nemlig tallverdien til $t = 1.96$ eller over. Beta-verdien er mye bedre estimert. Den har en koeffisientverdi nær 1.0, altså nær gjennomsnittet i markedet og $t-$verdien er svært høy. Vi vil stole på at betaverdien er $b_{lb} = 0.959$ med høy sannsynlighet.

10.2

Med utgangspunkt i regresjonsresultatene i (3) har vi først funnet de normale avkastningene i hendelsesvinduet og deretter de unormale, se tabell 5. I tabelloverskriften er $\hat{r}_{ob}$ den beregnede normalavkastningen ut fra (3).

For eksempel er den normale avkastningen på dag -19

$$\hat{r}_{lb,-19} = -0.049 + 0.959 \cdot 0.15 = 0.09.$$

Vi finner normalavkastningen for de andre dagene på lignende måte. Den unormale avkastningen for en gitt dag er bestemt av

$$AR_t = r_{i,t} - \hat{r}_{i,t} \tag{4}$$

for en gitt aksje i. Den unormale avkastningen i dag -19 AR_{-19} er nå forskjellen mellom avkastningen den dagen (0.44) og den beregnede normalavkastningen:

$$AR_{-19} = 0.44 - 0.09 = 0.35.$$

Slik fortsetter vi for hver dag. Vi kan nå kumulere de unormale avkastningene for dag for dag. For eksempel får vi for dag -18 at den kumulerte unormale avkastningen (CAR) er

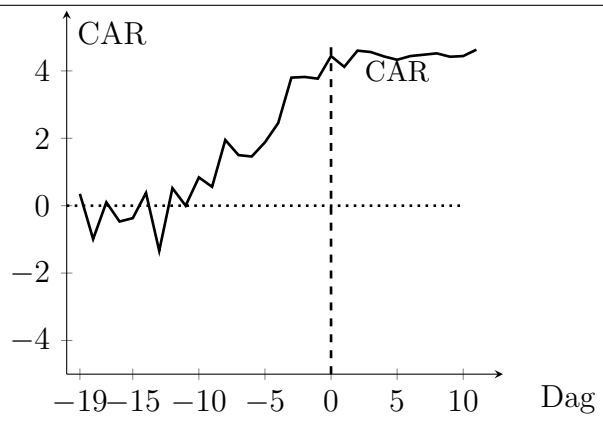
$$CAR_{-18} = 0.35 + (-1.33) = -0.99.$$

Vi fortsetter kumuleringen frem til dag 11.

10.3

Resultatet av kumuleringen av CAR gir en figur over CAR i hendelsesvinduet som i figur 1.

Figur 1 Kumulerte avkastninger (CAR) i hendelsesvinduet



Vi ser tydelig at CAR ikke beveger seg tilfeldig rundt 0.0 i tiden forut for oppkjøpsbudet på dag 0. Fra dag 10 spesielt er det en stigende tendens i CAR. Etter at oppkjøpsbudet er gitt, flater CAR ut. Dette tyder på at det har foregått en *informasjonslekkasje* om oppkjøpsbudet forut for kunngjøringen. For Børsen er det dermed viktig å avsløre om denne lekkasjen skyldes informasjon som selskapets innsidepersoner eller personer tilknyttet disse har benyttet kunnskapen om oppkjøpet til å kjøpe billig før andre investorer blir klar over nyheten. Bruk av slik innsideinformasjon er ulovlig og kan straffes med fengsel.

10.4

Effisiensbegrepet handler om den informasjon som markedsaktører allerede har tatt hensyn til, og som derfor er innebakt i markedsprisene. Det vi har sett på, er *halvsterk form for effisiens*. I dette ligger det at all opffentlig tilgjengelig informasjon

er reflektert i markedsprisene. Informasjonen inkluderer dermed tidligere børskurser, regnskapsinformasjon, informasjon om avgang og ansettelse av ledende ansatte osv. I denne oppgaven er det nyheten om et oppkjøp som er den konkrete informasjon.

Tabell 5 Beregning av normal avkastning og unormal avkastning

Dag	r_{ob}	r_{lb}	$\hat{r}_{ob}$	AR	CAR
-19	0.15	0.44	0.09	0.35	0.35
-18	2.94	1.44	2.77	-1.33	-0.99
-17	-0.29	0.76	-0.33	1.09	0.10
-16	-0.86	-1.45	-0.87	-0.58	-0.47
-15	-0.53	-0.45	-0.56	0.11	-0.37
-14	-0.63	0.09	-0.65	0.74	0.38
-13	1.37	-0.45	1.26	-1.71	-1.34
-12	-0.79	1.05	-0.81	1.86	0.52
-11	0.59	0.00	0.52	-0.52	0.00
-10	-2.21	-1.33	-2.17	0.84	0.84
-9	0.37	0.03	0.31	-0.28	0.56
-8	-0.31	1.04	-0.35	1.39	1.95
-7	1.42	0.86	1.31	-0.45	1.50
-6	-0.24	-0.32	-0.28	-0.04	1.46
-5	-0.39	0.00	-0.42	0.42	1.88
-4	-0.54	0.00	-0.57	0.57	2.45
-3	1.54	2.78	1.43	1.35	3.80
-2	-0.91	-0.90	-0.92	0.02	3.82
-1	0.10	0.00	0.05	-0.05	3.77
0	-0.59	0.05	-0.61	0.66	4.44
1	0.58	0.19	0.51	-0.32	4.12
2	-0.45	0.00	-0.48	0.48	4.60
3	0.04	-0.05	-0.01	-0.04	4.56
4	0.91	0.69	0.82	-0.13	4.43
5	-0.11	-0.25	-0.15	-0.10	4.33
6	-0.23	-0.16	-0.27	0.11	4.44
7	-0.50	-0.49	-0.53	0.04	4.48
8	-0.46	-0.45	-0.49	0.04	4.52
9	-2.70	-2.74	-2.64	-0.10	4.42
10	1.37	1.29	1.26	0.03	4.44
11	1.06	1.15	0.97	0.18	4.63

Oppgaver i arbitrasje

R. Øystein Strøm

1

Et bilselskap vurderer å tilby en rabatt på 20,000 på sin minivan, noe som senker utsalgsprisen fra 300,000 til 280,000. Markedsføringsavdelingen regner med at dette vil øke salget av modellen fra 40,000 til 55,000 biler. Anta at Hondas fortjenestemargin med rabatten er 50,000 pr. minivan. Er nedsettelsen av prisen en god idé hvis salgsendringen er det eneste som skjer?

2

Anta arbeidsgiveren din tilbyr deg et valg mellom en kontantbonus på 5,000 eller 100 aksjer i selskapet. Begge valgene innebærer at du belønnes i dag. Aksjen handles i dag for 63 pr. aksje.

1. Anta at du kan handle aksjene fritt. Hvilket bonusalternativ ville du velge? Hva er alternativets verdi?
2. Anta at du må holde aksjene i ett år før du kan omsette dem fritt. Hva kan du si om verdien av aksjebonusen nå? Hva bygger du valget av bonus på?

3

Du og en venn har bestemt dere for en skihelg i St. Moritz. Den beste tur-retur-billetten du kan finne koster 359. Du har 20,000 mil i flybonus, men mangler 5,000 mil for å få en gratisbillett. Flybonusen du allerede har opparbeidet, er i ferd med å gå ut. Flyselskapet tilbyr å selge deg 5,000 ekstra mil for 0.03 pr. mil.

1. Anta at bonusmilene blir verdiløse om du ikke bruker dem på denne turen. Hva bør du gjøre?

2. Anta i stedet at bonusmilene beholder sin verdi. Hvilken informasjon i tillegg vil nå beslutningen din avhenge av? Hvorfor?

4

Anta at BankEn tilbyr en risikofri rente på 5.5% på både innskudd og lån, mens BankTo tilbyr tilsvarende rente til 6%.

1. Hvilken arbitrasjemulighet er tilgjengelig?
2. Hvilken bank vil oppleve en økt etterspørsel etter lån? Hvilken bank vil finne at innskuddene øker?
3. Hva venter du skjer med rentene i de to bankene?

5

Et børsnotert aksjefond (BNA) utsteder et verdipapir som representerer en portefølje av individuelle aksjer. Vurdér en BNA der hver aksje representerer to aksjer i IT-Nova, en i Manuff, og tre aksjer i Standard. Anta at dagens aksjekurser er som følger:

Aksje	Dagens aksjekurs
IT-Nova	28
Manuff	40
Standard	14

1. Hva er prisen pr. aksje på BNA'en i et normalt marked?
2. Anta at BNA-kursen for tiden er 120. Hvilke arbitrasjemuligheter åpner seg? Hvilke handler ville du gjøre?
3. Anta at BNA-kursen for tiden er 150. Hvilke arbitrasjemuligheter åpner seg? Hvilke handler ville du gjøre?

6

Selskapet Zumzum har eiendeler bestående av 100,000 i kontanter og tre prosjekter som det har planer om å gjennomføre. Prosjektene er risikofrie og har følgende kontantstrømmer:

Prosjekt	Dagens kontantstrøm	Kontantstrøm om ett år
A	-20,000	30,000
B	-10,000	25,000
C	-60,000	80,000

Zumzum vil investere alle ubrukte kontanter til en risikofri rente på 10%. Om ett år vil alle kontanter bli betalt til investorer og selskapet stenges.

1. Hva er hvert prosjekts NNV? Hvilke prosjekter vil Zumzum akseptere og hvor store er ubrukte kontanter?
2. Hva er samlet verdi på Zumzums eiendeler (prosjekter og kontanter) i dag?
3. Hvilke kontantstrømmer vil investorene i Zumzum motta? Regn ut hva verdien av Zumzum er i dag.
4. Anta at Zumzum utbetaler alle ubrukte kontanter til investorene i dag heller enn å investere dem. Hva er kontantstrømmene for investorene i dette tilfellet? Hva er verdien av Zumzum nå?
5. Forklar sammenhengen i svarene dine på delspørsmål 2, 3 og 4.

7 Markedseffisiens

1. Hva er de tre formene for markedseffisiens?
2. Hvilken faktor er det som skiller den ene formen for markedseffisiens fra en annen?

8

I tabell 1 finner du nivået på Hovedindeksen på Oslo Børs for noen utvalgte måneder. Vi ønsker å finne ut om det er noen seriekorrelasjon i aksjekursene. Vi vil undersøke om det er noen sammenheng mellom endringen i avkastning en måned og måneden før. Seriekorrelasjonen er definert som

$$\rho\left(r_t, r_{t-1}\right) = \frac{Kov\left(r_t, r_{t-1}\right)}{\sqrt{Var\left(r_t\right)}\sqrt{Var\left(r_{t-1}\right)}} \tag{1}$$

Her står r_t for avkastningen i periode t. Avkastningen beregnes som prosentvis, aritmetisk endring:

$$Avkastning_t = r_t = \left(\frac{Kurs_t}{Kurs_{t-1}} - 1\right) \times 100 \tag{2}$$

Start med å fylle ut tabell 1 hvor vi har lastet ned månedlige data fra Oslo Børs. I tabellen står "Avk(-1)" for avkastning i måneden forut.

Tabell 1 Hovedindeksen på Oslo Børs (OSEBX) fra desember 2016 til februar 2018. Siste notering på første dag i hver måned er brukt.

Mnd	Kurs	Avkastning	Avk(-1)
Des	662.79		
Jan	691.51		
Feb	701.78		
Mar	696.84		
Apr	692.01		
Mai	704.89		
Jun	713.19		
Jul	705.06		
Aug	737.36		
Sep	747.27		
Okt	784.71		
Nov	815.41		
Des	798.41		
Jan	815.22		
Feb	818.15		

Når tabell 1 er fylt ut, skal du fylle ut tabell 2. Legg merke til at i forhold til tabell 1 mister man de to første månedene. I tabell 2 er "Gjsn" gjennomsnittet, "Var" er variansen i observasjonene og "Stavvik" er standardavviket. "Avvik" er definert som

$$Avvik = (\text{Avkastning i måned } t) - \text{Gjennomsnitt}$$

for begge avkastningskolonnene i tabell 1. Avviket er med andre ord avstanden fra observasjonen i måneden til gjennomsnittet for alle månedene. "Avvik2" har definisjonen $Avvik^2$. Varians og standardavvik er definert som

$$Var = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} Avvik2_t \qquad Stavvik = \sqrt{Var} \tag{3}$$

T er den siste observasjonen i datasettet, eller dataperiodens horisont.

Når varianser og standardavvik er beregnet, skal vi finne kovariansen. Kovariansen er definert ved

$$Kov = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} Avvik_t \times Avvik(-1)_t \tag{4}$$

Tabell 2 Beregning av gjennomsnitt og varians

	Opprinnelig				Tidsforskjøvet		
Mnd	Avk	Avvik	Avvik2	Mnd	Avk(-1)	Avvik(-1)	Avvik2(-1)
Feb				Feb			
Mar				Mar			
Apr				Apr			
Mai				Mai			
Jun				Jun			
Jul				Jul			
Aug				Aug			
Sep				Sep			
Okt				Okt			
Nov				Nov			
Des				Des			
Jan				Jan			
Feb				Feb			
Gjsn				Gjsn			
Var				Var			
Stavvik				Stavvik			

Fyll ut kolonnene i tabell 3.

Når alle tre tabellene er fylt ut, kan man beregne koeffisienten til seriekorrelasjonen fra (1).

1. Tyder resultatet på at det er markedseffisiens? Begrunn svaret.
2. Hva kan årsakene til resultatet av analysen være?

9

Vi har lastet ned 21 daglige avkastninger for et selskap i skipsfart, som vi kaller Shipping, i de to årene 1986 og 2008.

Tabell 3 Beregning av kovariansen fra (4)

Mnd	(1) Avvik	(2) Avvik(-1)	(3) (1)×(2)
Feb			
Mar			
Apr			
Mai			
Jun			
Jul			
Aug			
Sep			
Okt			
Nov			
Des			
Jan			
Feb			
Kovar			

Dag:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1986	4.412	5.070	1.877	-0.658	-2.649	1.361	-0.671	-0.541	1.902	-1.333	
2008	-3.636	-2.123	0.000	0.000	0.482	-1.918	1.467	-3.133	3.731	3.118	
Dag:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1986	-2.703	0.000	-0.556	1.955	1.370	0.000	0.811	0.804	0.000	-2.660	3.005
2008	0.000	2.791	0.000	1.810	-1.778	0.226	0.000	3.386	2.620	6.383	0.500

1. Hva er seriekorrelasjonen med en dags tidsforskyvning i 1986 og i 2008? Bruk statistikkprogram eller dataanalyse i Excel.
2. Kan man si at markedseffisiensen har økt, stått stille eller avtatt ut fra verdien på seriekorrelasjonene?
3. Hvilken form for markedseffisiens brukes i denne oppgaven?

10

Firmaet Pelles Grusindustri (pgi) har annonsert at de vil kjøpe opp de resterende aksjer i fraktselskapet Last og Bil AS (lb). Nå har det kommet konkurransemyndighetene for øret at det har vært uvanlig store kursbevegelser i aksjen til lb forut for

kunngjøringen om oppkjøp. Du blir satt til å se nærmere på saken.

Det første du gjør er å bestemme et vindu av dager som du vil studere unormale kursbevegelser i og kaller dette *hendelsesvinduet*. Kunngjøringsdatoen settes til dag 0, og dager før dette angis med med minus. Du etablerer nederste dagen til -19. Samtidig bestemmer du hvor mange dager etter kunngjøringen du vil studere. Dette tallet settes til 11. Dernest setter du i gang med å skaffe data for selskapet og for Oslo Børs, slik at du kan etablere hvilken avkastning man kunne vente fra -19 og utover, hvis det ikke var noen kursmanipulasjoner. Du gjennomfører derfor en regresjonsanalyse hvor Oslo Børs indeks (OSEBX) er brukt som uavhengig variabel for et år forut for hendelsesvinduet, dvs. opp til dag -19. Avkastningen pr. dag er definert som $r_i = (P_t/P_{t-1} - 1) \times 100$, altså som prosentvise avkastninger, for både avkastningen på Oslo Børs (r_{ob}) og på lb (r_{lb}). Datautskriften fra regresjonsanalysen viser først følgende:

Regresjonsstatistikk	
Multippel R	0.541
R^2	0.293
Justert R^2	0.290
Standardfeil	2.005
Observasjoner	254

Videre viser datautskriften:

	Koeffisienter	Standardfeil	t-Stat	P-verdi
Skjæringspunkt	-0.049	0.126	-0.392	0.695
r_{ob}	0.959	0.094	10.212	0.000

I den beregningsperioden du ønsker å studere unormale kursbevegelser for, finner du de kursbevegelsene som er satt opp i tabell 4.

Besvar følgende spørsmål som konkurransemyndighetene kommer med:

1. Kommenter kort regresjonsresultatene.
2. Hva er de daglige, unormale avkastningene, og hva er den kumulerte unormale avkastningen i beregningsperioden?
3. Lag en graf over de kumulerte unormale avkastningene. Hvilke konklusjoner leder grafen til?
4. Kommenter kort det effisiensbegrep som er brukt her.

Tabell 4 Observerte avkastninger i lb og Oslo Børs i beregningsperioden. "avk" betyr avkastning og ob og lb står for henholdsvis Oslo Børs og Last og Bil AS.

Dag	r_{ob}	r_{lb}	Dag	r_{ob}	r_{lb}	Dag	r_{ob}	r_{lb}
-19	0.15	0.44	-9	0.37	0.03	1	0.58	0.19
-18	2.94	1.44	-8	-0.31	1.04	2	-0.45	0.00
-17	-0.29	0.76	-7	1.42	0.86	3	0.04	-0.05
-16	-0.86	-1.45	-6	-0.24	-0.32	4	0.91	0.69
-15	-0.53	-0.45	-5	-0.39	0.00	5	-0.11	-0.25
-14	-0.63	0.09	-4	-0.54	0.00	6	-0.23	-0.16
-13	1.37	-0.45	-3	1.54	2.78	7	-0.50	-0.49
-12	-0.79	1.05	-2	-0.91	-0.90	8	-0.46	-0.45
-11	0.59	0.00	-1	0.10	0.00	9	-2.70	-2.74
-10	-2.21	-1.33	0	-0.59	0.05	10	1.37	1.29
						11	1.06	1.15

Kap4: Løsningsforslag

Øystein Strøm

1

Vi skal finne netto nåverdi og internrente for de ulike prosjektene. Generelt er $NNV-$formelen:

$$NNV = -K_0 + \sum_1^T \frac{K_t}{(1+r)t} \tag{1}$$

Internrenten i er den rente som setter $NNV = 0$. Da har vi sammenhengen

$$NNV = -K_0 + \sum_1^T \frac{K_t}{(1+i)t} = 0 \tag{2}$$

Kapitalkostnaden er oppgitt å være 12.5% i oppgaven.

1.1 Prosjekt 1

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1.125} = 333.33$$

Internrenten finnes fra:

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1+i} = 0$$

Vi ser med en gang at

$$1 + i = \frac{1500}{1000} = 1.50 \Rightarrow i = 50\%$$

Tilbakebetalingstid er 1 år.

1.2 Prosjekt 2

Hvordan finner vi internrenten fra

$$NNV = -1000 + \frac{400}{1.125} + \frac{400}{1.125^2} + \frac{400}{1.125^3} + \frac{400}{1.125^4}$$

Kan bruke annuitet eller direkte regning. Direkte regning

$$NNV = -1000 + 355.56 + 316.05 + 280.93 + 249.72 = 202.26$$

Internrenten kan bestemmes fra

$$NNV = -1000 + 400\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = 0$$

Isoler annuitetsleddet:

$$\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = \frac{1000}{400} = 2.50$$

Slå opp i annuitetstabellen. Finn frem til 4 perioder. Finn den renten som svarer nærmest til 2.50. Det er ved 22%. Tabellverdien er 2.4936. Internrenten er altså 22%.

Tilbakebetalingstiden er 3 år.

1.3 Prosjekt 3

Vi har nåverdien:

$$NNV = -10 + \frac{50}{1.125} = 34.44$$

Internrenten fnner vi fra

$$NNV = -10 + \frac{50}{1+i} = 0$$

dvs.

$$1 + i = \frac{50}{10} = 5.0 \Rightarrow i = 400\%$$

Tilbakebetalingstiden er 1 år.

1.4 Prosjekt 4

Denne gangen har vi nåverdien

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1.125} + \frac{100}{1.125^2} + \frac{200}{1.125^3} + \frac{2000}{1.125^4}$$

Direkte regning gir nå:

$$NNV = -1000 + 44.44 + 79.01 + 140.47 + 1248.59 = 512.51$$

Internrente er definert fra uttrykket:

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1+i} + \frac{100}{(1+i)^2} + \frac{200}{(1+i)^3} + \frac{2000}{(1+i)^4} = 0$$

Her hjelper ingen triks. Det må prøves og feiles, eller man bruker kalkulator. Internrenten må altså være høyere enn 12.5%. Vi prøver 25%:

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1.25} + \frac{100}{1.25^2} + \frac{200}{1.25^3} + \frac{2000}{1.25^4} = 25.60$$

Vi er altså like i nærheten. Prøv 26%:

$$NNV = -1000 + \frac{50}{1.26} + \frac{100}{1.26^2} + \frac{200}{1.26^3} + \frac{2000}{1.26^4} = -3.85$$

Vi kan konkludere med at $IRR = 26\%$. Tilbakebetalingstiden er 4 år.

1.5 Prosjekt 5

Vi har nåverdien

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1.125} - \frac{300}{1.125^2} = 96.30$$

Ingen problemer for netto nåverdiberegningene. For internrenten har vi følgende utregninger:

$$NNV = -1000 + \frac{1500}{1+i} - \frac{300}{(1+i)^2} = 0$$

Multipliser med $1/(1+i)^2$ på begge sider av det siste likhetstegnet:

$$-1000(1+i)^2 + 1500(1+i) - 300 = 0$$

Del med -100:

$$10(1+i)^2 - 15(1+i) + 3 = 0$$

Dette er altså en kvadratisk funksjon med løsningene:

$$1+i = \frac{-(-15) + \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 3}}{2 \cdot 10} = 1.26 \qquad i = 0.26$$

og

$$1+i = \frac{-(-15) - \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 3}}{2 \cdot 10} = 0.24 \qquad i = -0.76$$

En realistisk internrente er 26%.

2

2.1 Deloppgave 1

$$NNV = -720 + \frac{300}{1.1} + \frac{300}{1.1^2} + \frac{300}{1.1^3}$$

som gir $NNV = 26.06$

Internrenten er gitt ved

$$NNV = -720 + \frac{300}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{300}{(1+i)^3} = 0$$

som gir $IRR = 12.04\%$.

Mini-prosjektet har

$$NNV = -240 + \frac{100}{1.1} + \frac{100}{1.1^2} + \frac{100}{1.1^3} = 8.69$$

og internrenten er $IRR = 12.04\%$.

2.2 Deloppgave 2

Ser man nærmere på kontantstrømmene, er Mega-prosjektet tre ganger så stort som Mini. Netto nåverdien avspeiler dette, $26.06/8.69 = 3.00$. Etter NNV-kriteriet er altså Mega langt å foretrekke fremfor Mini. Internrenteregelen fanger ikke opp forskjeller i størrelse. Etter dette kriteriet er Mega og Mini like gode, siden de har samme internrente. Men vi tjener flere penger på Mega.

3

Prosjektene er gjensidig utelukkende, dvs. vi skal velge bare ett av prosjektene, enten A eller B.

3.1 Internrentemetoden

Internrenten til A er gitt ved

$$NNV = -47232 + 20000\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = 0$$

som ved tabellmetoden gir:

$$\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = \frac{47232}{20000} = 2.3616$$

som svarer til en $IRR = 25.0\%$.

Prosjektet B har en internrente definert ved

$$NNV = -47232 + \frac{10000}{(1+i)^2} + \frac{20000}{(1+i)^3} + \frac{65350}{(1+i)^4} = 0$$

som innebærer en internrente på $IRR = 22.00\%$.

Kapitalkostnaden er 10.0%, og begge prosjekter har en IRR som overstiger kravet til kapitalkostnad. Prosjekt A har høyest IRR, og velges fremfor B.

3.2 Nåverdimeteoden

Vurdering ved hjelp av NNV-metoden. Kapitalkostnaden er gitt og 10%, slik at Prosjekt A gir

$$NNV = -47232 + 20000\frac{(1.1)^4 - 1}{0.10(1.1)^4} = 16165.31.$$

På samme måte har vi for prosjekt B:

$$NNV = -47232 + \frac{10000}{1.1^2} + \frac{20000}{1.1^3} + \frac{65350}{1.1^4} = 20693.69$$

Etter denne metoden er altså prosjekt B best.

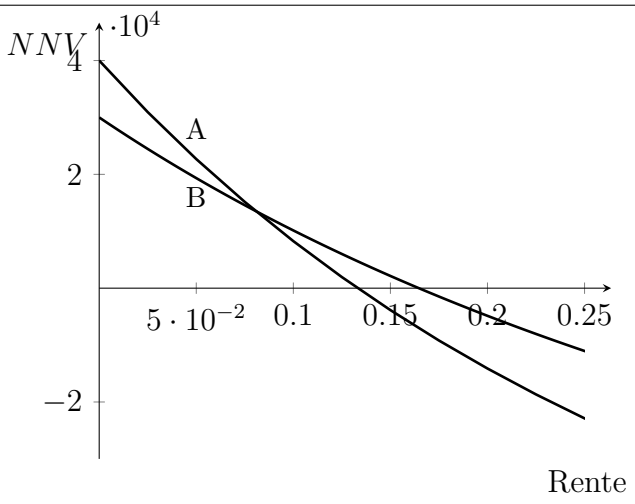
Hvilket prosjekt er riktig å velge? Etter internrentemetode skal vi velge A, etter nåverdimetoden B. Regelen er at vi bruker nåverdimetoden, det er jo denne metoden som viser hvor mye rikere eierne blir. Ved den gitte kapitalkostnaden gir prosjekt B mest kontanter til eierne av prosjektet. Internrenten, som er en prosentsats, forteller oss ikke hvilke beløp vi mottar fra prosjektene.

4

4.1 Deloppgave 1

Vi skal vise nåverdiprofilene til prosjektene. Figur 1 viser profilene.

Figur 1 Nåverdiprofilene til Nilsens prosjekter A og B. y-aksen er i vitenskapelig uttrykk; $10^4 = 10,000$.



Vi finner internrenten på det stedet der nåverdiprofilen skjærer x-aksen. x-aksen er plassert der $NNV = 0$. Nåverdiprofilene viser at prosjekt B er bedre enn prosjekt A ved de høyere rentene.

4.2

Internrenten til A fra

$$NNV = -100 + \frac{60}{1+i} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{30}{(1+i)^3} = 0$$

som impliserer at $IRR = 16,46\%$ og for B:

$$NNV = -100 + \frac{10}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3} = 0$$

som betyr at internrenten er $IRR = 13.32\%$

4.3

Vi kan finne NNV etter de samme metoder som før. Resultatene for A og B er satt opp nedenfor.

r	A	B
6%	17392	19592
12%	6813	3168

4.4

Vi har altså en situasjon med to gjensidig utelukkende prosjekter. Beslutningsregelen for internrente er da:

> Aksepter det prosjektet som har høyest internrente, hvis internrenten er høyere enn kravet til kapitalkostnad.

Etter dette kriteriet skal vi altså velge prosjekt A.

Beslutningsregelen for netto nåverdi er:

> Aksepter det prosjektet som har høyest positiv netto nåverdi.

Ved en kapitalkostnad på 6% er prosjekt B best, ved kapitalkostnad 12% er prosjekt A best. Beslutningen om å velge det eller det andre prosjektet avhenger altså av det krav til kapitalkostnad som settes.

4.5

Annen informasjon. Det kan være informasjon som

- Prosjektenes følsomhet overfor endringer i forutsetninger om pris, variable kostnader etc.
- Prosjektets risiko, målt i forhold til risikoen ved prosjektene ellers i økonomien.

5 Oppgave 1.5

5.1 Deloppgave 1

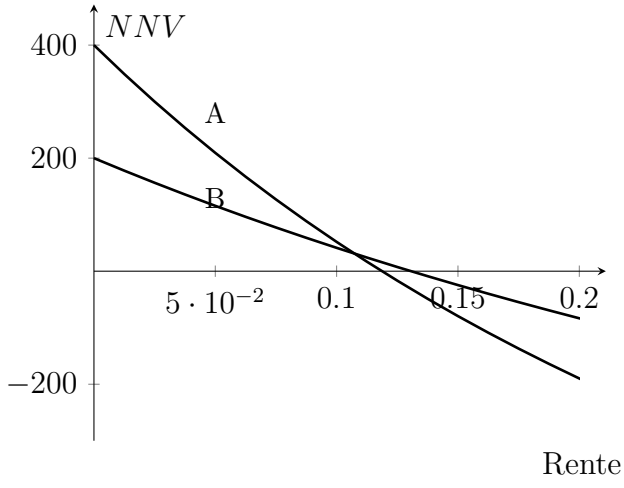
NNV for A og B:

$$NNV_A = -1000 + \frac{600}{1.12} + \frac{600}{1.12^2} = 14.03; \qquad NNV_B = -3.51$$

5.2 Deloppgave 2

Finn nåverdiprofilen til de to prosjektene. Etter vanlige metoder har vi at: A: $IRR = 13.07\%$
B: $IRR = 11.87\%$

Figur 2 Nåverdiprofilene til to gjensidig utelukkende prosjekter A og B



5.3 Deloppgave 3

Ved $r = 0$ er $NNV_A = 200$ og $NNV_B = 400$. Prosjekt B må ha høyere NNV i et intervall fra $r = 0$ og utover. Prosjektene vil ha samme NNV når

$$NNV_A = NNV_B$$

altså når

$$-1000 + \frac{600}{(1+r)} + \frac{600}{(1+r)^2} = -1000 + \frac{1400}{(1+r)^3}$$

Forenkling av uttrykket gir:

$$\frac{600}{(1+r)} + \frac{600}{(1+r)^2} - \frac{1400}{(1+r)^3} = 0$$

Multipliserer med $(1+r)^3/100$ på begge sider av likhetstegnet:

$$6(1+r)^2 + 6(1+r) - 14 = 0$$

som vi gjenkjenner som en kvadratisk funksjon. Da har vi:

$$1 + r = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-14)}}{2 \cdot 6} = 1.1073$$

dvs $IRR = 10.73\%$, mens den andre roten blir negativ og gir dermed ingen mening.

Prosjekt B har dermed høyere NNV enn B i området $r = 0$ til 10.73%. Alt i alt kan vi dele beslutningene inn i tre deler:

$0 < r < 0.1073$ Prosjekt B har høyest NNV og bør velges.

$0.1073 < r < 0.1307$ Prosjekt A har høyest NNV og bør velges.

$r > 0.1307$ Også prosjekt A har negativ NNV og bør ikke aksepteres.

5.4 Deloppgave 4

Differanseprosjektet (B-A) er gitt ved

B	-1000	0	0	1400
A	-1000	600	600	0
B-A	0	-600	-600	1400

Internrenten finnes ved:

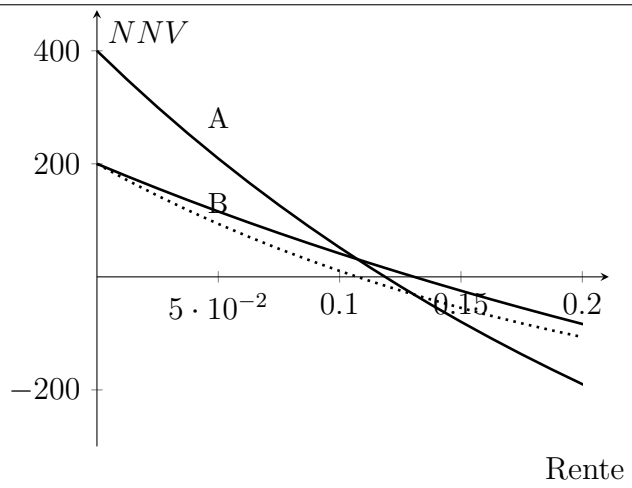
$$NNV = -\frac{600}{1+i} - \frac{600}{(1+i)^2} + \frac{1400}{(1+i)^3} = 0$$

som vi altså gjenkjenner fra Deloppgave 3, dvs. $IRR = 10.73\%$. Vi har samme konklusjoner som ovenfor.

Nåverdiprofilene til differanseinvesteringene sammen med nåverdiprofilene til prosjektene er vist i figur 4.

Legg merke til at nåverdiprofilen til differanseinvesteringen akkurat bryter x-linjen der nåverdiprofilene til prosjekt A og B krysser hverandre.

Figur 3 Nåverdiprofilene til to gjensidig utelukkende prosjekter A og B sammen med differanseinvesteringen (prikket linje)



6 Oppgave 1.6

6.1 Deloppgave 1

Primo har NNV:

$$NNV = -100 + \frac{10}{1.12} + \frac{10}{1.12^2} + \frac{25}{1.12^3} + \frac{50}{1.12^4} + \frac{100}{1.12^5}$$

som betyr at $NNV = 23.21$. Secondo gir

$$NNV = -100 + \frac{100}{1.12} + \frac{20}{1.12^2} + \frac{10}{1.12^3} + \frac{10}{1.12^4} + \frac{5}{1.12^5}$$

Altså $NNV = 21.54$.

6.2 Deloppgave 2

Differanseprosjektet (Primo - Secondo) er gitt ved

Primo	-100	10	10	25	50	100
Secondo	-100	100	20	10	10	5
$P - S$	0	-90	-10	15	40	95

Internrenten er da gitt ved:

$$NNV = -\frac{90}{1+i} - \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{15}{(1+i)^3} + \frac{40}{(1+i)^4} + \frac{95}{(1+i)^5} = 0$$

Vi finner at internrenten til differanseinvesteringen $IRR = 12.62\%$.

6.3 Deloppgave 3

,

Nåverdiprofilene viser følgende skjæringspunkter med linjen for $NNV = 0$.

$IRR_P = 18.11\%$

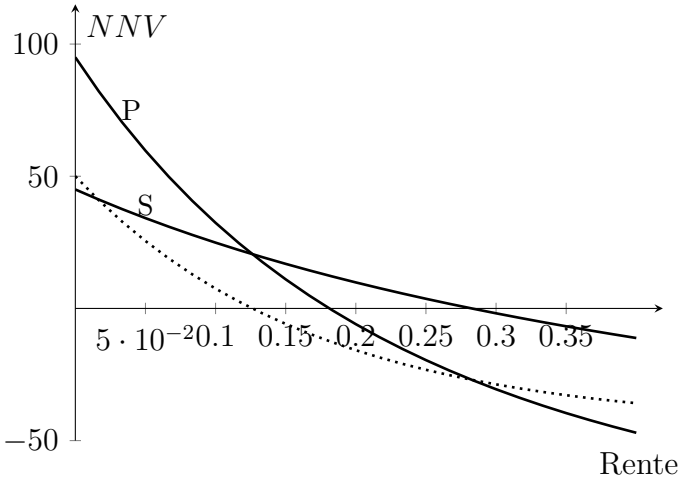
$IRR_S = 28.26\%$

$0 < r < 0.1262$ Prosjektet Primo velges, siden det har høyest NNV.

$0.1262 < r < 0.2826$ Secondo velges, siden dens NNV er høyest i området.

$r > 0.2826$ Ingen av prosjektene aksepteres.

Figur 4 Nåverdiprofilene til to gjensidig utelukkende prosjekter Primo og Secondo sammen med differanseinvesteringen (prikket linje)



7 Oppgave 1.7

7.1 Deloppgave 1

Netto nåverdi og internrente er gitt i tabellen nedenfor.

	0	1	2	3	NNV	IRR
1	-60000	30000	25000	25000	6716.75	0.16
2	-30000	-20000	25000	45000	6288.50	0.16
3	-40000	-50000	60000	70000	16724.27	0.20
4	0	-80000	45000	55000	5785.12	0.16
5	-50000	10000	30000	40000	13936.89	0.22

7.2 Deloppgave 2

Alle prosjektene har positiv netto nåverdi, og ville altså blitt akseptert.

7.3 Deloppgave 3

Mobekken bør velge de prosjekter som har høyest *nåverdiindeks* innenfor investeringsbudsjettet. Denne er definert ved:

$$NI = \frac{NNV}{K_0} \tag{3}$$

	0	NNV	NI
1	-60000	6716.75	0.11
2	-30000	6288.50	0.21
3	-40000	16724.27	0.42
4	0	5785.12	
5	-50000	13936.89	0.28

Prosjekt 3 skal velges først, deretter prosjekt 5. Da er 90,000 av investeringsbudsjettet brukt opp, og de siste 10,000 skal brukes på prosjekt 2. Legg merke til at vi kan gjennomføre et gitt prosjekt delvis. Noter også at prosjekt 4 ikke er med i vurderingen i denne perioden. Investeringen kommer først neste periode, og beslutningen om gjennomføring kan utsettes til da.

Kap4: Oppgaver

Øystein Strøm

1

Finn netto nåverdi, internrente og tilbakebetalingstid på prosjektforslagene nedenfor.

Prosjekt	0	1	2	3	4
1	-1.000	1.500	0	0	0
2	-1.000	400	400	400	400
3	-10	50	0	0	0
4	-1.000	50	100	200	2.000
5	-1.000	1.500	-300	0	0

Kapitalkostnaden er 12,5%.

2

Prosjektet Mega har kontantstrømmen (-720,300,300,300), mens prosjektet Mini har kontantstrømmen (-240,100,100,100). Kapitalkostnaden er 10,0%.

1. Finn internrente og netto nåverdi.
2. Kommenter resultatene.

3

Firmaet du er ansatt i bruker internrentemetoden, og ber deg vurdere de to følgende gjensidig utelukkende prosjekter

Forslag	0	1	2	3	4
A	-47.232	20.000	20.000	20.000	20.000
B	-47.232	0	10.000	20.000	65.350

Selskapet bruker en kapitalkostnad på 10% på denne type investeringer.

1. Bruk internrentemetoden til å vurdere prosjektene.
2. Hva ville svaret ditt vært, dersom du i stedet ble bedt om å vurdere forslagene med nåverdimetoden?

4

Benjamin Nilsen driver et lite verksted, og vurderer nå to gjensidig utelukkende prosjekter. Felles for prosjektene er størrelsen på investeringsutbetalingene i år 0: 100.000. Prosjektenes innbetalingsoverskudd er beregnet i tabellen nedenfor.

År	Prosjekt A	Prosjekt B
1	60.000	10.000
2	40.000	20.000
3	30.000	110.000

Du skal

1. Lage en grafisk fremstilling som viser sammenhengen mellom kapitalkostnaden og netto nåverdi for de to prosjektene.
2. Bruk diagrammet til å bestemme internrenten for begge prosjekter. Kontroller ved andre metoder.
3. Finn netto nåverdi for prosjektene når kapitalkostnaden er 6% og når den er 12%.
4. Bør Nilsen akseptere prosjektene hvis kapitalkostnaden er 6%? Hva om den er 12%?
5. Hvilken annen informasjon ville være nyttig for Nilsen i tillegg til det som kommer frem i tabellen?

5

To gjensidig utelukkende prosjekter har følgende kontantstrømmer.

	Kontantstrømmer			
Prosjekt	0	1	2	3
A	-1.000	600	600	0
B	-1.000	0	0	1.400

Kapitalkostnaden er 12%.

1. Finn netto nåverdi for prosjektene. Hvilket bør velges?
2. Finn internrenten for prosjektene - lag diagram hvor begge prosjekter inngår.
3. Ved hvilken kapitalkostnad ville B velges fremfor A?
4. Lag differanseinvestering (B-A). Legg også denne inn i diagrammet. Vis at de tilfellene hvor du ville akseptere A er også de tilfellene da internrenten på differanseinvesteringen er mindre enn kapitalkostnaden.

6

To gjensidig utelukkende investeringer Primo og Secondo har kontantstrømmene: Primo = (-100,10,10,25,50,100) og Secondo = (-100,100,20,10,10,5).

1. Finn netto nåverdi når prosjektene diskonteres med en rente på 12%. Finn også internrenten.
2. Finn differanseinvesteringen. Hva er internrenten på differanseinvesteringen?
3. Vis nåverdiprofilene til Primo og Secondo samt differanseinvesteringen.

7

Mobekken ASA planlegger sitt investeringsbudsjett for de kommende to år. Etter grovvurdering har direktørene samlet seg om en liste på fem som krever nærmere granskning. Prosjektene er vist nedenfor.

Prosjekt	0	1	2	3
1	-60.000	30.000	25.000	25.000
2	-30.000	-20.000	25.000	45.000
3	-40.000	-50.000	60.000	70.000
4	0	-80.000	45.000	55.000
5	-50.000	10.000	30.000	40.000

Ingen av prosjektene kan utsettes og alle er fullt delbare, dvs. man kan gjennomføre for eksempel 25% av et prosjekt. Kapitalkostnaden for denne type prosjekter er

10%.

1. Hva er prosjektenes netto nåverdi? Hva er internrenten og hva er tilbakebetalingstid (uten diskontering).
2. Anta at alle prosjektene kan gjennomføres, hvis de er lønnsomme. Hvilke ville Mobekken akseptere?
3. Anta at Mobekken ASA ikke kan gjennomføre alle prosjekter, men bare prosjekter innenfor en ramme på 100.000. Hvilke prosjekter ville i så fall bli valgt?

Kap. 5: Oppgaver – Løsningsforslag

1

1.1

Renten er oppgitt pr. måned. Årsrenten finner vi ved

$$r_{eff} = (1 + r_{mnd})^{12} - 1 \tag{1}$$

der r_{eff} er den effektive renten, eller den faktiske årsrenten du betaler, mens r_{mnd} er månedsrenten. Da har vi:

$$r_{eff1} = 1.0183^{12} - 1 = 0.2431 \qquad r_{eff2} = 1.0184^{12} - 1 = 0.2446$$

dvs. den effektive årsrenten har økt fra 24.31% til 24.46%.

1.2

Jeg må altså betale

$$\text{Rentebetalingsøkning} = 1000(0.2446 - 0.02431) = 1.50$$

mer på lånet.

1.3

Renten er altså 39% pr. år eller 0.39. Vi finner månedsrenten ved å ta 12' rot, eller

$$r_{mnd} = (1 + r_{eff})^{1/12} - 1$$

Vi har altså:

$$r_{mnd} = (1.39)^{1/12} - 1 = 0.0278$$

eller en månedsrente på 2.78%.

1.4

Dagsrenten er 4.69%. Årsrenten er, etter (1):

$$r_{eff} = 1.0469^{365} - 1 = 18,424,593.09$$

eller 1,842,459,309%!

Gjelden etter ett år vil altså være

$$1.000 \times (1 + 18,424,593.09) = 18,424,594,090.$$

Gjelden har altså vokst til NOK 184.245.941, altså nesten 185 mill kroner på ett år. En slik gjeld er selvsagt hypotetisk, siden den blir betalt tilbake hver dag.

2

2.1

Anta at lånet er på fjorten dager, eller to uker. Låneren får utbetalt USD 350 og betaler tilbake USD 400 to uker senere. Renten på lånet i disse fjorten dagene er

$$r_{14dgr} = \frac{400 - 350}{350} = 0.1429.$$

Det er 26 uker i ett år. Fra (1) har vi da at den effektive årsrenten blir:

$$r_{eff} = (1 + 0.1429)^{26} - 1 = 31.20 \qquad = 3,120\%.$$

Lønningslåneren må betale en effektiv rente på over 3,000%.

2.2

Er utlånstjenesten nyttig? Det er to mulige tolkninger:

1. Tjenesten er nyttig fordi den tillater låneren til å utjevne konsum, spesielt hvis man opplever et plutselig fall i husholdningens likviditet.
2. Tjenesten er ikke nyttig fordi den stimulerer lånere til overkonsum, noe som kan ende med gjeldsslaveri. Noen husholdninger vil derfor foretrekke ikke å ha muligheten til å ta slike lån, men heller binde seg til den disiplinen som den faste lønnsutbetalingen i perioden gir. Man sier slike personer har manglende selvkontroll. En annen grunn kan være at personer er nærsynte i den forstand at de fokuserer bare på å tilfredsstille dagens behov. Man har "tids-inkonsistente preferanser".

Morse (2011) finner at utlånerne utfører en nyttig tjeneste ved at man utjevner konsum i tilfeller med en inntektssvikt. Hun gjør dette ved å sammenligne husholdninger som har blitt påført en inntektssvikt utenfra med husholdninger som ikke har opplevd en inntektssvikt pga. utenforliggende omstendigheter. Hun bruker naturkatastrofer i California til å skille mellom husholdninger.

3

3.1

Den effektive årsrenten i tilfellet med kontinuerlig forrentning har vi fra

$$r_e = e^r - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + r_e = e^r \tag{2}$$

Den effektive årsrenten når $r = 0.05$ er da:

$$r_e = e^{0.05} - 1 = 0.05127$$

og $r = 0.075$

$$r_e = e^{0.075} - 1 = 0.07788.$$

3.2

Vi får en kontantstrøm $K_1 = 1200$ om ett år. Den generelle formelen for neddiskontering er

$$NV\left(K_T\right) = \frac{K_T}{e^{r_k T}} \tag{3}$$

der T er tid til forfall. Siden $T = 1$ i denne deloppgaven, er nåverdien

$$NV\left(K_1\right) = \frac{1150}{e^{0.05 \cdot 1}} = 1093.91$$

hvis $r = 0.05$ og

$$NV\left(K_1\right) = \frac{1150}{e^{0.075 \cdot 1}} = 1066.91$$

hvis $r = 0.075$.

3.3

Tid til forfall forandres nå. Først er $T = 2$ for $r = 0.05$, dvs.

$$NV\left(K_2\right) = \frac{1150}{e^{0.05 \cdot 2}} = 1040.56.$$

Hvis $r = 0.075$ har vi at $NV\left(K_2\right) = 979.81$.

Når forfall er om et halvt år, har vi at $T = 0.5$. Med $r = 0.05$ gir dette

$$NV\left(K_{0.5}\right) = \frac{1150}{e^{0.05 \cdot 0.5}} = 1121.61.$$

Hvis $r = 0.075$ blir $NV\left(K_{0.5}\right) = 1107.67$.

4

Realrentene er vist i tabell 1 nedenfor.

Realrente finner vi fra sammenhengen

$$r_{real} = \frac{r_{nom} - 1}{1 + i} \tag{4}$$

hvor i er inflasjon. For januar finner vi for eksempel:

$$r_{real} = \left(\frac{0.125 - 0.059}{1 + 0.059}\right) \times 100 = 6.23.$$

Tabell 1 Realrente i de første månedene av 1985

Måned	Stat10	Inflasjon	Realrente
januar 85	12.50	5.9	6.23
februar 85	12.74	5.6	6.76
mars 85	12.81	5.6	6.83
april 85	12.87	5.5	6.99
mai 85	12.87	5.8	6.68
juni 85	12.92	6.0	6.53

5

Figuren viser tydelig at realrenten avhenger av nominell rente og inflasjon.

Nominell rente Når nominell rente stiger, stiger også realrenten, gitt at inflasjonen er konstant.

Inflasjon Når inflasjonen stiger, synker realrenten, gitt at nominell rente forblir konstant.

Sammenhengen er tydeligst for den store økningen i inflasjonen som fant sted i 1986 og 1987. I slutten av perioden er realrenten forholdsvis stabil. Da utlignes fallet i nominell rente av et samtidig fall i inflasjonen.

6

6.1

Alternativ A: To år. Rentebetalingen blir

$$(1 + 0.040)^2 = 1.0816$$

Alternativ B: Ettårig lån og overrulling med forwardavtale. Samlet rentebetaling:

$$(1 + 0.038) \cdot (1 + 0.041) = 1.0806.$$

Alternativ B er å foretrekke.

6.2

Forwardrenten i år 2, f_2 er ukjent. Skal alternativene være like gode, må vi ha at

$$(1 + 0.040)^2 = (1 + 0.038) \cdot (1 + f_2)$$

som impliserer at forwardrenten blir

$$(1 + f_2) = \frac{(1 + 0.040)^2}{(1 + 0.038)} = 1.042 \qquad \text{og} \qquad f_2 = 0.042.$$

Forwardrenten måtte ha vært 4.2%.

6.3

Renten for det ettårige lånet r_1 er ukjent. Skal alternativene være like gode, må vi ha at

$$(1 + 0.040)^2 = (1 + r_1) \cdot (1 + 0.041)$$

som impliserer at ettårsrenten blir

$$(1 + r_1) = \frac{(1 + 0.040)^2}{(1 + 0.041)} = 1.039 \qquad \text{og} \qquad r_1 = 0.039.$$

Ettårsrenten måtte være 3.9%.

6.4

Toårsrenten r_2 er ukjent. Skal alternativene være like gode, må vi ha

$$(1 + r_2)^2 = (1 + 0.038) \cdot (1 + 0.041) = 1.0806$$

Dette betyr videre at

$$\sqrt{(1 + r_2)^2} = \sqrt{1.0806} = 1.0395 \qquad \text{og} \qquad r_2 = 0.0395.$$

Renten på det toårige lånet må være 3.95%.

6.5

Dette er *markedets fundamentale likevektsbetingelse* og er generelt gitt av

$$(1 + r_2)^2 = (1 + r_1) \cdot (1 + f_2)$$

for en sammenheng for de to nærmeste periodene.

7

7.1

Avkastningen for en aksje S_t, eller et hvilket som helst verdipapir, fra en periode til en annen er gjerne gitt av

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 \tag{5}$$

Avkastningene kan også beregnes såkalt logaritmisk.

Avkastningene er samlet i tabell 2.

For eksempel fremkommer avkastningen i år 3 for aksje A som

$$r_3 = \frac{142.72 - 94.59}{94.59} = 0.5078 \sim 0.51.$$

De øvrige resultatene fremkommer på samme måte.

7.2

Den gjennomsnittlige aritmetiske avkastningen for aksje A for alle årene vi har avkastninger for er gitt av

$$r_a = \sum_{t=1}^{11} \frac{r_t}{T} \tag{6}$$

som gir

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{-0.05 + 0.51 + 0.52 + 0.11 - 0.20 + 0.14 + 0.21 + 0.02 + 0.09 + 0.05 - 0.14}{11} \\ &= 0.11 \end{aligned}$$

Tabell 2 Utregninger av avkastninger for hvert år og for hele perioden under ett

	Kurser		Avkastning	
År	Aksje A	Aksje B	Aksje A	Aksje B
1	100.00	100.00		
2	94.59	158.63	-0.05	0.59
3	142.72	161.90	0.51	0.02
4	216.42	86.30	0.52	-0.47
5	240.46	74.10	0.11	-0.14
6	192.34	60.81	-0.20	-0.18
7	219.20	70.73	0.14	0.16
8	265.59	79.96	0.21	0.13
9	269.66	93.73	0.02	0.17
10	293.45	54.80	0.09	-0.42
11	308.28	30.80	0.05	-0.44
12	266.45	28.17	-0.14	-0.09
Aritmetisk avkastning			0.11	-0.06
Geometrisk avkastning			0.09	-0.11

Tilsvarende finner vi at den gjennomsnittlige avkastningen for aksje B er $r_{aB} = -0.06$.

Den gjennomsnittlige geometriske avkastningen for aksje A er gitt av

$$r_g = \left(\left(1 + r_1\right)\left(1 + r_2\right)\ldots\left(1 + r_T\right)\right)^{1/T} - 1 \tag{7}$$

I denne oppgaven har vi at

$$\begin{aligned} r_g &= \left(0.95 \cdot 1.51 \cdot 1.52 \cdot 1.11 \cdot 0.80 \cdot 1.14 \cdot 1.21 \cdot 1.02 \cdot 1.09 \cdot 1.05 \cdot 0.86\right)^{1/11} - 1 \\ &= 0.09. \end{aligned}$$

På samme måte finner vi at avkastningen for B i perioden er $r_{gB} = -0.11$.

7.3

Geometrisk avkastning forteller hva avkastningen for en tidligere periode har vært, mens aritmetisk gjennomsnitt viser den avkastningen som er forventet i kommende periode, gitt de avkastninger som har vært tidligere.

Du ville forvente at investeringen vil vokse til

$$1000 \cdot 1.11 = 1,110$$

etter ett år.

7.4

Den gjennomsnittlige aritmetiske avkastningen er $r_a = 0.11$ for aksje A. Bruker vi denne avkastningen for alle årene, kommer vi frem til en forventet sluttverdi $E(K_T)$:

$$E(K_T(A)) = 100 \cdot (1 + 0.11)^{11} = 327.24.$$

For B har vi at $E(K_T(B)) = 50.98$.

Bruker vi i stedet den gjennomsnittlige geometriske avkastningen, får vi sluttverdiene $E(K_T(A)) = 266.45$ og $E(K_T(A)) = 28.17$.

Den gjennomsnittlige geometriske avkastningen gir med andre ord den korrekte *historiske* avkastningen, mens den aritmetiske bommer temmelig mye i dette tilfellet.

8

Vi skal nå se på logaritmiske avkastninger. Vi bruker den naturlige logaritmen.

8.1

En oversikt over resultatene er gitt i tabell 3.

For hvert år har vi brukt formelen

$$\ln(1 + r_t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) \tag{8}$$

For avkastningen i år 4 for aksje A har vi

$$\ln(1 + r_4) = \ln\left(\frac{216.42}{142.72}\right) = 0.42.$$

Tabell 3 Utregninger av logaritmiske avkastninger for hvert år og for hele perioden under ett

	Kurser		Avkastning	
År	Aksje A	Aksje B	Aksje A	Aksje B
1	100.00	100.00		
2	94.59	158.63	-0.06	0.46
3	142.72	161.90	0.41	0.02
4	216.42	86.30	0.42	-0.63
5	240.46	74.10	0.11	-0.15
6	192.34	60.81	-0.22	-0.20
7	219.20	70.73	0.13	0.15
8	265.59	79.96	0.19	0.12
9	269.66	93.73	0.02	0.16
10	293.45	54.80	0.08	-0.54
11	308.28	30.80	0.05	-0.58
12	266.45	28.17	-0.15	-0.09
Sum avkastninger (ln)			0.98	-1.27
Gj.sn. avkastning (ln)			0.09	-0.12

I prosent er avkastningen

$$e^{\ln(1+r_4)} = e^{42}$$
$$1 + r_4 = 1.52 \Rightarrow r_4 \cdot 100 = (1.52 - 1.00)100 = 52\%$$

idet vi benytter at $e^{\ln x} = x$.

8.2

Avkastningen for hele perioden kan beregnes på to måter når vi har logaritmiske avkastninger.

Metode 1: Summér avkastningene. Vi ser at for aksje A har vi at summen er

$$\ln(1 + r_T) = \sum_{t=2}^{12} (1 + r_t) = 0.98$$

Vi finner da avkastningen for hele perioden ved ta antilogaritmen:

$$e^{\ln(1+r_T)} = 1 + r_T = e^{0.98} = 2.6645$$

og $r_T = 166.45\%$.

På samme måte finner vi at avkastningen for B er -71.83%.

Metode 2: Bruk start- og sluttverdier. Vi setter nå:

$$\ln(1 + r_T) = \ln\left(\frac{S_T}{S_1}\right)$$

Dette gir oss:

$$\ln(1 + r_T) = \ln\left(\frac{266.45}{100.00}\right) = 0.98.$$

Vi ser at resultatet er det samme som i Metode 1. De to metodene gir dermed samme svar.

8.3

Den gjennomsnittlige logaritmiske avkastningen er funnet ved å dele avkastningen for hele perioden med de 11 årene vi har avkastninger for. Sett $r'_t = \ln(1 + r_t)$. Gjennomsnittlig logaritmisk avkastning $\bar{r}'$ er da: $\bar{r}' = r'_T/11$, dvs. $\bar{r}' = 0.98/11 = 0.09$.

Nå kan vi omforme dette til en absolutt avkastning i gjennomsnitt ved å ta antilogaritmen: $e^{\bar{r}'} = e^{0.09} - 1 = 0.09318$, og sluttverdi er nå:

$$S_T(A) = 100 \cdot (1 + 0.09318)^{11} = 266.45.$$

På samme måte finner vi at sluttverdien for B er $S_T(B) = 28.17$. Den logaritmiske metoden er dermed konsistent med det faktiske forløp for investeringen.

Referanser

Morse, A. (2011, Oct). Payday lender: Heroes or villains? *Journal of Financial Economics 102*(1), 28 – 44.

Kap. 5: Oppgaver

1

Jeg fikk beskjed fra mitt kredittkortselskap at renten *pr. måned* på innestående saldo ville øke fra 1.83% til 1.84%. Anta at jeg har 1,000 innestående fra nyttår, og planlegger å betale det hele tilbake, renter og alt, ved årsslutt.

1. Hva er årsrenten for de to rentesatsene?
2. Hvor mye mer må jeg betale i renter etter renteøkningen?
3. Roy Mersland og jeg har funnet at gjennomsnittlig rente i mikrofinansinstitusjoner (MFIer) er 39% nominelt. Hva er månedsrenten?
4. Banerjee and Duflo (2011, s. 157-8) forteller at frukt- og grønnsaksselgere i Chennai i India får varer for 1,000 rupi (ca. NOK 100.00) om morgenen, selger varene utover dagen og betaler tilbake i gjennomsnitt 1,046.90 rupi om kvelden.
   (a) Hva er dagsrenten på dette lånet?
   (b) Hva er årsrenten?
   (c) Hvor mye ville selgeren skylde etter ett år hvis vedkommende ikke betalte de første 1,000 rupiene tilbake?

2

I USA finnes spesialiserte utlånere som gir kortsiktig kreditt med forfall på førstkommende lønnsutbetaling til personer med en bankkonto. Morse (2011) forteller at et typisk lån er på USD 350. Utlåneren krever et gebyr på USD 50, og låneren skriver en sjekk på USD 400 som trekkes fra konto på lønningsdagen, vanligvis om fjorten dager.

1. Hva er årsrenten på dette lånet?

2. Tilbyr utlånere en nyttig tjeneste? Det hører med til historien at slike lån ikke er mulige å få i ordinære banker.

3

1. Årsrenten er 5% skrives det i en annonse, men i liten skrift finner du ut at lånet forrentes kontinuerlig. Hva er da den effektive årsrenten? Hva er den effektive årsrenten dersom den annonserte årsrenten er 7.5%?
2. Du kan gjøre en investering i dag på 1,000 som om ett år gir en kontantstrøm på 1,150. Hva er nåverdien av den fremtidige kontantstrømmen når man bruker de kontinuerlige rentene fra forrige oppgave 1?
3. Hva om kontantstrømmen først kommer om to år? Hva om den kommer om seks måneder?

4

På 1980-tallet startet liberaliseringen i finansmarkedene. Tiden var preget av mye uro og vekslende inflasjon. Her er den årlige renten på en 10-årig statsobligasjon og den årlige endringen i inflasjonsindeksen for de seks første månedene i 1985.

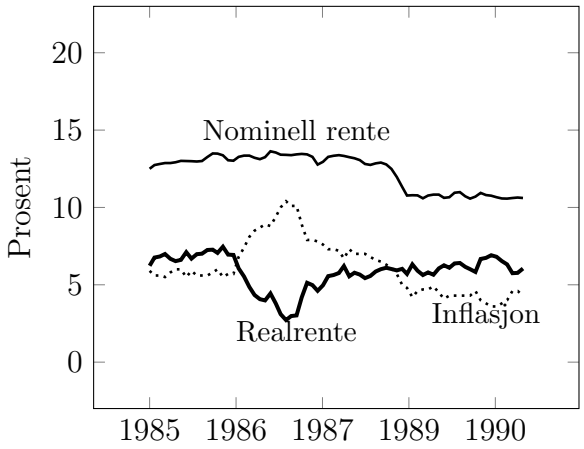
Tabell 1 Nominell årsrente på 10-årig statsobligasjon (Stat10) og årlig inflasjon i 1985. Kilder: Norges Bank (renter) og Statistisk Sentgralbyrå

Måned	Stat10	Inflasjon
januar 85	12.50	5.9
februar 85	12.74	5.6
mars 85	12.81	5.6
april 85	12.87	5.5
mai 85	12.87	5.8
juni 85	12.92	6.0

Du skal beregne realrenten i prosent for disse månedene.

5

Figuren 1 nedenfor viser interessante utviklingstrekk for nominell rente, inflasjon og realrente for tiden 1985 til 1991.



Figur 1: Nominell rente på tiårig statsobligasjon, inflasjon og realrente på årlig basis i månedene fra 1985 og ut 1990. Kilder: Norges Bank (renter) og Statistisk Sentralbyrå

Hvorfor varierer realrenten så mye i perioden?

6

1. Du trenger et lån over to år. Banken gir deg to valg. Enten kan du velge et lån med forfall om to år til 4.00%, eller du kan ta et lån med ett år til forfall til 3.80% og så et nytt lån med en rente du avtaler i dag på 4.10%. Hvilket valg ville være det gunstigste for deg?
2. Hva måtte fremtidsrenten for år 2 være for at alternativene var like gode?
3. Anta at toårs- og fremtidsrenten er kjente. Hva måtte renten første året være for at alternativene var like gode?
4. Anta at ettårs- og fremtidsrenten er kjente. Hva måtte renten for begge årene være for at alternativene var like gode?
5. Hva kalles den arbitrasjesammenheng som ligger til grunn for resultatene i deloppgavene 2, 3 og 4?

7

Tabell 2 Kurser i to aksjer

	Kurser		Avkastning	
År	Aksje A	Aksje B	Aksje A	Aksje B
1	100.00	100.00		
2	94.59	158.63		
3	142.72	161.90		
4	216.42	86.30		
5	240.46	74.10		
6	192.34	60.81		
7	219.20	70.73		
8	265.59	79.96		
9	269.66	93.73		
10	293.45	54.80		
11	308.28	30.80		
12	266.45	28.17		
Aritmetisk avkastning				
Geometrisk avkastning				

Du skal kunne fylle ut tabell 2.

1. Finn den aritmetiske avkastningen for hvert år for begge aksjene.
2. Finn aritmetisk og geometrisk avkastning for hele perioden samlet for begge aksjene.
3. Du vurderer en investering på 1,000 i aksje A som du planlegger å holde i ett år. Hva kan du forvente at aksjen er verdt etter ett år? Begrunn.
4. Bruk den gjennomsnittlige aritmetiske og geometriske avkastningen til å finne sluttverdien for en investering verdt 100 i år 1 i hver aksje.

8

Bruk på nytt tallene i tabell 2. Nå skal du bruke logaritmisk avkastning.

1. Finn den logaritmiske avkastningen for hvert år.
2. Finn avkastningen for hele perioden. Vis to måter å gjøre dette på.
3. Finn sluttverdien for aksje A og B når du bruker den gjennomsnittlige avkastningen og investeringen er verdt 100 i år 1.

Referanser

Banerjee, A. V. and E. Duflo (2011). *Poor Economics. A Radical Rethinking of the Way to Fight Global Poverty.* New York: Public Affairs.

Morse, A. (2011, Oct). Payday lender: Heroes or villains? *Journal of Financial Economics 102*(1), 28 – 44.

Oppgaver i obligasjoner - Løsningsforslag

R. Øystein Strøm*

1

Prisen B på en nullkupongobligasjon er gitt av:

$$B = \frac{M}{(1+r)^T} \tag{1}$$

M er obligasjonens pålydende, r er investorenes kapitalkostnad eller markedsrenten og T er tid til forfall.

1.1

Tabell 1 Prisen på nullkupongobligasjonene. Pålydende $M = 100$.

Forfall	Rente	Pris
1	5.00	95.24
2	5.50	89.85
3	5.75	84.56
4	5.95	79.36
5	6.05	74.55

1.2

Den risikofrie renten er 6.05%.

2

2.1

Obligasjonen har en kupongrente på 6.00%. Dette gir en årlig kupongutbetaling på

$$\text{Kupongutbetaling} = \text{Kupongrente} \times \text{Pålydende} = 0.06 \times 1000 = 60$$

*Handelshøyskolen ved HiOA

Kontantstrømmen er altså (60;1060).

Vi har altså oppgitt de risikofrie avkastningene til forfall for hvert år. Det riktige er da å diskontere med hver periodes avkastning, dvs. prisformelen blir:

$$B = \frac{K}{1+y_1} + \frac{K+M}{(1+y_2)^2} \tag{2}$$

For toårsobligasjonen har vi dermed:

$$B = \frac{60}{1.040} + \frac{1060}{1.043^2} = 57.69 + 974.40 = 1032.09$$

Obligasjonen handles med en premie, siden $B > M$; prisen er høyere enn pålydende.

2.2

Vi bruker (1) og setter inn:

$$B = \frac{1000}{1.048^5} = 791.03$$

2.3

Vi har altså at kupongutbetalingen blir 40 og at kontantstrømmen dermed blir (40,40,1040). Prisen på obligasjonen er fra (2):

$$B = \frac{40}{1.040} + \frac{40}{1.043^2} + \frac{1040}{1.045^3} = 986.58$$

Avkastningen til forfall y får vi fra relasjonen

$$B = \frac{K}{1+y} + \frac{K}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{K+M}{(1+y)^T} \tag{3}$$

Innsetting i (3) gir direkte:

$$986.58 = \frac{40}{1+y} + \frac{40}{(1+y)^2} + \frac{1040}{(1+y)^3}$$

y er altså definert som internrenten til dette problemet. Prøving og feiling og kalkulator gir $y = 0.0449$. Avkastning til forfall er altså 4.49%.

2.4

Tid til forfall må være ett år. Bare en ettårig nullkupongobligasjon har en avkastning til forfall på 4.00%. Var den lengre, ville der jo være arbitrasjemuligheter.

2.5

Vi har altså at $B = M$. Vi kjenner ikke kupongutbetalingene, men vi har fått opplyst avkastning til forfall frem til år 5. Vi kan dermed bruke (2). Ved innsetting har vi altså:

$$1000 = K\left(\frac{1}{1.040} + \frac{1}{1.043^2} + \frac{1}{1.045^3} + \frac{1}{1.047^4}\right) + \frac{1000}{1.047^4}$$

Denne ligningen har en ukjent, K, og utregningen av dette følger vanlige regler. Den kupongutbetaling som løser dette problemet er 46.76. Kupongrenten er dermed

$$\text{Kupongrente} = \frac{\text{Kupongutbetaling}}{\text{Pålydende}} = \frac{46.76}{1000} = 0.04676$$

dvs. kupongrenten er 4.676%.

2.6

2.6.1

Obligasjonen må handles med premie, dvs. $B > M$. Kupongrenten på 5% er over alle avkastninger til forfall, dvs. obligasjonens avkastning til forfall er en veid sum av alle enkeltperioders avkastning og denne veide summen må bli lavere enn 5.00%.

2.6.2

Vi må kombinere (2) og (3) for å komme frem til avkastningen frem til forfall. Prisrelasjonen (2) gir oss først prisen på obligasjonen:

$$B = \frac{50}{1.04} + \frac{50}{1.043^2} + \frac{50}{1.045^3} + \frac{50}{1.047^4} + \frac{50 + 1000}{1.048^5} = 1010.05$$

Med prisen i hånd kan vi finne avkastningen på obligasjonen fra (3):

$$1010.05 = \frac{50}{1+y} + \frac{50}{(1+y)^2} + \frac{50}{(1+y)^3} + \frac{50}{(1+y)^4} + \frac{50 + 1000}{(1+y)^5}$$

Internrenten til dette problemet er 4.77%.

2.6.3

Avkastning til forfall (ATF) øker altså til 5.2%, og vi skal finne den nye prisen. Vi må oppfatte den nye ATF som markedsrenten, altså investorenes alternative investeringsmulighet. Problemet er da:

$$B = \frac{50}{1.052} + \frac{50}{1.052^2} + \frac{50}{1.052^3} + \frac{50}{1.052^4} + \frac{50 + 1000}{1.052^5} = 991.39$$

Diskonteringsrenten er nå overalt høyere enn de vi opprinnelig brukte. Prisen på obligasjonen faller nå. Siden diskonteringsrenten er høyere enn kupongrenten, vil prisen falle til under pari, dvs. den vil selges med rabatt.

3 Kontinuasjon 2011

3.1

Nåverdien av en risikofri obligasjon med årlige renteutbetalinger er definert i (2). Den høyeste pris jeg ville betale er altså nåverdien av de fremtidige betalingene.

Tabell 2 Utregning av obligasjonens pris

År	KS	Rente-faktor	Nå-verdi
1	5	0.9390	4.69
2	5	0.8817	4.41
3	5	0.8278	4.14
4	5	0.7773	3.89
5	5	0.7299	3.65
5	100	0.7299	72.99
Sum			93.77

KS er obligasjonens kontantstrøm. Rentefaktoren er definert som

$$\text{Rentefaktor} = R = \frac{1}{(1+r)^t} \tag{4}$$

Jeg ville altså betale maksimalt 93.77 for en obligasjon med de kjennetegnene som er gitt i oppgaven.

3.2

Hvis markedsrenten var 5%, ville jeg være villig til å betale 100.00 for obligasjonen. Markedsrente og kupongrente vil nå være like. Den kupongrente som brukes for å skape rentekontantstrømmen i obligasjonen er altså den samme som brukes for å diskontere kontantstrømmen tilbake til dagens verdi. De to utligner hverandre og vi står tilbake med obligasjonens pålydende verdi, 100.00.

4

4.1

Avkastning til forfall y for en nullkupongobligasjon er gitt i (1). Vi kjenner altså M, r, T og kupongrenten, slik at vi kan regne oss frem til prisen B. Vi har for A:

$$B = \frac{100}{1.06^{15}} = 41.73$$

Når avkastningen til forfall faller til 5%, har vi at prisen blir:

$$B = \frac{100}{1.05^{15}} = 48.10$$

Den prosentvise endringen er dermed:

$$\Delta B\% = \frac{48.10 - 41.73}{41.73} \cdot 100 = 15.27$$

En enprosents nedgang i avkastning til forfall innebærer altså en økning i obligasjonens pris på 15.27%. Dette resultatet og de øvrige er vist i tabellen nedenfor:

			Pris		Endring
Obligasjon	Kupongrente	Forfall	$y = 0.06$	$y = 0.05$	i %
A	0	15	41.73	48.10	15.26
B	0	10	55.84	61.39	9.94
C	4% årlig	15	80.58	89.62	11.23
D	8% årlig	10	114.72	123.17	7.36

Vi kan finne prisen på obligasjonene C og D på samme måte som feks. i tabell 2.

4.2

Vi definerer prisfølsomhet eller prissensitivitet som prosentvis endring i obligasjonsprisen av en gitt endring i avkastning til forfall y. Vi ser at prisfølsomheten er større, jo lenger tid det er til forfall og jo lavere kupongrenten er. Eller omvendt: Kort tid til forfall og høy kupongrente er minst påvirket av renteendringer. Obligasjon A er mest prisfølsom og obligasjon D er minst.

Effekten av tid til forfall ser vi av nullkupongobligasjonene. En rentenedgang medfører at betalinger lenger ut i perioden blir mer verdt i dag. Effekten må jo da være større, jo lenger ut i perioden betalingen kommer.

Effekten av rentenedgang på obligasjoner som betaler en kupong er likedan. En høy kupongbetaling i forhold til pålydende betyr at relativt mer av de samlede betalingene fra obligasjonen forfaller tidlig i perioden. En lav kupongutbetaling innebærer at hoveddelen av betalingene skyves ut i perioden. Renteendringene må påvirke de obligasjonene som har relativt mer av sene utbetalinger mer enn de med tidlige.

Oppgaver i obligasjoner

R. Øystein Strøm*

1

Anta at rentekurven for risikofrie nullkupongobligasjoner er i prosent som følger:

	Forfall om				
	1	2	3	4	5
Avkastning (y_t)	5.00	5.50	5.75	5.95	6.05

1. Hva er prisen pr. pålydende 100 på obligasjonene?
2. Hva er den risikofrie renten på en investering med fem års horisont?

2

For oppgavene 2.1 til 2.6 skal følgende opplysninger brukes:

	Forfall om				
	1	2	3	4	5
Avkastning 0-kupong (y_t)	4.00	4.30	4.50	4.70	4.80

2.1

Hva er prisen i dag for en risikofri toårsobligasjon med pålydende 1,000 og kupongrente på 6.00%? Handles denne obligasjonen med rabatt eller med en premie?

2.2

Hva er prisen på en risikofri femårs nullkupongobligasjon med pålydende 1,000?

*Handelshøyskolen ved HiOA

2.3

Hva er prisen på en risikofri, treårsobligasjon med pålydende 1,000 og en årlig kupongrente på 4%? Hva er avkastningen til forfall for denne obligasjonen?

2.4

Hva er tid til forfall for en risikofri eiendel med årlige kupongbetalinger og en avkastning til forfall på 4%? Hvorfor?

2.5

Vurder en risikofri fireårsobligasjon med årlige kupongutbetalinger og med pålydende 1,000 som utstedes til pari verdi, dvs. 1,000. Hva er avkastningen til forfall for denne obligasjonen?

2.6

Anta en risikofri fireårsobligasjon med årlig kupongrente på 5% og pålydende 1,000.

1. Bestem om denne obligasjonen handles med premie eller rabatt uten å gjøre noen beegninger. Forklar.
2. Hva er obligasjonens avkastning til forfall?
3. Anta at avkastningen til forfall på denne obligasjonen øker til 5.20%. Hva er nå den nye prisen?

3 Fra Kontinuasjon 2011

Anta en statsobligasjon A med fem år til forfall har en pålydende verdi på 100.00 og en årlig kupongrente på 5%. Kupongene utbetales årlig. Markedsrenten er 6.5%.

1. Hva er den høyeste pris du ville betale for obligasjonen?
2. Tenk deg at markedsrenten er 5% i stedet. Forklar med egne ord og uten å foreta beregninger hva obligasjonen omsettes for.

4

Fire ulike obligasjoner med årlig kupongutbetaling og forfall i hele år er vist nedenfor. Obligasjonenes pålydende er 100.

Obligasjon	Kupongrente	Forfall
A	0	15
B	0	10
C	4% årlig	15
D	8% årlig	10

1. Hva er den prosentvise endringen i prisen på hver obligasjon hvis dens avkastning til forfall ("YTM" eller y) faller fra 6% to 5%?

2. Hvilken obligasjon er mest følsom for en 1 prosents fall i markedsrenten fra 6% til 5%? Forklar hvorfor. Hvilken obligasjon er minst sensitiv? Gi også en intuitiv forklaring.

Oppgaver i aksjevurdering - Løsninger

R. Øystein Strøm
Handelshøyskolen ved HiOA

15. september 2017

1

Vi bruker sammenhengen

$$\text{Pris} = S_0 = \frac{Div_1 + S_1}{1 + r_E} \tag{1}$$

Her er S_0 aksjekurs i dag, Div_1 er neste års forventede utbytte pr. aksje, og r_E er eiernes kapitalkostnad.

I dette problemet er S_1 den ukjente, dvs. vi har:

$$50 = \frac{2 + S_1}{1.15} \Rightarrow S_1 = 55.50.$$

2

2.1 Direkte avkastning

Direkte avkastning er definert ved:

$$\text{Direkte avkastning} = \frac{Div_1}{S_0} \tag{2}$$

dvs. vi har:

$$\text{Direkte avkastning} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Den direkte avkastning er altså 5%.

2.2 Kursstigning

Kursstigning er definert ved:

$$\text{Kursstigning} = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \tag{3}$$

slik at vi oppnår:

$$\text{Kursstigning} = \frac{22 - 20}{20} = 0.10$$

Kursstigningen er altså 10%.

2.3 Asnys EK-kostnad

EK-kostnader er definert som:

$$\text{EK-kostnad} = r_E = \text{Direkte avkastning} + \text{Kursstigning} \tag{4}$$

som fra tidligere resultater er 15%.

3 Krells EK-kostnad

Vi har altså fra (2) at:

$$\text{Direkte avkastning} = \frac{0.88}{22} = 0.04$$

og fra (3)

$$\text{Kursstigning} = \frac{23.54 - 22.00}{22.00} = 0.070$$

slik at

$$r_E = 0.04 + 0.07 = 0.11$$

EK-kostnaden er altså 11%.

4 Aksjeanalytikeres anbefalinger

4.1

Utbytte pr. aksje og aksjekurs i de ulike selskapene er gitt i oppgaven. Den direkte avkastningen beregnes fra (2), se tabell 1.

4.2

Norges bank publiserer renteopplysninger og valutakurser på sine hjemmesider. Her er valgt en uke i 2011.

4.3

Ut fra opplysningene om direkte avkastning og avkastningen på statsobligasjoner begynner aksjene i solide norske selskaper med høy likviditet å se prisgunstige ut.

Tabell 1 Direkte avkastning (%) i utvalgte selskaper fra OBX-listen 2011.

	Utbytte	Aksje-kurs	Direkte avkastning	Annonsert utbytte
Norsk Hydro	0.75	30.34	2.47	6. mai
Orkla	2.50	48.56	5.15	15. april
Statoil	6.25	126.70	4.93	20. mai
Storebrand	1.10	31.53	3.49	14. april

Tabell 2 Effektiv, syntetisk statsobligasjonsrente. Kilde: Norges Bank

	Tid til forfall		
Dato	3 år	5 år	10 år
12.09.2011	1.29	1.53	2.15
13.09.2011	1.40	1.60	2.23
14.09.2011	1.57	1.79	2.36
15.09.2011	1.65	1.94	2.42
16.09.2011	1.66	1.92	2.37
19.09.2011	1.54	1.80	2.30
20.09.2011	1.56	1.81	2.35
21.09.2011	1.58	1.86	2.36

> "Den syntetiske renten er beregnet ved å vekte to statsobligasjoner med henholdsvis kortere og lengre gjenstående løpetid."

5

Evig, konstant utbytte vurderes etter formelen

$$S_0 = \frac{Div_1}{r_E} \tag{5}$$

dvs. kursen på Nullveksts aksje er:

$$S_0 = \frac{2}{0.15} = 13.33$$

hvis vi forutsetter at utbyttet betales mot slutten av året.

6

Med konstant vekst i utbyttet g er prisen på aksjen

$$S_0 = \frac{Div_1}{r_E - g} \tag{6}$$

Toppsys' aksjekurs er med en gangs utbetaling pr. år:

$$S_0 = \frac{1.50}{0.11 - 0.06} = 30.00$$

7

Når utbyttet har en jevn vekst pr. år, kan det vises at EK-kostnaden kan skrives:

$$r_E = \frac{Div_1}{S_0} + g \tag{7}$$

7.1

I denne oppgaven kjenner vi venstresiden i (7) og den direkte avkastningen. Dermed er g gitt av:

$$0.08 = 0.015 + g \Rightarrow g = 0.065 \qquad \text{eller } 6.5\%.$$

7.2

Veksten i aksjekursen må følge veksten i utbyttet, dvs. 6.5% i året. Vi ser dette også ut fra

$$r_E = \frac{Div_1}{S_0} + \frac{S_1 - S_0}{S_0} \tag{8}$$

g svarer altså til kursstigningen, som fremgår når vi sammenligner (8) med (7).

8

I 2014 ventes aksjekursen å være:

$$S_{2014} = \frac{0.40}{0.11 - 0.05} = 6.67$$

Da bør aksjekursen i 2013 bli:

$$S_{2013} = \frac{6.67}{1.11} = 6.01$$

I denne oppgaven er altså dividenden lik null de to første årene og stiger så til 0.40 i det tredje.

9

Vi definerer EPS = driftsresultat pr. aksje, utbytteandelen som Div/EPS og tilbakeholdsandelen som $1 - Div/EPS$. Anta at IRR er avkastningen på ny investering i BCD.

9.1

Veksten i driftsresultat fremkommer som

$$\begin{aligned} \text{Driftsresultatets vekstrate} &= \frac{\Delta\text{Driftsresultat}}{\text{Driftsresultat}} \\ &= \text{Tilbakeholdsandel} \times IRR \\ &= \left(1 - \frac{Div}{EPS}\right) \times IRR \end{aligned} \tag{9}$$

Innsetting gir direkte:

$$\text{Driftsresultatets vekstrate} = \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times 0.15 = 0.06 \qquad 6\%$$

9.2

Vi bruker (6) og får ved innsetting:

$$S_0 = \frac{3}{0.12 - 0.06} = 50.00$$

9.3

Vi skal altså finne aksjekurs hvis selskapet endrer sin utbyttepolitikk. Tilbakeholdsandelen avtar med andre ord. La oss se. Vi bruker (9) på ny:

$$\text{Driftsresultatets vekstrate} = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times 0.15 = 0.03 \qquad 3\%$$

Med lavere tilbakeholdsandel øker selvsagt andelen utdelt utbytte. Vi ser utbyttet øker til 4. Aksjekursen blir følgelig fra (6):

$$S_0 = \frac{4}{0.12 - 0.03} = 44.44$$

Aksjen blir altså mindre verdt som følge av omleggingen. BCD bør ikke øke utbyttet. Siden avkastningen på ny investering er høyere enn kapitalkostnaden, bør man heller redusere utbyttet.

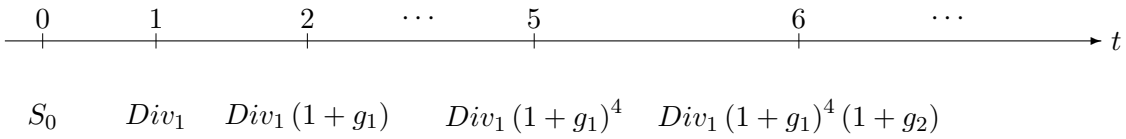
10

Vi har altså en situasjon med to veksthastigheter, g_1 de første fem årene og g_2 deretter i all fremtid.

Fra år 6 venter vi altså en evig kontantstrøm. I år 5 må derfor den fremtidige verdien av disse kontantstrømmene være

$$NV_5\left(Div|g_2\right) = \frac{Div_1\left(1+g_1\right)^4\left(1+g_2\right)}{r_E - g_2} \tag{10}$$

Figur 1 Aksjekursen når veksthastigheten i utbyttet varierer



Problemet kan altså formuleres i prinsippet:

$$\begin{aligned} S_0 =& \frac{Div_1}{1+r_E} + \frac{Div_1(1+g_1)}{(1+r_E)^2} + \frac{Div_1(1+g_1)^2}{(1+r_E)^3} + \frac{Div_1(1+g_1)^3}{(1+r_E)^4} + \frac{Div_1(1+g_1)^4}{(1+r_E)^5} \\ &+ \frac{1}{(1+r_E)^5}\frac{Div_1(1+g_1)^4(1+g_2)}{r_E - g_2} \end{aligned} \tag{11}$$

Innsetting gir oss nå:

$$\begin{aligned} S_0 =& \frac{0.65}{1.08} + \frac{0.65\cdot 1.12}{1.08^2} + \frac{0.65\cdot 1.12^2}{1.08^3} + \frac{0.65\cdot 1.12^3}{1.08^4} + \frac{0.65\cdot 1.12^4}{1.08^5} \\ &+ \frac{1}{1.08^5}\frac{0.65\cdot 1.12^4\cdot 1.02}{0.08-0.02} \\ =& 0.60 + 0.62 + 0.65 + 0.67 + 0.70 + 11.83 \\ =& 15.07 \end{aligned}$$

Litt tungvindt kanskje, men det finnes en formel. (Jeg brukte Excel). Fra Bredesen (2011, side 105) har vi at en endelig vekstrekke av betalinger kan tilnærmes ved formelen

$$NV = Div_1 \frac{(1+r_E)^T - (1+g_1)^T}{(1+r_E)^T \cdot (r_E - g_1)} \tag{12}$$

Vi ser at T i dette tilfellet er år 5. La oss prøve:

$$\begin{aligned} NV_5 =& 0.65 \times \frac{1.08^5 - 1.12^5}{1.08^5\cdot(0.08-0.12)} \\ =& 3.24 \end{aligned}$$

Legger vi til nåverdien fra år 6, kommer vi frem til en pris på Barbex-aksjen på 15.07 igjen.

11

Dette problemet er helt parallelt med det vi hadde i avsnitt 10 bortsett fra at veksten starter allerede fra år 0. La oss ta i bruk den endelige vekstformelen. Verdien av aksjen når veksthastighetene er ulike er dermed:

$$S_0 = Div_0 (1+g_1) \frac{(1+r_E)^T - (1+g_1)^T}{(1+r_E)^T \cdot (r_E - g_1)} + \frac{1}{(1+r_E)^T} \frac{Div_0 (1+g_1)^T (1+g_2)}{r_E - g_2} \quad (13)$$

Igjen er $T = 5$. Innsetting i (13) gir nå:

$$\begin{aligned} S_0 =& 0.96 \cdot 1.11 \cdot \frac{1.085^5 - 1.11^5}{1.085^5 \cdot (0.085 - 0.11)} + \frac{1}{1.085^5} \cdot \frac{0.96 \cdot 1.11^5 \cdot 1.052}{0.085 - 0.052} \\ =& 5.14 + 34.30 = 39.44 \end{aligned}$$

12

Utbyttet neste år er altså Div_1, og dette utbyttet vokser i T år fremover, dvs. til år $T+1$. Vi er tilbake i situasjonen fra Barbex-aksjen, og samler det hele i annuitetsformler:

$$S_0 = Div_1 \frac{(1+r_E)^T - (1+g_1)^T}{(1+r_E)^T \cdot (r_E - g_1)} + \frac{1}{(1+r_E)^T} \frac{Div_1 (1+g_1)^T}{r_E - g_2} \quad (14)$$

Vi kan ordne på denne formelen slik at vi får:

$$S_0 = Div_1 \left(\frac{1+g_1}{1+r_E} \right)^T \left[\left(\left(\frac{1+r_E}{1+g_1} \right)^T - 1 \right) \frac{1}{r_E - g_1} + \frac{1}{r_E - g_2} \right] \quad (15)$$

13

Vi samler foreløpige beregninger i tabell 3.

Tabell 3 Beregning av dividende i Hallsten de første årene. Kapitalkostnad er 10%.

	1	2	3	4	5	6
Driftsresultat						
EPS-vekst	0.250	0.250	0.125	0.125	0.050	
EPS	3.00	3.75	4.69	5.27	5.93	6.23
Utbytter						
Utdelingsforhold	0.00	0.00	0.50	0.50	0.80	0.80
Utbytte	0.00	0.00	2.34	2.64	4.75	4.98

Fra år 5 vokser utbyttet med 5% i året. Nåverdien av dette er i år 4:

$$NV(\text{Uendelig vekst}) = \frac{1}{1.10^4} \cdot \frac{4.75}{0.10 - 0.05} = 95.00$$

Da er prisen for en aksje:

$$S_0 = \frac{2.34}{1.1^3} + \frac{2.64 + 95.00}{1.1^4} = 68.45$$

14

Samlet utbetaling neste år $= 5 \times 1.08 = 5.40$ milliarder.

Veksten forventes å vare ved i overskuelig fremtid. Dermed

$$\text{Egenkapital} = \frac{5.40}{0.12 - 0.08} = 135.00$$

$$S_0 = \frac{135 \text{ mrd}}{6 \text{ mill}} = 22500$$

15

15.1

Veksten fra og med år 5 har altså verdien i år 4:

$$NV = \frac{82}{0.14 - 0.04} = 820.00$$

Selskapsverdien er dermed:

$$V_0 = \frac{53.00}{1.14} + \frac{68.00}{1.14^2} + \frac{78.00}{1.14^3} + \frac{75.00 + 820.00}{1.14^4} = 681.37$$

15.2

$$S_0 = \frac{681.37 - 0 - 300}{40} = 9.53$$

16

Oppgaven handler om hvordan aksjekursen endrer seg som en følge av endring i forutsetningene i beregningen av den frie kontantstrømmen. Med utgangspunkt i resultatene, kunne vi altså laget et stjernediagram.

16.1 Basisalternativet

Vi henter opplysninger fra oppgaveteksten. Nåverdien av fremtidige kontantstrømmer i år 4 er:

$$NV_4 = \frac{41.9}{0.10 - 0.05} = 838.00$$

Verdien i dag er:

$$V_0 = \frac{36.9}{1.1} + \frac{31.5}{1.1^2} + \frac{40.9}{1.1^3} + \frac{41.9 + 838.00}{1.1^4} = 690.7$$

Aksjekursen:

$$S_0 = \frac{690.7 + 40 - 120}{60} = 10.17$$

16.2 Varekostnad endres

Forutsetter vi at bare varekostnaden endrer seg, fremkommer selskapsverdien fra tabell 4.

Tabell 4 Beregning av selskapsverdi

	År				
	0	1	2	3	4
Driftsinntekter	433.0	464.2	509.7	535.1	556.6
Vekst driftsinntekter (%)		7.2	9.8	5.0	4.0
Varekostnad		-324.9	-356.8	-374.6	-389.6
Bruttofortjeneste		139.3	152.9	160.5	167.0
Salg, administrasjon etc.		-90.6	-105.2	-108.4	-112.5
Av- og nedskrivninger		-8.0	-8.5	-10.0	-11.5
Resultat før renter og skatt		40.7	39.2	42.1	43.0
Skattekostnad		-10.2	-9.8	-10.5	-10.7
Av- og nedskrivninger		8.0	8.5	10.0	11.5
Anleggsinvesteringer		-7.0	-10.0	-9.0	-11.5
Økning i arbeidskapital		-6.2	-9.1	-5.1	-4.3
Fri kontantstrøm		25.3	18.8	27.5	27.9

Vi regner ut markedsverdien av selskapet på samme måte som i avsnitt 16.1 ovenfor, noe som gir $V_0 = 460.0$.

Aksjekursen:

$$S_0 = \frac{460.0 + 40 - 120}{60} = 6.33$$

16.3 Salg, administrasjon etc. endres

I denne deloppgaven blir kostnadene til salg etc redusert, se utregninger i tabell 5.

Tabell 5 Beregning av selskapsverdi når Salg, administrasjon etc. er 16%

	År				
	0	1	2	3	4
Driftsinntekter	433.0	464.2	509.7	535.1	556.6
Vekst driftsinntekter (%)		7.2	9.8	5.0	4.0
Varekostnad		-309.5	-339.8	-356.8	-371.0
Bruttofortjeneste		154.7	169.9	178.4	185.5
Salg, administrasjon etc.		-74.3	-81.5	-85.6	-89.0
Av- og nedskrivninger		-8.0	-8.5	-10.0	-11.5
Resultat før renter og skatt		72.5	79.8	82.8	85.0
Skattekostnad		-18.1	-20.0	-20.7	-21.2
Av- og nedskrivninger		8.0	8.5	10.0	11.5
Anleggsinvesteringer		-7.0	-10.0	-9.0	-11.5
Økning i arbeidskapital		-6.2	-9.1	-5.1	-4.3
Fri kontantstrøm		49.1	49.3	58.0	59.4

Vi finner på samme måte som tidligere at $V_0 = 981.6$ og at aksjekursen er:

$$S_0 = \frac{981.6 + 40 - 120}{60} = 15.03$$

16.4 Redusert behov for arbeidskapital

Endring i behovet for arbeidskapital, se tabell 6.

Behovet for arbeidskapital var altså opprinnelig 20% av driftsinntekter og går ned til 12% fra og med år 1. Investeringen i ny arbeidskapital blir dermed i første året:

$$\text{Investering arbeidskapital} = 0.20 \times 433 - 0.20 \times 464.2 = -6.24$$

Deretter er investeringen med den lavere satsen

$$\text{Investering arbeidskapital} = 0.12 \times (433.0 - 464.2) = -3.74.$$

Vi får en viss reduksjon i investering i arbeidskapital og en viss endring i kontantstrøm som en følge. Verdien av selskapet er nå $V_0 = 722.0$ og aksjekursen er:

$$S_0 = \frac{722.0 + 40 - 120}{60} = 10.70$$

Tabell 6 Beregning av selskapsverdi når behovet for arbeidskapital reduseres.

	År				
	0	1	2	3	4
Driftsinntekter	433.0	464.2	509.7	535.1	556.6
Vekst driftsinntekter (%)		7.2	9.8	5.0	4.0
Varekostnad		-309.5	-339.8	-356.8	-371.0
Bruttofortjeneste		154.7	169.9	178.4	185.5
Salg, administrasjon etc.		-90.6	-105.2	-108.4	-112.5
Av- og nedskrivninger		-8.0	-8.5	-10.0	-11.5
Resultat før renter og skatt		56.1	56.2	60.0	61.5
Skattekostnad		-14.0	-14.0	-15.0	-15.4
Av- og nedskrivninger		8.0	8.5	10.0	11.5
Anleggsinvesteringer		-7.0	-10.0	-9.0	-11.5
Økning i arbeidskapital		-3.7	-5.5	-3.1	-2.6
Fri kontantstrøm		39.4	35.2	42.9	43.6

17

17.1

Vi kan finne et anslag på Hydros aksjekurs ut fra:

$$S_0(\text{NHY}) = \overline{P/E} \times EPS_{\text{NHY}} = 9.47 \times 1.60 = 15.15$$

der $\overline{P/E}$ er gjennomsnittlig P/E.

17.2

Vi finner spennvidden ("konfidensintervallet") til aksjekursen:

$$S_0(\text{NHY}) = \min P/E \times EPS_{\text{NHY}} = 4.76 \times 1.60 = 7.62$$

og

$$S_0(\text{NHY}) = \max P/E \times EPS_{\text{NHY}} = 19.77 \times 1.60 = 31.63$$

17.3

I denne oppgaven trenger vi opplysninger om hva den bokføringsmessige verdien av Norsk Hydro er. Den er ikke oppgitt, så vi antar at verdien er 11.50.

Fra gjennomsnittsverdien av P/B-forholdet har vi at:

$$S_0 = \overline{P/B} \times B_{\text{NHY}} = 1.50 \times 11.50 = 17.25$$

Videre har vi at:

$$S_0 = \min P/B \times B_{\text{NHY}} = 0.70 \times 11.50 = 8.05$$

og

$$S_0 = \max P/B \times B_{\text{NHY}} = 3.10 \times 11.50 = 35.65$$

18

18.1

Ny verdi:

$$S_0 = \frac{1.50}{0.11 - 0.03} = 18.75$$

18.2

Jeg regner med at mange andre har innsikt i dividendemodellene og er like flinke på kalkulatoren som meg. Jeg går altså ut fra at markedet er preget av *informasjons-effisiens*. Jeg venter å oppnå 18.75.

19

19.1

Forventet aksjekurs fra dividendemodellen:

$$S_0 = \frac{1.52 \cdot 1.07}{0.08 - 0.07} = 162.64$$

19.2

Aksjekursen er altså 46.00. Det kan tyde på at vekstprognosene er altfor høye. Bruker vi markedsprisen som fasit og løser mhp. vekst i utbyttet, finner vi at:

$$S_0 = 46.00 = \frac{1.52 \cdot (1+g)}{0.08 - g} \Rightarrow \qquad g = 0.0455$$

Markedsprisen er altså konsistent med en vekst i utbyttet på 4.55%.

Referanser

Bredesen, I. (2011). *Investering og finansiering* (4. ed.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Oppgaver i aksjevurdering

R. Øystein Strøm*

1

Evco's aksjekurs er i dag 50 og selskapet vil betale et utbytte på 2 om ett år. Egenkapitalkostnaden er 15%. Hvilken pris kan du regne med å selge for like etter at du har mottatt utbyttet?

2

Anles aksjekurs er 20 og man venter å betale 1 i dividende om ett år. Forventet pris like etter mottatt utbytte er 22.

1. Hva er Anles forventede direkte avkastning?
2. Hva er Anles forventede verdistigning?
3. Hva er Anles EK-kostnad?

3

Prisen på en aksje i Krell er i dag 22. Krell ser for seg et utbytte på 0.88 dette året og man mener at aksjekursen vil stige til 23.54 mot slutten av året. Hva er Krells direkte avkastning og EK-kostnad?

4 Aksjeanalytikeres anbefalinger

Aksjeanalytikere hevder i *Finansavisen* 7. september 2011 at viktige selskaper (såkalte "bluechip") kan være svært billige. Det sies at " ... sammenligner man direkteavkastningen gjennom utbytte til enkelte store selskaper med avkastningen man får ved å kjøpe statsobligasjoner, så begynner ting å se attraktivt ut." "Bluechip"-selskaper skal være Orkla, Statoil, Norsk Hydro og Storebrand. Utbytte og aksjekurs i selskapene fra OBX-listen i 2011 er vist nedenfor.

*Handelshøyskolen ved HiOA

	Utbytte	Aksje-kurs	Annonsert utbytte
Norsk Hydro	0.75	30.34	6. mai
Orkla	2.50	48.56	15. april
Statoil	6.25	126.70	20. mai
Storebrand	1.10	31.53	14. april

1. Finn direkteavkastningen til selskapene på grunnlag av aksjekurs og opplysninger om utbytte gitt ovenfor.

2. Finn avkastningen på en ettårig statsobligasjon på samme tid.

3. Var aksjene billige?

5

Nullvekst AS betaler for tiden et utbytte på 2 hvert år, og det vil fortsette å gjøre det i overskuelig fremtid. Hva er aksjekursen hvis selskapets kapitalkostnad er 15%?

6

Toppsys vil betale et utbytte på 1.50 i år. Anta at utbyttet vil vokse med 6% i året. Hva er aksjekursen hvis EK-kostnaden er 11%?

7

Dørpac har en direkteavkastning på 1.5%. Dets EK-kostnad er 8% og utbyttet er ventet å vokse jevnt hvert år i overskuelig fremtid.

1. Hva er den forventede veksttakten i Dørpacs utbytte?

2. Hva er den forventede veksttakten i Dørpacs aksjekurs?

8

Året er 2013. MKL stoppet utbetaling av dividende dette året og gjenopptar i 2015. I 2015 ventes årets utbytte pr. aksje å være 0.40. Utbetalingen gjøres mot slutten av året, og du venter at utbytte stiger med 5% hvert år deretter. MKLs EK-kostnad er 11%. Hva er MKLs aksjekurs i slutten av 2013?

9

BCD forventer et driftsresultat i år på 5 pr. aksje. Planen er å betale aksjonærene et utbytte på 3. BCD vil beholde 2 av driftsresultatet pr. aksje for å investere i nye

prosjekter med en forventet avkastning på 15% i året. Anta BCD vil opprettholde den samme utbytteandel, tilbakeholdsandel og avkastning på nye investeringer i fremtiden, samtidig som tallet på aksjer holdes konstant.

1. Hva er din spådom om veksttakten i BCDs driftsresultat?

2. Anta at BCDs EK-kostnad er 12%. Hvilken pris vil du anta at BCDs aksjer selges til?

3. Anta at BCD i stedet betaler et utbytte på 4 i år og beholder bare 1 pr. aksje. Hvilken aksjekurs vil du anta gjelder i dag, hvis denne utbytteandel opprettholdes i fremtiden? Bør BCD øke utbytteandelen?

10

Gillette vil betale en årlig dividende på 0.65 ett år fra nå. Finansanalytikere venter at utbyttet vil vokse med 12% i året deretter til det femte året. Deretter vil veksten flate ut til 2% i året. Hva er aksjekursen på Gillette's aksjer hvis dets EK-kostnad er 8%?

11

CP har nettopp betalt årets utbytte på 0.96. Finansanalytikere venter en vekst i driftsresultatet på 11% i året i de neste fem årene. Deretter ventes CPs driftsresultat å vokse like mye som bransjen forøvrig, 5.2% i året. Anta at CP's EK-kostnad er 8.5% og at den direkte avkastningen er konstant. Hvilken pris ville du anta at CPs aksjer selges for?

12

Hva er verdien til et selskap med utbytte Div_1 som vokser i n år (dvs. til år $n+1$) med veksttakt g_1 og deretter med en veksttakt på g_2 for all fremtid når kapitalkostnaden er r?

13

Halliford forventer at driftsresultat pr. aksje er 3 kommende år. Selskapet har planer om å holde tilbake hele driftsresultatet i de neste to årene, deretter vil man holde tilbake 50% i de neste to årene. Etter det vil man holde tilbake 20% av driftsresultatet. Det tilbakeholdte driftsresultatet vil hvert år investeres i nye prosjekter med en forventet avkastning på 25% i året. Den delen av driftsresultatet som ikke holdes tilbake deles ut som utbytte. Anta at tallet på aksjer forblir konstant og at all vekst i driftsresultatet kommer fra investeringer gjort gjennom tilbakeholdt driftsresultat. Hallifords EK-kostnad er 10%. Hvilken pris ville du antyde for en aksje i Halliford?

14

Anta at Cisco ikke betaler utbytte, men bruker 5 milliarder på tilbakekjøp av aksjer siste år. Hvis EK-kostnaden i selskapet er 12% og hvis omfanget av tilbakekjøp ventes å øke med 8% i året, hva er Ciscos markedsverdi? Anta at Ciscos egenkapital er fordelt på 6 millioner aksjer. Hva mener du aksjekursen bør være?

15

Heavy Metal ventes å generere følgende frie kontantstrøm i de neste fem årene:

	År				
	1	2	3	4	5
FCF	53	68	78	75	82

Deretter antar man at de frie kontantstrømmene vil vokse like fort som bransjegjennomsnittet på 4% i året. Heavy Metals veide, gjennomsnittlige kapitalkostnad er 14%.

1. Beregn Heavy Metals selskapsverdi ("enterprise value").

2. Beregn aksjekursen gitt at Heavy Metal ikke har overskuddslikviditet, at gjelden er 300 millioner, og tallet på aksjer i selskapet er 40 millioner.

16

Tallet på aksjer i Sora er 60 millioner, 120 millioner i gjeld, 40 millioner i kontanter og prognose for frie kontantstrømmer de neste fire årene gitt i tabell 1.

1. Anta at Soras driftsinntekter og frie kontantstrømmer ventes å vokse med 5% i året etter år 4. Anta at Soras veide, gjennomsnittlige kapitalkostnad er 10%. Hva er da verdien av Soras aksjer?

2. Soras varekostnad var antatt å være ca. 67% av driftsinntektene. Anta at varekostnaden er 70%. Hva er nå den nye aksjekursen?

3. Ta utgangspunkt i forutsetningene i første deloppgave. Men anta nå at Sora reduserer sine SGA-utgifter fra ca. 20% av driftsinntekter til 16%. Hva er nå beregningen din av aksjekursen?

4. Soras nettobehov for arbeidskapital er beregnet til 16% av driftsinntektene. Sora er nå i stand til å senke dette behovet til 12% fra og med år 1. Hva antar du nå aksjekursen er, *ceteris paribus* (alt annet likt)?

Tabell 1 Prognose for Soras driftsresultat og frie kontantstrømmer i millioner

	År				
	0	1	2	3	4
Driftsinntekter	433.0	468.0	516.0	547.0	574.3
Vekst driftsinntekter (%)		8.1	10.3	6.0	5.0
Varekostnad		-313.6	-345.7	-366.5	-384.8
Bruttofortjeneste		154.4	170.3	180.5	189.5
SGA		-93.6	-103.2	-109.4	-114.9
Av- og nedskrivninger		-7.0	-7.5	-9.0	-9.5
Resultat før renter og skatt		53.8	59.6	62.1	65.1
Skattekostnad		-21.5	-23.8	-24.8	-26.0
Av- og nedskrivninger		7.0	7.5	9.0	9.5
Anleggsinvesteringer		-7.7	-10.0	-9.9	-10.4
Økning i arbeidskapital		-6.3	-8.6	-5.6	-4.9
Fri kontantstrøm		25.3	24.7	30.8	33.3

SGA er Kostnader til salg, generelle poster og administrasjon.

17

Bruk tabell 2 til å besvare spørsmålene nedenfor.

I Norsk Hydro er tallet på utestående aksjer 2069 millioner aksjer. EPS var i 2010 1.60. Bruk disse opplysningene sammen med tabell 2 til å svare på spørsmålene nedenfor.

1. Gi et anslag for Norsk Hydros aksjekurs basert på gjennomsnittlig P/E.
2. Gi et anslag for spennvidden i Norsk Hydros aksjekurs ut fra høyeste og laveste P/E.
3. Gjenta beregningene, denne gangen med pris-/bok-forholdet.

18

Du leser på nettsidene at Toppsys i oppgave 6 har revidert sine vekstutsikter ned og venter nå at utbyttet vil vokse med 3% for alltid.

1. Hva er den nye verdien til en aksje i Toppsys basert på denne informasjonen?
2. Hvilken pris ville du etter all sannsynlighet oppnå hvis du prøvde å selge aksjen like etter at nyheten sprang?

Tabell 2 Nøkkeltall for utvalgte selskaper notert på OBX-listen. Tall fra 1509 2011. Kilder: Oslo Børs og *Dagens Næringsliv*.

Selskap	Kurs	MV	EV	P/E	P/B	EBITDA	EV/ EBITDA
Aker Solutions	62.30	16769.15	18337.18	10.65	1.30	3678.00	4.99
DNO International	5.86	5510.49	5455.43	9.95	2.40	1668.11	3.27
Fred. Olsen Energy	182.20	12073.32	15712.93	5.98	1.60	3537.96	4.44
Frontline	35.39	2755.41	14962.65	-	0.70	1397.79	10.70
Gjensidige Forsikring	60.75	30373.36	37327.00	9.99	1.30	3885.39	9.61
Golden Ocean Group	4.58	2093.01	5119.37	6.06	0.70	651.27	7.86
Kværner	9.65	2595.85	812.40	4.76		944.36	0.86
Marine Harvest	3.13	11207.69	16548.03	5.04	1.00	3850.75	4.30
Norsk Hydro	30.34	61783.48	61687.01	12.84	0.70	16623.10	3.71
Orkla	48.56	49462.50	51814.64	9.88	1.10	6186.00	8.38
Schibsted	134.10	14350.55	15831.19	13.07	2.20	2311.42	6.85
Statoil Fuel & Retail	44.51	13353.00	17529.37	10.22	1.70	3332.00	5.26
Storebrand	31.53	14075.16	29588.14	6.74	0.70	2264.02	13.07
Statoil	126.70	403175.50	433108.00	7.33	1.60	249993.50	1.73
Subsea 7	121.30	41073.60	42077.13	19.77	3.10	5709.06	7.37
Telenor	86.80	138583.46	156112.09	11.14	1.60	29988.00	5.21
Yara International	289.80	83072.95	89615.76	8.12	2.30	15203.10	5.89
Gjennomsnitt	75.15	53076.97	59508.14	9.47	1.50	20660.23	6.09
Maksimum	289.80	403175.50	433108.00	19.77	3.10	249993.50	13.07
Minimum	3.13	2093.01	812.40	4.76	0.70	651.27	0.86

MV er markedsverdi, EV er "enterprise value", P/E er "price/Earnings", P/B er pris-/bok-forholdet (fra siste kvartalsregnskap) og EBITDA er driftsresultat før renter og skattekostnad.

19

I begynnelsen av 2009 hadde CC en aksjekurs på 46. Utbyttet var 1.52, og du forventer at CC øker dette utbyttet med omtrent 7% hvert år i overskuelig fremtid.

1. Anta at CC's kapitalkostnad er 8%. Hvilken aksjekurs ville du forvente basert på ditt estimat for veksten i utbyttet?

2. Gitt CC's aksjekurs, virker ikke dine forutsetninger om en årlig vekst i utbyttet vel høye? Begrunn svaret.

Diversifiseringsoppgaver - Løsningsforslag

1

1.1 Forventet avkastning og standardavvik

Avkastningen r_j er gitt av:

$$r_j = \frac{S_{j1} - S_{j0} + Div_{j1}}{S_{j0}} \tag{1}$$

der

P_{j1}	Prisen på aksje j på tidspunkt 1
P_{j0}	Prisen på aksje j på tidspunkt 0
Div_{j1}	Utbetalt utbytte pr. aksje i periode 1

Vi må først finne avkastningen i de ulike tilstander, deretter finne forventet verdi for hvert prosjekt. Prosjekt A kalles 1 heretter og prosjekt B 2. Vi bruker (1) og finner for Prosjekt 1:

$$r_{1l} = \frac{90 - 100}{100} = -0.1$$

$$r_{1m} = \frac{110 - 100}{100} = 0.1$$

$$r_{1h} = \frac{130 - 100}{100} = 0.3$$

Tilsvarende har vi for Prosjekt 2:

$$r_{2l} = \frac{110 - 100}{100} = 0.1$$

$$r_{2m} = \frac{105 - 100}{100} = 0.05$$

$$r_{2h} = \frac{95 - 100}{100} = -0.05$$

Nå har vi avkastningene i de ulike tilstandene og kan beregne forventet avkastning og standardavvik direkte.

Tabell 1 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 1

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Lav	0.3	-10.0	-3.0	-18.0	324.0	97.2
Middels	0.5	10.0	5.0	2.0	4.0	2.0
Høy	0.2	30.0	6.0	22.0	484.0	96.8
		$E(r_1) =$	8.0		$\sigma_1^2 =$	196.0
					$\sigma_1 =$	14.0

I tabellene til Prosjekt 1 og 2 er

$$\text{Avvik}_l = (\text{Avkastning}_l - \text{Forventet avkastning})$$

eller i symboler

$$\text{Avvik}_l = r_{1l} - E(r_1)$$

for prosjekt 1 og tilsvarende for prosjekt 2. Det gjenstår å understreke at l antyder hvilken tilstand man er i, slik at l tar en av verdiene (Lav, Middels, Høy)

Tabell 2 Forventet avkastning og standardavvik til Prosjekt 2

Tilstand	Sanns.	Utfall	$p \cdot$ Utfall	Avvik	Avvik^2	$p \cdot$ Avv^2
Lav	0.3	10.0	3.0	5.5	30.3	9.1
Middels	0.5	5.0	2.5	0.5	0.3	0.1
Høy	0.2	-5.0	-1.0	-9.5	90.3	18.1
		$E(r_2) =$	4.5		$\sigma_2^2 =$	27.3
					$\sigma_2 =$	5.2

1.2 Risikoreduksjon?

Forventet avkastning av en portefølje bestående av to eiendeler er gitt av

$$E(r_p) = wr_1 + (1-w)r_2 \tag{2}$$

Kan vi oppnå en risikoreduksjon ved å kombinere de to prosjektene? Dette er et spørsmål om porteføljen av de to prosjektenes standardavvik kan reduseres. Porteføljens standardavvik σ_p er

gitt ved:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{3}$$

der w er andelen av investeringen plassert i 1, $(1-w)$ er andelen av investeringen plassert i 2. For å kunne svare på dette, må vi altså vite hva korrelasjonskoeffisienten ρ_{12} er. Vi må gjennom beregning av kovariansen, siden

$$\text{Korrelasjonskoeffisient} = \frac{\text{Kovarians}}{\text{Standardavvik(1)} \times \text{Standardavvik(2)}}$$

eller i symboler

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} \tag{4}$$

Beregningen er vist i Tabell (3).

Tabell 3 Beregning av kovarians mellom Prosjekt 1 og 2

Tilstand	Sanns.	Avv1	Avv2	Prod
Lav	0.3	-18.0	5.5	-29.7
Middels	0.5	2.0	0.5	0.5
Høy	0.2	22.0	-9.5	-41.8
			σ_{12}	-71.0

Vi ser at kovariansen er negativ, dermed vet vi at det er betydelige muligheter for risikoreduksjon. Hvor stor finner vi ved å se på korrelasjonskoeffisienten. Innsetting gir:

$$\rho_{12} = \frac{-71}{14.0 \times 5.2} = -0.975$$

Korrelasjonskoeffisienten viser at de to prosjektene er nær perfekt negativt korrelerte. Nesten all risiko i porteføljen kan dermed fjernes, når vekten investert i prosjekt 1 velges med en slik risikoreduksjon for øyet.

1.3 Ulike korrelasjonskoeffisienter

Vi skal bruke ulike korrelasjonskoeffisienter for å studere virkningene på risikoreduksjon. Porteføljens standardavvik er gitt av (3), og gir for innsetting av $w = 0.25$ følgende verdi når $\rho = -1.0$:

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 + 0.75^2 5.2^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 \cdot (-1.0)} = 0.5$$

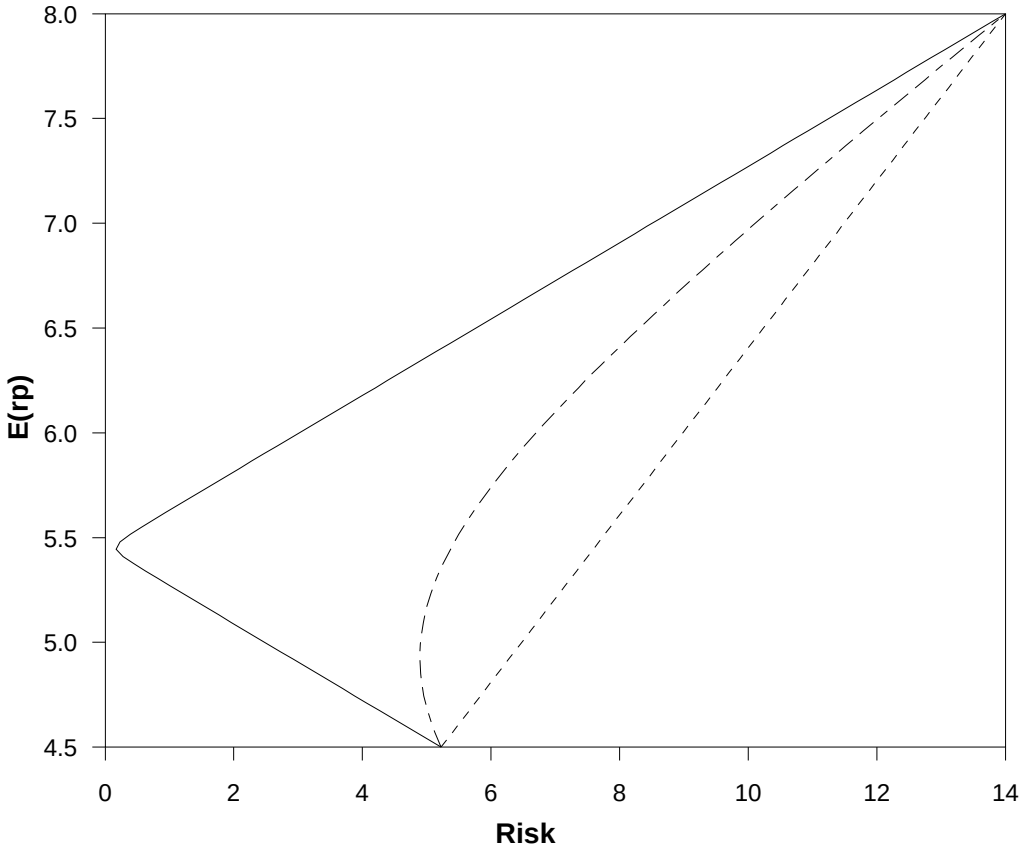
I dette tilfellet er vi altså temmelig nær 0,0 i risiko for porteføljen. For $\rho = 0.0$ har vi tilsvarende

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 + 0.75^2 5.2^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 \cdot (0.0)} = 5.3$$

Vi har nå risikoreduksjon, men adskillig lavere enn for tilfellet med $\rho_{12} = -1.0$. For $\rho = 1.0$ er situasjonen følgende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 + 0.75^2 5.2^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 \cdot (1.0)} = 7.4$$

I det siste tilfellet har vi ingen risikoreduksjon. Se også diagram 1.



Figur 1: Risiko og avkastning i porteføljen av aksje- og obligasjonsfond når korrelasjonskoeffisienten er -1.0. 0.0 eller +1.0

Vi kan også leke oss videre. Siden $\rho = -1.0$, kan vi skrive porteføljens standardavvik

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 14.0^2 - 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 14.0 \cdot 5.2 + 0.75^2 5.2^2}$$

idet vi bare har flyttet på elementene og ganget inn minustegnet. Videre kan dette omformes

til:

$$\sigma_p = \sqrt{(0.25 \cdot 14.0 - 0.75 \cdot 5.2)^2}$$

som er

$$\sigma_p = 0.25 \cdot 14.0 + 0.75 \cdot 5.2$$

Nå vet vi at man med en portefølje av to prosjekter med korrelasjonskoeffisient lik -1.0 kan oppnå full risikoreduksjon, dvs. $\sigma_p = 0$. Fra dette kan vi finne den andel w som gjør dette mulig. Vi setter w i stedet for 0.25, og anser denne for å være en ukjent her. Vi har:

$$\sigma_p = w \cdot 14.0 - (1 - w) \cdot 5.2 = 0$$

Ved å isolere w finner vi

$$w = \frac{5.2}{14.0 + 5.2} = 0.2708$$

Kontrollregning gir at *minimum-varians-porteføljen* virkelig er 0.0. Vi setter inn for $w = 0.2708$:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= 0.2708^2 196 + 0.7292^2 27.3 + 2 \cdot 0.2708 \cdot 0.7292 \cdot (-71.00) \\ &= 0.85\end{aligned}$$

Vi fikk ikke det helt ønskede resultat på $\sigma_p = 0.0$. Årsaken ligger i mindre avrundingsfeil underveis.

2

2.1 Delspørsmål 1

Forventet avkastning får vi ved å formelen for avkastningen i en portefølje med to eiendeler. Ved 10% i A har vi:

$$E(r_p) = 0.10 \cdot 22 + 0.90 \cdot 13 = 13.9\%$$

Ved 25% i A:

$$E(r_p) = 0.25 \cdot 22 + 0.75 \cdot 13 = 15.25\%$$

Ved 50% i A:

$$E\left(r_p\right) = 0.50 \cdot 22 + 0.50 \cdot 13 = 17.5\%$$

Ved 90% i A:

$$E\left(r_p\right) = 0.90 \cdot 22 + 0.10 \cdot 13 = 21.1\%$$

2.2 Delspørsmål 2: Standardavviket til porteføljen

Innsetting i formelen for porteføljens standardavvik gir for $w = 0.1$:

$$\sigma_p = \sqrt{0.10^2 32.0^2 + 0.90^2 23^2 + 2 \cdot 0.10 \cdot 0.90 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 21.26$$

For 25% har vi tilsvarende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.25^2 32.0^2 + 0.75^2 23^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 19.73$$

For 50% har vi tilsvarende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.50^2 32.0^2 + 0.50^2 23^2 + 2 \cdot 0.50 \cdot 0.50 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 20.62$$

For 90% har vi tilsvarende:

$$\sigma_p = \sqrt{0.90^2 32.0^2 + 0.10^2 23^2 + 2 \cdot 0.90 \cdot 0.10 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 29.12$$

2.3 Delspørsmål 3

Prøving og feiling med Excel gir en prosentandel for A på ca. 32.0%. Da er $\sigma_P = 19.53$.

2.4

Innsetting i formelen for minimum-variansporteføljen gir:

$$w = \frac{23^2 - 32 \cdot 23 \cdot 0,1}{32^2 + 23^2 - 2 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 0.3239$$

eller 32.39%. Porteføljens standardavvik er med denne vekten plassert i aksjer:

$$\sigma_p = \sqrt{0.3239^2 32.0^2 + 0.6761^2 23^2 + 2 \cdot 0.3239 \cdot 0.6761 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.1} = 19.53$$

som stemmer bra med det vi har funnet ved hjelp av Excel.

2.5

I dette tilfellet kjenner vi altså porteføljens avkastning. Vi bruker altså bare ligningen for avkastning på porteføljen, dvs. ved innsetting

$$E\left(r_p\right) = w22 + (1 - w)13 = 15.00$$

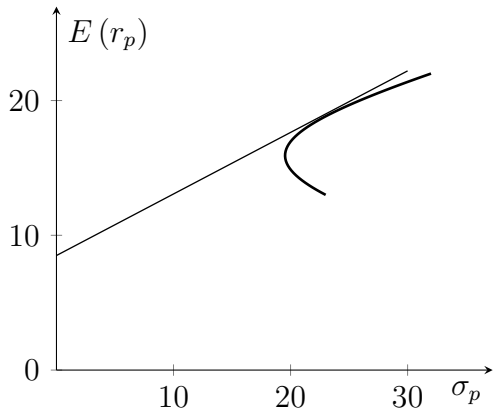
Dette er en ligning med en ukjent. Ordning gir:

$$9w = 2 \qquad w = 0.2222$$

eller 22.22%.

2.6 Risikofri og risikable eiendeler

Figur 2 viser porteføljefronten for portefølje AO sammen med den rette linjen som starter i $r_f = 8.5$.



Figur 2: Porteføljefronten kombinert med den risikofrie renten

Den risikofri rente kombineres med porteføljen AO. Det gir en rett linje fra $r_f = 8.5$ og opp til tangenten til effisiensgrensen for AO.

3

Først må de to minimum variansporteføljene finnes. Vi bruker formelen fra oppgaven. Bare korrelasjonskoeffisienten endres i forhold til den opprinnelige beregningen, altså har vi, når $\rho_{AO} = 0,75$:

$$w = \frac{23^2 - 32 \cdot 23 \cdot 0.75}{32^2 + 23^2 - 2 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 0.75} = -0.0512$$

En negativ vekt innebærer at man skal "shorte" vedkommende eiendel. Å shorte innebærer at man selger et verdipapir man ikke eier, eller at man låner et verdipapir, selger det men samtidig lover å returnere verdipapiret. For vårt formål innebærer en negativ vekt at den laveste varians porteføljen kan oppnå er variansen til det verdipapiret som har lavest varians.

Når korrelasjonskoeffisienten er lik -0.75, har vi:

$$w = \frac{23^2 - 32 \cdot 23 \cdot (-0.75)}{32^2 + 23^2 - 2 \cdot 32 \cdot 23 \cdot (-0.75)} = 0.4068$$

Porteføljens standardavvik er nå $\sigma_p = 9.4$.

4

I tilfellet med $N = 3$ har vi at avkastningen i porteføljen er:

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 \tag{5}$$

Formelen for porteføljens standardavvik er ennå håndterbar:

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}} \tag{6}$$

Legg merke til at vi har tre varianser, men seks kovarianser. Vi kan stille opp korrelasjonsmatrisen for korrelasjonene mellom eiendelene, slik som nedenfor:

	1	2	3
1	1.0	-0.6	-0.6
2	-0.6	1.0	0.2
3	-0.6	0.2	1.0

Hadde vi brukt varianser og kovarianser, ville vi fått den såkalte varians-kovariansmatrisen.

Vi kan nå finne svar på spørsmålene ved å sette inn i (5) og (6). Når porteføljen er likeveid, er altså $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$. Avkastningen er i dette tilfellet:

$$\frac{1}{3}(6.3 + 11.0 + 9.30) = \underline{8.87}$$

Porteføljens risiko blir:

$$\sigma_p^2 = \left\{ \begin{array}{rrll} (1/3)^2 (2.2^2 + 6.2^2 + 3.9^2) = & 6.50 & \sigma_1^2.\sigma_2^2.\sigma_3^2 & \text{Variansene} \\ +2 \cdot (1/3)^2 (2.2 \cdot 6.2 \cdot (-0.569)) = & -0.86 & 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \text{Kovarians 1.2} \\ +2 \cdot (1/3)^2 (2.2 \cdot 3.9 \cdot (-0.6)) = & -0.57 & 2\sigma_1\sigma_3\rho_{13} & \text{Kovarians 1.3} \\ +2 \cdot (1/3)^2 (6.2 \cdot 3.9 \cdot 0.2) = & \underline{0.54} & 2\sigma_2\sigma_3\rho_{23} & \text{Kovarians 2.3} \\ = & 5.64 & & \end{array} \right.$$

Dermed er

$$\sigma_p = \sqrt{5.64} = \underline{2.37}$$

Hva blir avkastning og porteføljerisiko hvis vektene er $w_1 = 0.4, w_2 = 0.2, w_3 = 0.4$? Igjen brukes (5) og (6). Avkastningen blir denne gangen:

$$E(r_p) = 0.4 \cdot 6.3 + 0.2 \cdot 11.0 + 0.4 \cdot 9.3 = \underline{8.44}$$

Porteføljens risiko kan vi finne på samme måte som for den likeveide porteføljen, dvs. vi har:

$$\sigma_p^2 = \left\{ \begin{array}{rrll} 0.4^2 4.84 + 0.2^2 38.44 + 0.4^2 15.21 = & 4.75 & \sigma_1.\sigma_2.\sigma_3 & \text{Variansene} \\ +2 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 2.2 \cdot 6.2 \cdot (-0.569) = & -1.24 & 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \text{Kovarians 1.2} \\ +2 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 2.2 \cdot 3.9 \cdot (-0.6) = & -1.65 & 2\sigma_1\sigma_3\rho_{13} & \text{Kovarians 1.3} \\ +2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \cdot 6.2 \cdot 3.9 \cdot 0.2 = & \underline{0.77} & 2\sigma_2\sigma_3\rho_{23} & \text{Kovarians 2.3} \\ = & 2.63 & & \end{array} \right.$$

Dermed er

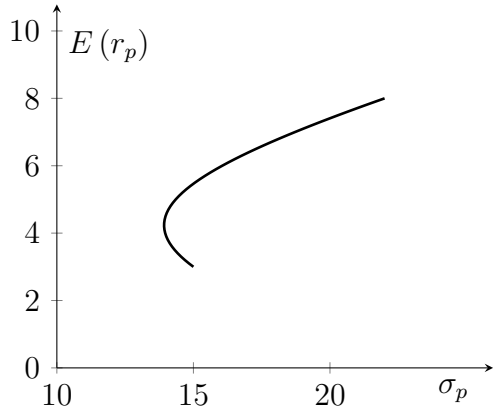
$$\sigma_p = \sqrt{2.63} = \underline{1.62}$$

Porteføljerisikoen er nå sterkt redusert i forhold til den likeveide, fordi andelen av det mest risikable verdipapiret har blitt redusert.

5

5.1 Porteføljefronten

Porteføljefronten er definert som kombinasjonene av avkastning og risiko etter hvert som vektene endres. Vi bruker definisjonene av forventning og risiko til porteføljen og finner at fronten er som i figur 3.



Figur 3: Porteføljefronten for eksemplet

5.2 Minimum-variansporteføljen

Vi kjenner formelen for minimum-variansporteføljen MVP. Innsetting gir:

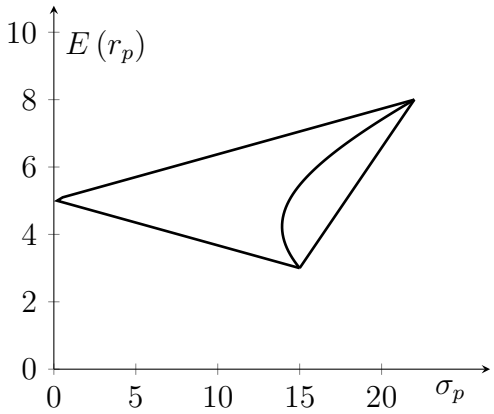
$$w_{MVP} = \frac{22^2 - 15.00 \cdot 22.00 \cdot 0.30}{15.00^2 + 22.00^2 - 2 \cdot 15.00 \cdot 22.00 \cdot 0.30} = 0.7534$$

Bruker vi denne vekten i formelen for porteføljerisiko, finner vi at $\sigma_p = 13.93$. Avkastningen er $E(r_p) = 4.23$.

5.3 MVP når korrelasjonen endres

Oppgaven inviterer til å se på spesialtilfellene når korrelasjonen er minus 1 eller pluss en. Med korrelasjon $\rho_{12} = -1.0$ vet vi at porteføljerisikoen kan senkes til null, når vektene er valgt etter formelen for MVP. Figur 4 bekrefter dette.

Den buede kurven er tilfellet med $\rho = 0.30$, de to rette kurvene til venstre er $\rho = -1.00$ og den rette linjen til høyre er $\rho = 1.00$.



Figur 4: Porteføljefronten når korrelasjonen mellom aksjene varieres

5.4 Porteføljerisiko med ønsket avkastning

Vi ønsker en avkastning i porteføljen på $E(r_p) = 5.25$. Vi skal finne den vekten som tilsvarer dette. Vi finner:

$$E(r_p) = 3w + (1 - w)8 = 5.25$$

Vi ser dette er et enkelt problem med en ukjent, w. Vi finner at $w = 0.55$. Denne vekten inngår i formelen for porteføljerisiko som dermed blir:

$$\sigma_p = 0.55^2 15^2 + 0.45^2 22^2 + 2 \cdot 0.55 \cdot 0.45 \cdot 15 \cdot 22 \cdot 0.30 = 14.67$$

Vi finner at porteføljerisikoen er 14.67 ved dette kravet til avkastning.

6 Orkla og Statoil

6.1 Avkastningene i selskapene

Vi har brukt formelen oppgitt i oppgaven og får avkastningene nedenfor.

År	Orkla	Statoil	dork	dstl
2005	52	155		
2006	70.6	165.25	35.77	6.61
2007	105.25	169	49.08	2.27
2008	45.45	113.9	-56.82	-32.60
2009	57.65	146.5	26.84	28.62
2010	56.7	138.6	-1.65	-5.39
2011	44.65	153.5	-21.25	10.75
2012	48.5	139	8.62	-9.45
2013	47.32	147	-2.43	5.76
2014	51.15	131.2	8.09	-10.75
2015	70.1	123.7	37.05	-5.72
2016	65.8	134.4	-6.13	8.65
Sum			77.17	-1.25

6.2 Gjennomsnitt etc.

Vi bruker R for avkastningen i en periode for virkelige, empiriske avkastninger. Likedan brukes Std for risikoen over flere perioder. Da er den empiriske avkastningen og risikoen definert ved:

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t; \qquad Std = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \bar{R}\right)^2} \tag{7}$$

Kovariansen er definert som

$$Kov = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_{it} - \bar{R}_i\right)\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right) \tag{8}$$

Vi kan nå beregne avkastninger, risiko og kovarians og korrelasjon ut fra formlene (7) og (8). Først setter vi oppp alle avvikskolonnene og finner deres sum, deretter beregner vi de statistiske verdiene. Vi har at avviket fra gjennomsnittet for et år t er definert som: $Avvik_t = R_{it} - \bar{R}_i$.

År	Orkla Avkastninger	Statoil Avkastninger	Orkla Avviko	Statoil Avviks	Avviko ×Avviks	Orkla Avvik2	Statoil Avvik2
2006	35.77	6.61	28.75	6.73	193.41	826.77	45.24
2007	49.08	2.27	42.06	2.38	100.23	1769.36	5.68
2008	-56.82	-32.60	-63.83	-32.49	2073.93	4074.61	1055.61
2009	26.84	28.62	19.83	28.74	569.73	393.11	825.70
2010	-1.65	-5.39	-8.66	-5.28	45.74	75.06	27.87
2011	-21.25	10.75	-28.27	10.86	-307.09	799.07	118.02
2012	8.62	-9.45	1.61	-9.33	-15.00	2.58	87.10
2013	-2.43	5.76	-9.45	5.87	-55.45	89.28	34.44
2014	8.09	-10.75	1.08	-10.63	-11.47	1.16	113.10
2015	37.05	-5.72	30.03	-5.60	-168.27	901.94	31.39
2016	-6.13	8.65	-13.15	8.76	-115.24	172.91	76.80
Sum	77.17	-1.25			2310.51	9105.85	2420.96

Vi kan nå beregne de statistiske størrelsene vi trenger idet vi ser at $T - 1 = 11 - 1 = 10$ i dette tilfellet.

	Orkla	Statoil
Gjennomsnitt	7.02	-0.11
Varians	910.59	242.10
Standardavvik	30.18	15.56
Kovarians	231.05	
Korrelasjon	0.49	

Tallene viser at vi har vært gjennom en turbulent periode, først med finanskrisen i 2008 og så det store fallet i petroleumspriser fra 2014. Avkastningen er relativt lav og volatiliteten er relativt høy. Korrelasjonen i avkastningen er kanskje (?) overraskende høy, $Korr = 0.49$. En sammensatt portefølje av de to vil ikke gi stor risikoreduksjon.

6.3 Portefølje Orkla og Statoil

Vi har at avkastningen i porteføljen med to aksjer er

$$R_p = w \cdot \bar{R}_1 + (1 - w) \cdot \bar{R}_2. \tag{9}$$

Porteføljens risiko er

$$Std_p = \left(w^2 \cdot Var_1 + (1-w)^2 Var_2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot Kov_{12}\right)^{0.5} \tag{10}$$

Vi setter inn når $w = 0.25$ og får:

$$R_p = 0.25 \cdot 7.02 + 0.75 \cdot (-0.11) = 1.67.$$

6.4 Minimum-variansporteføljen

MVP skrives nå:

$$w_{mvp} = \frac{Var_2 - Kov_{12}}{Var_1 + Var_2 - Kov_{12}} \tag{11}$$

Innsetting:

$$w_{mvp} = \frac{242.10 - 231.05}{910.59 + 242.10 - 2 \cdot 231.05} = 0.02.$$

For å finne minimum-variansporteføljen, må vi altså sette mesteparten av pengene i Statoil.

7 Aksjene A og B

7.1

7.2 Avkastning, risiko og samvariasjon

Vi følger samme prosedyre som i oppgave 6 og finner følgende statistikkverdier:

	Aksje A	Aksje B
Gjennomsnitt	4.20	14.40
Varians	112.89	251.71
Standardavvik	10.62	15.87
Kovarians	12.42	
Korrelasjon	0.07	

7.3 En likeveid portefølje

Avkastningen for en likeveid porteføljе for hvert år, gjennomsnittet og risikoen vises nedenfor. For hvert år legges avkstningen i Aksje 1 sammen med avkastningen i Aksje 2 og summen deles på to.

År	Aksje A	Aksje B	Like-veid	Avvik2
2007	-10.00	21.00	5.50	14.44
2008	20.00	7.00	13.50	17.64
2009	5.00	30.00	17.50	67.24
2010	-5.00	-3.00	-4.00	176.89
2011	2.00	-8.00	-3.00	151.29
2012	9.00	25.00	17.00	59.29
Sum	21.00	72.00	46.50	486.79
Gjennomsnitt	4.20	14.40	9.30	
Varians	112.89	251.71		97.36
Standardavvik	10.62	15.87		9.87

En likeveid portefølje

Vi trenger bare å finne risikoen til en likeveid porteføljе av aksjene A og B og sammenligne resultatet med risikoen i tabellen over. Vi bruker (10) og setter inn tall:

$$\begin{aligned} Std &= \left(0.5^2 112.89 + 0.5^2 251.71 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 12.42\right)^{0.5} \\ &= 0.5(112.89 + 251.71 + 2 \cdot 12.42)^{0.5} = 9.87. \end{aligned}$$

Dette er det samme resultat som vi fant i tabellen i deloppgave 7.3.

En skjevt veid porteføljе

Vi har nå en oppskrift på hvordan vi kan beregne porteføljerisikoen på to forskjellige måter når vi har to aksjer i porteføljen. Vi kan bruke utregning med formelen for porteføljerisikoen (10), eller vi kan bruke fremgangsmåten fra deloppgave 7.3. Vi presenterer tabellresultater først, der Aksje A har vekten 70%.

År	Aksje A	Aksje B	Skjevt veid	Avvik2
2007	-10.00	21.00	-0.70	63.36
2008	20.00	7.00	16.10	78.15
2009	5.00	30.00	12.50	27.46
2010	-5.00	-3.00	-4.40	135.96
2011	2.00	-8.00	-1.00	68.23
2012	9.00	25.00	13.80	42.77
Sum	21.00	72.00	36.30	415.92
Gjennomsnitt	4.20	14.40	7.26	
Varians	112.89	251.71		83.18
Standardavvik	10.62	15.87		9.12

En kontroll med (10) viser at:

$$\begin{aligned} Std_p &= \left(0.7^2 112.89 + 0.3^2 251.71 + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3 \cdot 12.42\right)^{0.5} \\ &= (55.32 + 22.65 + 5.22)^{0.5} = 9.12. \end{aligned}$$

Igjen ser vi at vi får samme resultat.

Minimumvariansporteføljen

Vi finner minimumvariansporteføljen fra (11). Innsetting gir oss:

$$w_{mvp} = \frac{251.71 - 12.42}{112.89 + 251.71 - 2 \cdot 12.42} = 0.7043.$$

Vi var temmelig nær minimum-variansporteføljen i forrige delopppgave.

8 Novo og Geri

8.1 Avkastning og volatilitet i en likeveid portefølje

Porteføljens avkastning er gitt av

$$E\left(r_P\right) = w \cdot E\left(r_1\right) + (1 - w) \cdot E\left(r_2\right) \tag{12}$$

i det generelle tilfellet når porteføljen består av to eiendeler. Her er w porteføljeandelen i Novo og $(1-w)$ er andelen i Geri. Innsetting i (12) gir:

$$E\left(r_p\right) = 0.5(10+7) = \underline{8.5}$$

Porteføljens standardavvik følger av (3). Siden vi bruker forventede verdier i denne oppgaven, bruker vi forventningssymboler. Vi finner ved innsetting:

$$\sigma_p = 0.5\sqrt{20^2 + 16^2 + 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 0.22} = 0.5\sqrt{796.8} = \underline{14.11}$$

8.2 Korrelasjonen øker

Korrelasjonen er i dag $\rho_{N,G} = 0.22$.

(a) En økning har ingenting å si for avkastningen. Grunnen er at korrelasjonen ikke har noe med avkastningen til porteføljen å gjøre, se (2).

(b) Når korrelasjonen øker, vil volatiliteten i porteføljen øke. Det går frem av (3).

Kombinasjon av kort og lang posisjon

I dette tilfellet skal vi altså investere 10,000 i Novo og 2,000 i Geri. Samlet investering er dermed $10,000 - 2,000 = 8,000$. Porteføljevektene er nå:

$$w = \frac{10,000}{8,000} = 1.25; \qquad 1 - w = \frac{-2,000}{8,000} = -0.25.$$

Forventet avkastning er idet vi bruker (2):

$$E\left(r_p\right) = 1.25 \cdot 10 - 0.25 \cdot 7 = \underline{10.75}$$

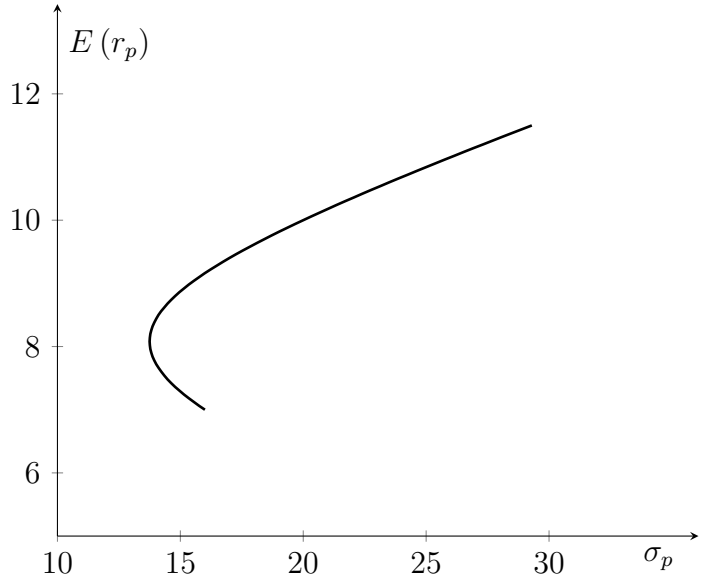
Porteføljens volatilitet har vi fra (3):

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{1.25^2 20^2 +(-0.25)^2 16^2 + 2 \cdot 1.25 \cdot (-0.25) \cdot 20 \cdot 16 \cdot 0.22} \\ &= \sqrt{425 - 44} = \underline{24.43}\end{aligned}$$

Denne strategien fører altså med seg en høyere avkastning, men også en høyere volatilitet. Grunnen til dette er at den bedriftsspesifikke risikoen i Novo øker mye, dvs. leddet $1.25^2 20^2$ i porteføljen.

Mange porteføljevarianter

(a) Vi skal variere porteføljevektene og lage et diagram over porteføljefronten hvor Novo og Geri inngår. Figur 5 viser hvor fronten plasserer seg i avkastnings-risiko-rommet når w varieres fra $w = 0.00$ til $w = 1.50$.



Figur 5: Fronten for Novo og Geri når w varieres fra 0.0 til 1.50

Vi ser av figuren at avkastningen i porteføljen øker med en strategi som plasserer mer i Novo. Prisen for dette er at risikoen øker betydelig etter hvert som w økes over 1.0. En belånt portefølje er mer risikabel enn en fullt ut EK-finansiert portefølje.

(b) Figuren viser hvor MVP befinner seg. Vi finner også MVP analytisk fra

$$w_{mvp} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \tag{13}$$

Innsetting:

$$w_{min} = \frac{256 - 20 \cdot 16 \cdot 0.22}{400 + 256 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 0.22} = \underline{0.36}.$$

Når $w = 0.36$, er porteføljens avkastning $E(r_p) = 8.08$ og volatiliteten er $\sigma_p = 13.75$.

(c) De effisiente porteføljene er definert som alle porteføljer hvor man ikke kan oppnå lavere risiko for en gitt avkastning, eller en høyere avkastning for en gitt volatilitet. Disse strekker seg fra MVP og opp til høyre i figur 5.

9 To aksjer, korrelasjon lik 1.0

Avkastningene i de to aksjene følger hverandre konsekvent. Når den ene har avkastning over gjennomsnittet av aksjer, må også den andre ha det.

10 Gode og Haab

Vi skal se på en situasjon der aksjer i selskapene Gode og Haab har ulike korrelasjoner, men lik volatilitet. Vi kan bruke (3) for å studere dette spørsmålet når vi setter inn verdiene fra oppgaven. Vi får i første omgang at

$$\sigma_p = \left(0.5^2 40^2 + 0.5^2 40^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 40 \cdot 40 \cdot \rho_{12}\right)^{0.5}$$

som i første omgang leder til:

$$\sigma_p = 0.5 \cdot 40 \sqrt{1 + 1 + 2\rho_{12}}$$

Da har vi resultatene:

a) $\rho_{12} = 1.0$**.** Nå har vi at $\sigma_p = 0.5 \cdot 40\sqrt{1 + 1 + 2 \cdot 1} = 40$, som betyr ingen risikoreduksjon.
b) $\rho_{12} = 0.5$**.** $\sigma_p = 34.64$, en viss risikoreduksjon.
c) $\rho_{12} = 0.0$**.** $\sigma_p = 28.28$, en stor risikoreduksjon.
d) $\rho_{12} = -0.5$**.** $\sigma_p = 20.00$, risikoen er halvert.
e) $\rho_{12} = -1.0$**.** $\sigma_p = 0.00$, dvs. full risikoreduksjon.

Volatiliteten er altså lavere for alle korrelasjoner lavere enn 1.0, $\rho_{12} < 1.0$.

11 Arne og Nils

Vi vet at når $\rho_{12} = -1.0$, kan vi få en porteføljerisiko $\sigma_p = 0.0$. Vi bruker opplysningene fra oppgaven og setter inn i (3).

$$\sigma_p = \left(w^2 50^2 + (1-w)^2 25^2 - 2 \cdot w(1-w)50 \cdot 25 \cdot 1\right)^{0.5} = 0.0$$

Vi ser at uttrykket inne i parentesen kan omformes slik at vi får:

$$\sigma_p = \left[(w50 - (1-w)25)^2\right]^{0.5} = 0.0$$

Dette resulterer i

$$\sigma_p = w50 - (1-w)25 = 0.0$$

og

$$w_{mvp} = \frac{25}{75} = 1/3.$$

12 Tex og Mex

12.1 Risiko som Tex

Korrelasjonen er altså nå $\rho_{12} = 0$. Porteføljevariansen kan nå skrives med opplysningene fra oppgaven:

$$\sigma_p^2 = w^2 40^2 + (1-w)^2 20^2 + 2 \cdot w(1-w)40 \cdot 20 \cdot 0.0 = 40^2$$

som jo er lik:

$$\sigma_p^2 = w^2 1600 + (1-w)^2 400 = 1600$$

Vi deler på begge sider med 400 og løser opp parentesen. Det gir den kvadratiske funksjonen

$$\sigma_p^2 = 5w^2 - 2w - 3 = 0$$

slik at w er gitt av:

$$w = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm 8.00}{8.00}$$

Hvis vi antar at $w \leq 1.0$, betyr det at telleren må være positiv, slik at

$$w = \frac{6}{8} = 0.75.$$

Vi må altså ha 75% av porteføljen plassert i Tex for at porteføljens volatilitet skal være den samme som i Tex.

12.2 Minimum risiko

Generelt er porteføljens varians når $\rho_{12} = 0.0$ lik

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 \tag{14}$$

Minimering av (14) innebærer at vi skal derivere uttrykket mhp. w og sette resultatet lik null:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w} &= 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 = 0\\ &= w\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + w\sigma_2^2 = 0\end{aligned}$$

som gir

$$w_{mvp} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{15}$$

Vi kan bruke dette siste resultatet til å finne at

$$w_{mvp} = \frac{400}{400 + 1600} = 0.25$$

Den laveste porteføljerisikoen får vi altså når $w = 0.25$.

13 Mange aksjer

13.1 Risiko i likeveid portefølje

Vi kan bruke at

$$Var_p = \overline{Kovar}_{ij} + \frac{1}{N}\left(\overline{Var} - \overline{Kovar}_{ij}\right) \tag{16}$$

der streken over uttrykker viser at dette er gjennomsnittsverdier. Vi ser at

$$\overline{Kovar}_{ij} = \overline{Std}_i\overline{Std}_j Korr_{ij} \tag{17}$$

som gir $\overline{Kovar}_{ij} = 50{\cdot}50{\cdot}0.20 = 500$. Når porteføljen inneholder en aksje, er porteføljevariansen:

$$Var_p = 500 + \frac{1}{1}\left(50^2 - 500\right) = 2,500; \qquad Std_p = 50$$

30 aksjer innebærer:

$$Var_p = 500 + \frac{1}{30}\left(50^2 - 500\right) = 566.67; \qquad Std_p = 23.80$$

og med 1,000 aksjer:

$$Var_p = 500 + \frac{1}{1000}\left(50^2 - 500\right) = 502.00; \qquad Std_p = 22.41$$

13.2 Risiko i likeveid portefølje

Vi vet at porteføljevariansen vil nærme seg den gjennomsnittlige kovariansen i porteføljen når porteføljen er likeveid, ifølge 16. Vi kan benytte (17) til å finne kovariansen: $Kovar_{ij} = 50^2 0.40 = 1000$. Volatiliteten er dermed $Std_p = 31.62$.

13.3 Delta, Gamma og Omega

a) Den høyest mulige volatiliten må være et veid gjennomsnitt av de tre volatilitetene:

$$\sigma_P = 0.50 \cdot 60 + 0.25 \cdot 30 + 0.25 \cdot 20 = 42.5\%.$$

b) Hvis resultatet i **??** faktisk finner sted, må korrelasjonen mellom Delta, Gamma og Omega være 1.0, dvs. det ville ikke være mulig å oppnå en diversifiseringsgevinst.

Diversifiseringsoppgaver

1

Et firma vurderer to ettårige prosjekter som i dag vil kreve en investering på 100. Firmaet kan anvende hele eller deler av hvert prosjekt. Opplysninger om prosjektene er gitt i tabell 1.

Tabell 1 Prosjektverdi gitt tilstand i økonomien

Tilstand	Prosjekt A	Prosjekt B
Lavkonjunktur	90	110
Middels god konjunktur	110	105
Høykonjunktur	130	95

Et uavhengig forskningsinstitutt har beregnet sannsynligheten (uttrykt i prosent) for en lavkonjunktur for å være 30% og for middels gode konjunkturer til å være 50%.

1. Hva er forventet avkastning og standardavvik på de to prosjektene?
2. Vil firmaet oppnå en risikoreduksjon ved å kombinere disse to prosjektene?
3. Anta at korrelasjonskoeffisienten mellom Prosjekt A og Prosjekt B er enten -1.0, 0.0 eller +1.0. Bruk for øvrig opplysningene fra første spørsmål. Vis i et diagram hvordan risikoen for en kombinasjon av A og B varierer med den andel som bedriften velger for A og B.
4. Vis hvordan du kommer frem til minimum-variansporteføljen (MVP) i det generelle tilfellet.
5. Vis hva MVP er når korrelasjonskoeffisienten er enten $-1.0; 0.0$ eller $+1.0$. Bruk formlene til å beregne MVP for oppgaven.

2

Anta at du kan investere i et aksjefond eller et obligasjonsfond. Aksjefondet (A) har en forventet avkastning på 22% og et standardavvik på 32%, mens obligasjonsfondet (O)

har en avkastning på 13% og et standardavvik på 23%. Anta også at den risikofrie renten på statsobligasjoner er 8.5%. Korrelasjonen mellom de to fondene er 0.10. Anta videre at du har et investeringsbudsjett på 1 million kroner.

1. Hva er forventet avkastning av porteføljen av de to fond hvis andelen investert i A er 10, 25, 50 eller 90%?
2. Hva er standardavviket til porteføljen for de samme prosentandelene?
3. Finn den porteføljevekt i A som gir det laveste standardavvik for porteføljen ved hjelp av Excel.
4. Sjekk at svaret i forrige spørsmål stemmer med løsningen for "minimum-varians-porteføljen":

$$w = \frac{\sigma_O^2 - \sigma_{AO}}{\sigma_A^2 + \sigma_O^2 - 2\sigma_{AO}} \tag{1}$$

5. Anta du har et krav til avkastning på 15%. Hvilke andeler i porteføljen måtte velges? Hva ville porteføljens standardavvik være?
6. Bruk den risikofrie renten. Tegn den inn i diagrammet og finn den optimale porteføljen. Hvilken porteføljevekt svarer dette til for A?

3

Anta vi har de samme data som i forrige oppgave, men at korrelasjonskoeffisienten kan nå være enten 0.75 eller -0.75.

1. Hva er nå standardavviket til "minimum-varians-porteføljen"?

4 For spesielt interesserte

Du skal sette sammen en portefølje av tre prosjekter, eller eiendeler, med tanke på risikominimering. Tilstandene i økonomien og tilhørende forventede avkastninger i tilstandene for prosjekt 1 og 2 ventes å være som vist i tabell 2.

Et tredje prosjekt har forventet avkastning på 9.3 og standardavvik på 3.9. Korrelasjonen med prosjekt 1 er -0.6 og med prosjekt 2 0.2. Hva er avkastning og standardavvik for porteføljen hvis den er likeveid? Hva er avkastning og standardavvik for porteføljen hvis 40% settes i prosjekt 1, 20% i prosjekt 2 og 40% i prosjekt 3?

Tabell 2 Grunnlagsdata for prosjektene 1 og 2

Tilstand	Sanns	Prosjekt 1	Prosjekt 2
1	0.5	8	5
2	0.3	3	15
3	0.2	7	20
$E(r_i)$		6.3	11.0
σ_i		2.2	6.2
σ_{12}		-7.8	

5

To aksjer har følgende karakteristika:

	Aksje 1	Aksje 2
Forventet avkastning	3.00	8.00
Risiko	15.00	22.00
Korrelasjon	0.30	

1. Finn porteføljefronten til de to etter hvert som vektene endres og vis resultatet i en graf.
2. Finn minimum-variansporteføljen.
3. Lag også en graf når du forutsetter at korrelasjonen er -1.0 og når den er +1.0.
4. Vi er tilbake i situasjonen med korrelasjon lik 0.30. Anta du ønsker en avkastning på 5.25%. Hvordan måtte du sette sammen porteføljen? Hva blir risikoen?

6

Bruk dataene til Orkla og Statoil i tabellen nedenfor til å gi svar på spørsmålene under.

	Sluttkurs i	
År	Orkla	Statoil
2005	52.00	155.00
2006	70.60	165.25
2007	105.25	169.00
2008	45.45	113.90
2009	57.65	146.50
2010	56.70	138.60
2011	44.65	153.50
2012	48.50	139.00
2013	47.32	147.00
2014	51.15	131.20
2015	70.10	123.70
2016	65.80	134.40

1. Beregn avkastningene i de to foretakene ved hjelp av $(r_t - r_{t-1})/r_{t-1}$.
2. Beregn aritmetisk gjennomsnitt, standardavvik, kovarians og korrelasjonskoeffisient til selskapene
3. Anta du setter sammen en portefølje med 25% Orkla og 75% Statoil. Hva er porteføljens avkastning og risiko?
4. Hvilken sammensetting gir minimum-varians-porteføljen?

7 To eiendeler

7.1

Bruk dataene i tabellen nedenfor til å beregne a) gjennomsnittsavkastningen til aksjene, b) volatiliteten (risikoen) til hver aksje, c) kovariansen mellom aksjene og d) korrelasjonen mellom dem.

	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Aksje A	-10	20	5	-5	2	9
Aksje B	21	7	30	-3	-8	25

Anta du setter sammen en likeveid portefølje.

1. Hva er avkastningen hvert år for denne porteføljen?
2. Finn porteføljens gjennomsnittsavkastning og volatilitet.
3. Vis at (i) gjennomsnittsavkastningen for porteføljen er lik gjennomsnittet til aksjenes gjennomsnittsavkastning, og (ii) vis at porteføljens volatilitet er den samme som du finner fra beregning av porteføljens standardavvik fra de to enkeltaksjene.

Bruk dataene og finn nå:

1. avkastning og volatilitet i en portefølje som har 70% i A og 30% i B; og
2. minimumvariansporteføljen.

8

Bruk følgende data til underspørsmålene:

	Novo	Geri
Forventet avkastning	10.00	7.00
Risiko	20.00	16.00
Korrelasjon	0.22	

1. Beregn forventet avkastning og volatilitet til en likeveid portefølje.
2. Anta at korrelasjonen (Novo-Geri) kom til å øke.
   (a) Ville forventet avkastning øke eller falle?
   (b) Ville volatiliteten øke eller falle?
   (c) Begrunn svarene.
3. Bestem (i) forventet avkastning og (ii) volatiliteten i en portefølje som består av en lang posisjon på 10,000 i Novo og en kort (belånt) posisjon på 2,000 i Geri.
4. Ta for deg alle porteføljevariantene til slutt:
   (a) Finn forventet avkastning og volatilitet i porteføljen når vekten for Novo varieres opp til 1.50. Lag en graf i avkastnings-volatilitetsrommet.
   (b) Merk av minimum-variansporteføljen (MVP). Finn også MVP analytisk.
   (c) Hvilke porteføljer i diagrammet er effisiente?

9

Anta at to aksjer har en korrelasjon på 1.0. Den første aksjen har en avkastning over gjennomsnittet. Hva er sannsynligheten for at den andre aksjen også har en avkastning over gjennomsnittet?

10 Gode og Haab

Aksjene i Gode og Haab har begge en volatilitet på 40%. Beregn volatiliteten til en portefølje som har 50% i hver aksje når korrelasjonen mellom aksjene er a) +1.0, b) 0.5, c) 0.0, d) -0.5 og e) -1.0. I hvilke tilfeller er volatiliteten i porteføljen lavere enn i de to enkeltaksjene?

11

Anta at aksjene i Wesley har en volatilitet på 60%, mens aksjene i Addison har 30%. Korrelasjonen mellom aksjene er 25%. Hva er så volatiliteten i følgende porteføljer bestående av Addison og Wesley: a) 100% Addison, b) 75% Addison og 50% i Addison.

12

Anta at Avon og Nova har volatilitet på henholdsvis 50% og 25%. De er perfekt negativt korrelert. Hvilken portefølje bestående av disse to har null risiko?

13

Anta at Tex-aksjen har en volatilitet på 40% og at Mex-aksjen har en volatilitet på 20%. Anta at Tex og Mex er ukorrelerte.

1. Hvilken portefølje av de to har den samme volatiliteten som Tex alene?
2. Hvilken portefølje har den lavest mulige volatiliteten?

14 Mange aksjer

1. Anta at gjennomsnittsaksjen har 50%'s volatilitet og at korrelasjonen mellom alle par av aksjer er 20%. Beregn volatiliteten i likeveid portefølje med henholdsvis én aksje, 30 aksjer og 1,000 aksjer.

2. Hva er volatiliteten (definert som standardavviket) til en likeveid portefølje i en bransje med svært mange bedrifter når aksjene har et standardavvik på 50% og en korrelasjon på 40% etter hvert som porteføljen omfatter et større og større antall aksjer?
3. Du holder en portefølje med tre aksjer i Delta, Gamma og Omega. Delta har volatilitet 60%, Gamma har 30%, og Omega har volatiliteten 20%. Anta at du investerer 50% i Delta og 25% i Gamma og Omega hver.
   (a) Hva er den høyest mulige volatiliteten i porteføljen?
   (b) Anta at porteføljen din faktisk har volatiliteten du nettopp beregnet. Hva er din konklusjon om korrelasjonen mellom Delta og Omega?

Kap. 9: Kapitalverdimodellen
Løsningsforslag

1

Sharpe-forholdet er definert som:

$$S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}. \tag{1}$$

Vi kan oppfatte hver indeks som en portefølje. Sharpe-forholdet i aksjeindeksene er:

	Avkastning	Volatilitet	Sharpe
Dow Jones 500	17.65	12.43	1.26
NASDAQ	25.88	14.82	1.61
NYSE Amex	5.75	12.63	0.30
Euronext	5.46	10.36	0.33

Feks. er Sharpe-forholdet for Dow Jones 500:

$$S_{DJ500} = \frac{17.65 - 2.00}{12.43} = 1.26.$$

En portefølje av NASDAQ-aksjer gir den beste ekstraavkastningen $E(r_p) - r_f$ i forhold til volatiliteten i porteføljen σ_p.

2

Vi bruker kapitalverdimodellen for å svare på spørsmålet:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i \tag{2}$$

Opplysningene er at $r_m = 15$, $r_f = 7.5$, forventet avkastning $\tilde{r}_i = 17.5$ og $\beta_i = 2.5$. Da er

selskapets kapitalkostnad:

$$r_i = 7.5 + (15.0 - 7.5) \cdot 2.5 = 26.25$$

Forventet avkastning $\tilde{r}_i = 17.5$ er dermed altfor lavt til at prosjektet bør gjennomføres. Legg merke til at vi bruke internrenteregelen her: Prosjektet må ha en internrente høyere enn selskapets krav til kapitalkostnad.

3 HM

Vi skal bruke KVM (2) i denne oppgaven.

3.1

For å finne beta til HM, kan vi bruke at beta til et selskap i β_i kan skrives:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_m \cdot \sigma_i \cdot \rho_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_i}{\sigma_m}\rho_{im} \tag{3}$$

Tallene fra oppgaven gir oss nå at

$$\beta_{HM} = \frac{24.5}{19.2} \cdot 0.80 = 1.02$$

3.2

Forventet avkastning fra (2) er da:

$$E\left(r_{HM}\right) = 4.0 + (12.1 - 4.0) \cdot 1.02 = \underline{12.262}.$$

4

Her er kapitalverdimodellen i (2) benyttet.

r_j	r_f	r_m	$r_m - r_f$	β_j	σ_j^2	σ_m^2	ρ_{jm}
12.00	2.00	7.00	5.00	2.00			
7.00	2.00	7.00	5.00	1.00			
10.00		10.00		1.00			
6.80	2.00	8.00	6.00	0.80	100.00	25.00	0.40
12.50	2.00	10.50	8.50	1.24			
15.00	2.50	10.31	7.81	1.60	100.00	25.00	0.80

Innsetting i (2) gir for første rad i tabellen:

$$r_j = 2.00 + (7.00 - 2.00) \cdot 2.00 = 12.00.$$

Rad nr. 2 er likedan, denne gangen er tallene som før, bortsett fra $\beta_j = 1.00$, og $r_j = 7.00$.

I rad nr. 3 benytter vi at $\beta_m = 1.00$, siden $\beta_m = \sigma_{mm}/\sigma_m^2 = \sigma_m^2/\sigma_m^2 = 1.00$. En aksje som har samme beta som markedsporteføljen, må derfor ha samme avkastning som markedsporteføljen, $r_j = r_m = 10.00$.

I rad nr. 4 er det fornuftig å først beregne β_j. Vi har at $\beta_j = \rho_{jm} \cdot \sigma_j/\sigma_m$. Dermed:

$$\beta_j = 0.40 \cdot \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 0.80.$$

Nå fremkommer r_j:

$$r_j = 2.00 + 6.00 \cdot 0.80 = 6.80.$$

I rad nr. 5 er β_j den ukjente. Vi bruker KVM og setter inn kjente størrelser.

$$12.50 = 2.00 + 8.50 \cdot \beta_j.$$

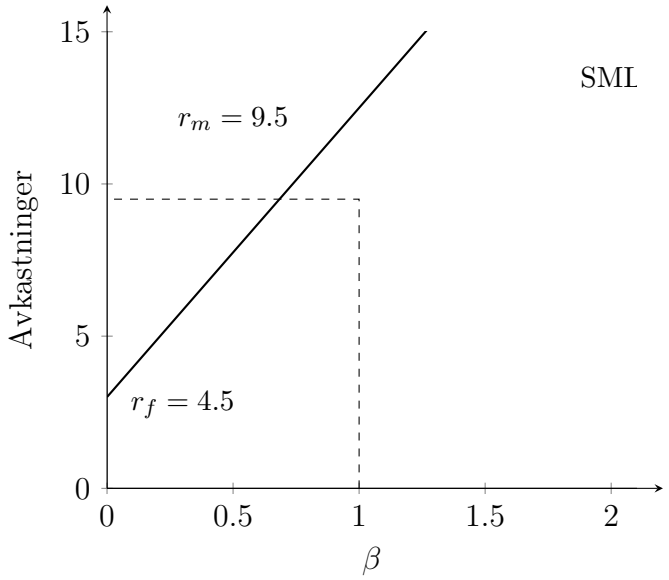
Da fremkommer β_j ved:

$$\beta_j = \frac{12.50 - 2.00}{8.50} = 1.24.$$

I siste rad (nr. 6) er markedets risikopremie $r_m - r_f$ ukjent. Som i rad nr. 4 finner vi først β_j. Vi ser den er nå 1.60. Dermed kan vi sette inn kjente størrelser i KVM-formelen:

$$15.00 = 2.50 + (r_m - r_f) \cdot 1.60 \qquad \Rightarrow \qquad (r_m - r_f) = 7.81.$$

I disse besvarelsene ikke alle utfylte ruter kommentert. Det bør være selvinnlysende hva disse svarene er.



Figur 1: SML-linjen når $r_f = 3.0$ og $r_m = 12.5$

5

6 Porteføljе og KVM

6.1 Beta og forventet avkastning

Vi beregner først beta til aksjene fra (3):

$$\beta_P = \frac{15}{9.5} \cdot 0.45 = 0.52; \qquad \beta_M = 1.53; \qquad \beta_H = 0.46$$

Fra (2) gir dette de forventede avkastningene

$$E\left(r_P\right) = 3.5 + (9.5 - 3.5) \cdot 0.52 = 11.18; \qquad E\left(r_M\right) = 12.68 \qquad E\left(r_H\right) = 6.26$$

6.2 Avkastning porteføljе

Den forventede avkastning av porteføljen kan man finne som en veid sum av de forventede avkastningene til enkeltaksjene. Dette gir

$$E\left(r_{port}\right) = 0.35 \cdot 6.26 + 0.29 \cdot 12.68 + 0.36 \cdot 6.26 = \underline{8.25}.$$

6.3 Porteføljens beta

Porteføljens beta er ganske enkelt den veide summen av de tre betaene. Vi har:

$$\beta_{port} = 0.35 \cdot 0.52 + 0.29 \cdot 1.53 + 0.36 \cdot 0.46 = \underline{0.79}.$$

6.4 Porteføljens avkastning

Vi kan nå finne porteføljens beta ved å følge (2) som før. Det betyr at:

$$E\left(r_{port}\right) = 3.5 + (9.5 - 3.5) \cdot 0.79 = \underline{8.25}$$

som vi også fikk i delspørsmål 2.

7

Polonius råder Laertes til hverken å låne eller låne ut: Da må han plassere seg akkurat i markedsporteføljen m.

8

Innsetting i KVM-formelen (2) gir direkte:

$$r_i = 5 + (15 - 5)\beta_i = 20 \qquad \beta_i = \frac{20 - 5}{10} = 1.5$$

9 Diversifisering i porteføljen?

9.1 Bedre balanse?

Balanse har neppe noe med diversifisering å gjøre i dette tilfellet. Tvert imot satser man enda sterke på en varelinje i en klart definert bransje. Alle typer brennevin i porteføljen er vel høyt korrelerte.

9.2 Andre måter?

I utgangspunktet kan eierne selv foreta en diversifisering av sin portefølje. De vil ikke betale selskapene for å gjøre noe de enkelt kan gjøre selv.

Når selskapet likevel ønsker å diversifisere, bør den velge selskaper som er lite korrelert med med Arcus. Vin og brennevin er vel assosiert med fest og moro og store anledninger, slik som en kjøpsskål ved en større transaksjon. Bransjer som ikke er relatert til dette kan

for eksempel være databransjen eller skipsbygging. Her kan man bruke fantasien.

9.3 Andre begrunnelser?

Oppkjøp gjøres generelt for en av to grunner, eller for begge. For det første er det et ønske om en mer effektiv drift. Et vanlig argument er at et oppkjøp tillater en bedre utnyttelse av produksjonsutstyr, såkalte stordriftsfordeler. For det andre er et oppkjøp ofte begrunnet (i hvert fall internt) med at selskapet vil få en sterkere stilling i markedet. Det kan få større *markedsmakt*. Implisitt betyr dette at man kan ta priser som er høyere enn frikonkurranseprisen.

I dette tilfellet argumenterer man for vekst og et ønske om å bli Nordens ledende aktør. Det står ikke noe om mer effektiv drift. Uttalelsen tyder på at man ønsker seg mer markedsmakt.

9.4 Fornuftig målsetting?

Man ønsker altså vekst. Ønsket er at selskapet blir størst mulig. Dette er kalt *imperiebygging*. I foretaksfinans vil vi hevde at målsettingen for selskapet er å bli mest mulig verdifull, ledelsen skal altså maksimere selskapets verdi. Imperiebygging kan ikke være et mål i seg selv.

10

10.1

Beregning av forventet avkastning er det samme som å finne internrenten til prosjektet. Prosjektets kontantstrøm kan altså skrives

$$(-2.000.000, 600.000, 600.000, 600.000, 600.000, 600.000)$$

Vi kan finne internrenten til prosjektet ved å bruke annuitet, dvs.

$$NNV = -2000 + 600\frac{(1+i)^5 - 1}{i(1+i)^5} = 0$$

når vi har dividert med 1.000. i er internrenten. Dermed har vi at

$$\frac{(1+i)^5 - 1}{i(1+i)^5} = \frac{2000}{600} = 3.3333$$

Dette svarer til en internrente på 15.23%.

10.2

Bør prosjektet aksepteres? Vi må vurdere internrenten in prosjektet mot krav til kapitalkostnad. KVM gir oss krav til avkastning. Risikofri rente er 4.5%. Markedsavkastningen er 14.5%. Selskapets beta er

$$\beta_E = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \qquad \text{dvs.} \qquad \beta_E = \frac{0.3}{0.25} = 1.20.$$

Kapitalkostnad til egenkapital er fra KVM gitt av:

$$r_i = r_f + (r_m - r_f)\,\beta_i \tag{4}$$

Vi har alle opplysninger vi trenger. Vi finner ved direkte innsetting:

$$r_i = 4.5 + (14.0 - 4.5)1.20 = 15.90$$

Siden prosjektets internrente er lavere enn krav til kapitalkostnad, bør rådet til Hellot være å ikke investere i prosjektet. Prosjektet forkastes.

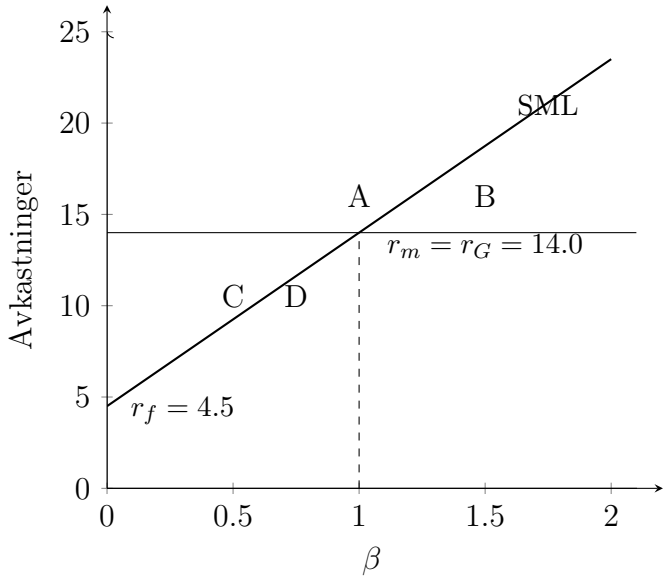
10.3

Økonomisjefens bekymring Bruker den gjennomsnittlige kapitalkostnad r_G i diskonteringen, uansett hvilken risikoprofil prosjektet har. Vi kan drøfte bruken av denne metoden i stedet for KVM ved hjelp av figur (2).

Den gjennomsnittlige kapitalkostnaden r_G lager en rett, horisontal linje i diagrammet, dvs. samme kapitalkostnad benyttes enten risikoen er stor eller liten. For eksempel er prosjektene A og B like gode ved denne metoden. Etter dette kriteriet skal man altså akseptere prosjektene A og B, mens C og D skal forkastes. KVM-metoden utpeker derimot A og C som de aksepterte prosjektene, mens B og D forkastes. Faktisk er de to metodene bare enige om prosjekt D. Vi ser at det gjøres to feil når den gjennomsnittlige kapitalkostnad legges til grunn:

1. Man godtar prosjekter (slik som B) som ikke burde godtas.
2. Man forkaster prosjekter (slik som C) som burde vært akseptert.

Økonomisjefens frykt er dermed ubegrunnet. Det stikk motsatte er tilfellet. Man står i fare for å akseptere for mange høyrisikoprosjekter og forkaste for mange lavrisikoprosjekter.



Figur 2: Prosjektvurdering med gjennomsnittlig og risikojustert kapitalkostnad

11

11.1

Kapitalkostnaden til egenkapitalen finner vi fra kapitalverdimodellen:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_M) - r_f)\beta_i; \qquad \beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_M}\rho_{iM} \tag{5}$$

Her er $E(r_i)$ krav til kapitalkostnad for egenkapitalen i divisjon i, r_f er risikofri rente, $E(r_M)$ er forventet avkastning på markedsporteføljen og β_i er beta, et mål på den systematiske risikoen til divisjon i. De øvrige termene er kjent.

Ved å bruke opplysningene i oppgaven, kommer man frem til EK-kostnaden i divisjon D1:

$$E(r_{D1}) = 2.5 + (10 - 2.5)\frac{10}{25}0.75 = 4.75$$

På samme måte finner man at $E(r_{D2}) = 5.50$ og $E(r_{D3}) = 2.50$. Vi finner også at $\beta_{D1} = 0.3, \beta_{D2} = 0.4$ og $\beta_{D3} = 0.0$.

11.2

Netto nåverdi av prosjekt i er definert som

$$NNV = K_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1+r_E)^t} \tag{6}$$

Her er K_t kontantstrømmen i periode t. For D1 har vi da:

$$NNV(D1) = -500 + \frac{50}{1.0475^1} + \frac{75}{1.0475^2} + \frac{125}{1.0475^3} + \frac{150}{1.0475^4} + \frac{100}{1.0475^5} = -71.28$$

Internrenten y er definert som den rente som gjør $NNV = 0$. Dermed:

$$NNV = K_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{K_t}{(1+y)^t} = 0 \tag{7}$$

Man bruker prøving og feiling for å komme frem til internrente. Resultatene for både NNV og internrenten er vist i tabell 1.

Tabell 1 Netto nåverdi og internrente til de tre prosjektene

År	D1	D2	D3
0	-500	-500	-500
1	50	300	150
2	75	200	150
3	125	50	100
4	150	50	150
5	100	25	125
NNV	-71.28	66.12	128.35
IRR	0.00%	13.13%	11.24%

Netto nåverdi er regnet ut med ulike kapitalkostnader. Siden divisjonene har ulik systematisk risiko, blir også deres krav til kapitalkostnad ulike.

11.3

Etter internrentekravet på 12% er det bare D2 som ville blitt akseptert. Men etter dette kriteriet går KG glipp av det prosjektet som gir mest nåverdi som er i D3.

KG har en feil krav til kapitalkostnad. Den bør ikke være den samme uansett hvilken systematisk risiko som er i divisjonene. Prosjektene i D2 og D3 bør dermed velges.

11.4

Det kan vises at beta'ene er additive. For å finne KG's beta, kan vi bare legge sammen divisjonenes beta'er. Hver divisjons beta vektes da med divisjonens størrelse, målt i markedsverdi MV. Vi har dermed at

$$\begin{aligned}\beta_{BG} &= \frac{MV_{D1}}{MV_{KG}}\beta_{D1} + \frac{MV_{D2}}{MV_{KG}}\beta_{D2} + \frac{MV_{D3}}{MV_{KG}}\beta_{D3} \\ &= 0.50 \cdot 0.30 + 0.25(0.40 + 0.00) = 0.25\end{aligned}$$

Her er MV_{Di} markedsverdien til divisjon i og MV_{KG} er den samlede markedsverdien til KG.

12

12.1

Vi skal finne EK-kostnaden til DO. Vi bruker kapitalverdimodellen og setter inn med tall fra oppgaven:

$$r_{DO} = 3 + 6.6 \cdot 1.5 = 12.90$$

EK-kostnaden er $\underline{12.90\%}$.

12.2

Vi bruker uttrykket for den gjennomsnittlige kapitalkostnaden

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} \cdot r_E + \frac{D}{E+D} \cdot r_G \tag{8}$$

som ved innsetting gir følgende:

$$r_{waccDO} = (1 - 0.38) \cdot 12.9 + 0.38 \cdot 5.5 = 10.09$$

Den gjennomsnittlige kapitalkostnaden er $\underline{10.09}$.

12.3

Relevant skattesats er nå $\tau_c = 0.22$. Vi modifiserer (8) ovenfor til

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} \cdot r_E + \frac{D}{E+D} \cdot r_G \cdot (1 - \tau_c) \tag{9}$$

Innsetting gir denne gangen:

$$r_{waccDO} = 0.62 \cdot 12.9 + 0.38 \cdot 5.5 \cdot (1 - 0.22) = 9.63$$

Med skatt på selskapets driftsresultat blir den gjennomsnittlige kapitalkostnad i DO $\underline{9.63}$.

13

13.1

Fjaern og Naer er sammenlignbare, d.v.s. vi antar de har samme forretningsrisiko og dermed også den samme EK-beta. Å beregne beta for Naer innebærer å finne en porteføljebeta fra

$$\beta_{Naer} = \frac{E}{E+D}\beta_E + \frac{D}{E+D}\beta_D \tag{10}$$

Siden $\beta_D = 0$, har vi at $\beta_{Naer} = (2/3) \cdot 2.5 = \underline{1.67}$.

13.2

Vi kan finne avkastning i Naer ved å bruke KVM. Vi setter inn:

$$E\left(r_{Naer}\right) = 2.5 + 5 \cdot 1.67 = \underline{10.83}$$

13.3

Vi skal finne EK-kostnaden til Fjaern. Vi vet at gjennomsnittlig kapitalkostnad er den samme uansett gjeldsnivå når det er et perfekt kapitalmarked ifølge **?**. Da vet vi altså at kapitalkostnaden for Fjaern og Naer er den samme og lik $r_{wacc} = 10.83$. Vi kan bruke dette og sette

$$r_{wacc} = \frac{1}{3}r_{E,Fj} + \frac{2}{3}r_G = 10.83 \qquad \longrightarrow \qquad r_{E,Fj} = \underline{22.49\%} \tag{11}$$

14 Faktormodellen

Faktormodellen i dette tilfellet er generelt gitt av:

$$E\left(r_i\right) = r_f + \beta_{im}\left(r_{im} - r_f\right) + \beta_{iSMB}r_{iSMB} + \beta_{iHML}r_{iHML} + \beta_{iPR1YR}r_{iPR1YR} \tag{12}$$

I oppgaven er det vist verdiene av betaene i (12). Ut fra opplysningene i oppgaven blir beregningen som i tabell 2.

Tabell 2 Beregning av kapitalkostnaden ved hjelp av faktormodellen

Faktor	Avkastning		Beta		Bidrag
Marked	8.5	×	1.30	=	11.05
SMB	3.8	×	-0.10	=	-0.38
HML	4.6	×	-1.00	=	-4.60
PR1YR	8.9	×	0.10	=	0.89
Sum					6.96
Risikofri					3.00
Sum					9.96

Kapitalkostnaden er altså ca. 10%.

Oppgaver Kap. 9: Kapitalverdimodellen

1

Ettårig avkastning og volatilitet i noen utvalgte aksjeindekser er vist nedenfor.

	Avkastning	Volatilitet
Dow Jones 500	17.65	12.43
NASDAQ	25.88	14.82
NYSE Amex	5.75	12.63
Euronext	5.46	10.36

Dow Jones er hovedindeksen for aksjemarkedet i USA, NASDAQ er en indeks for teknologiaksjer for det meste, NYSE Amex er en indeks for mindre selskaper, og Euronext er et representativt utvalg av europeiske aksjer.

1. Beregn Sharpe-indeksen for aksjeindeksene idet du antar at risikofri rente er 2.00%.

2

Avkastningen på markedsporteføljen er 15%, mens risikofri rente er 7.5%. Et prosjekt har forventet avkastning på egenkapitalen på 17.5% og en β på 2.5. Bedriftens gjennomsnittlige kapitalkostnad er 12.5%.

Bør prosjektet gjennomføres?

3

Den risikofrie renten er 4.0%. Markedsporteføljen har en forventet avkastning på 12.1% og en volatilitet på 19.2%. Aksjen til selskapet Harry Marine (HM) har en volatilitet på 24.5% og en korrelasjon med aksjeindeksen på 0.80.

1. Hva er HMs beta til markedet?
2. Hva er HMs forventede avkastning, gitt forutsetningene for KVM?

4

Fyll ut så mange ruter i tabellen nedenfor som du kan. Vær oppmerksom på at ikke alle rutene kan fylles ut. Vis utregninger.

r_j	r_f	r_m	$r_m - r_f$	β_j	σ_j^2	σ_m^2	ρ_{jm}
	2.00	7.00		2.00			
	2.00	7.00		1.00			
		10.00		1.00			
	2.00		6.00		100.00	25.00	0.20
12.50	2.00		8.50				
15.00	2.50				100.00	25.00	0.40

5

På et tidspunkt er risikofri rente i et marked på 4.5% og avkastningen på markedsporteføljen er 9.5%.

1. Tegn SML.
2. Et selskap j har $\beta_j = 1.25$. Hva er dets forventede avkastning? Tegn dette inn i figuren.

6

En portefølje bestående av tre aksjer har følgende kjennetegn:

Selskap	Porteføljevekt	Volatilitet	Korrelasjon med markedsporteføljen
Pyramiden	0.35	15%	0.45
Myggen	0.29	32%	0.62
Haren	0.36	12%	0.50

Volatiliteten til markedsporteføljen er 13% og den har en forventet avkastning på 9.5%. Den risikofrie renten er 3.5%.

1. Finn beta og forventet avkastning på hver aksje.
2. Bruk resultatene i forrige delspørsmål og beregn forventet avkastning på porteføljen.
3. Hva er porteføljens beta?
4. Beregn porteføljens forventede avkastning. Er det det samme som i delspørsmål 2?

7

I Shakespeare's Hamlet Akt 1, scene 3, 75–77 formaner Polonius sin sønn Laertes som skal dra til Paris for å studere.

> Neither a borrower nor a lender be,
> For loan oft loses both itself and friend,
> And borrowing dulls the edge of husbandry.

Hvilket råd gir Polonius i første linje?

8

Hva er β til et prosjekt med forventet avkastning på 20%, risikofri rente på 5% og forventet avkastning på markedsporteføljen lik 15%?

9 Brennevinsporteføljе?

Under overskriften "Gammel Opland kjøper Gammel Dansk" i *Dagens Næringsliv* 14.07.2012 sier administrerende direktør Otto Drakenberg for det oppkjøpende selskapet Arcus følgende: "Vi ønsker å få til en bedre balanse i porteføljen vår, og derfor er det strategisk viktig for oss å bli større på brennevin." Etter oppkjøpet vil andelen til Arcus' omsetning av brennevin være på 37 prosent, mot 28 prosent før oppkjøpet. Med på kjøpet følger merkenavnet, moderne produksjonslokaler og en del eiendomsmasse hvor produksjonen foregikk tidligere. Arcus driver med produksjon, salg og distribusjon av vin og brennevin. Gammel Dansk er en tradisjonell dansk akevitt, og Gammel Opland er en tilsvarende norsk. Lenger ute i intervjuet heter det at "... vi har en ambisjon om å bli Nordens ledende aktør på vin og brennevin, og det er et viktig skritt vi tar i dag. Det er fremdeles en reise, og vi er veldig interessert i tilvekst, enten organisk eller ved oppkjøp."

1. Er "en bedre balanse i porteføljen" en god begrunnelse for oppkjøpet?
2. Kan porteføljebalansen gjøres bedre på andre måter?
3. Hvilke grunner taler for oppkjøpet - hva gjør det til et strategisk godt kjøp?
4. Hvilken målsetting gir Drakenberg uttrykk for? Er den fornuftig?

10

Det børsnoterte selskapet Hellot ASA vurderer å starte produksjon av sykkelhjelmer. Prosjektet krever 2 millioner kr i investering. Med forutsetning om 100% egenkapitalfinansiering gir prosjektet årlig en forventet kontantstrøm på 600.000 i 5 år. Vi ser bort fra skatt i denne oppgaven.

Det nye prosjektet er en utvidelse av eksisterende produksjon. Hittil har kovariansen mellom selskapets aksjeavkastning og børsindeksen vært 0.3 pr. år. Variansen til årlig endring i børsindeksen har vært 0.25. Gjennomsnittlig endring i børsindeksen har vært 14%, og gjennomsnittlig risikofri rente har vært 2.5%. Risikofri rente er nå 4.5%. Disse sammenhengene forventes å forbli stabile i det nye prosjektets levetid.

Hellot har til nå hatt en forholdsvis homogen produksjon. Bedriften vurderer nå flere prosjekter som vil medføre satsing på nye områder. Man har beregnet at avkastning og beta på fire prosjekter som følger: $A : (16.0, 1.0)$, $B : (16.0, 1.5)$, $C : (10.5, 0.5)$ og $D : (10.5, 0.75)$, hvor beregnet internrente i prosent står først og prosjektets beta deretter.

Bedriften har hittil brukt samme kapitalkostnad lik $r_G = 14.5\%$ på alle prosjekter. Økonomisjefen påstår nå at dersom bedriften fortsetter med dette, vil den komme til å akseptere for mange lavrisikoprosjekter og forkaste for mange høyrisikoprosjekter. "Vi blir snart en risikofri bedrift", sier økonomisjefen.

1. Hva er forventet avkastning på Hellot's aksjer?
2. Bør prosjektet aksepteres?
3. Bruk en figur til å drøfte holdbarheten i økonomisjefens påstand.

11

Foretaket KonsernGruppen (KG) har virksomheter, divisjoner, i tre forskjellige bransjer. Du er satt til å vurdere investeringsprosjekter i alle tre divisjonene. KG regner med en risikofri rente på 2.5%, en avkastning på markedsporteføljen på 10% og en volatilitet på markedsporteføljen på 25%. Øvrige opplysninger om de tre divisjonene er satt opp nedenfor.

Divisjon	Volatilitet	Korrelasjon$_{iM}$
D1	10	0.75
D2	20	0.50
D3	40	0.00

"Korrelasjon$_{iM}$" er altså korrelasjonen mellom divisjonen og markedsporteføljen.

Prosjektene i de tre divisjonene har følgende kontantstrømmer:

År	D1	D2	D3
0	-500	-500	-500
1	50	300	150
2	75	200	150
3	125	50	100
4	150	50	150
5	100	25	125

1. Finn kapitalkostnaden til egenkapitalen i de tre divisjonene.
2. Finn netto nåverdi og internrenten til prosjektene.
3. Foretaket har et krav om at investeringsprosjekter må tilfredsstille en internrente på 12%.
   (a) Hvilke prosjekter blir valgt etter dette kriteriet?
   (b) Hvilke prosjekter mener du KG bør velge? Begrunn.
4. Finn beta til KG samlet når du antar at D1 utgjør 50% av den samlede markedsverdien til KG og D2 og D3 25% hver.

12

Beta til egenkapitalen i selskapet Downandout (DO) er på 1.5. Selskapet er finansiert med 38% gjeld som det betaler en rente på 5.5% for. Risikofri rente er 3% og risikopremien er på 6.6%. Se bort fra skatt i de to første spørsmålene.

1. Hva er krav til avkastning for egenkapitalen i DO?
2. Hva er den gjennomsnittlige kapitalkostnaden ut fra disse tallene?
3. Anta nå at skattesatsen på selskapets driftsresultat er 22.0% og at DO er i en skatteposisjon. Hva er nå den gjennomsnittlige kapitalkostnaden?

13

Du vurderer beta i ett av sammenlignbare selskaper, Fjaern og Naer. Fjaern har en EK-beta på 2.5 og gjelden utgjør 2/3 av selskapets verdi. Anta at gjelden er risikofri.

1. Beregn beta for Naer som har en gjeldsandel på 1/3.
2. Hva er kapitalkostnaden i Naer hvis risikofri rente er 2.5% og markedets risikopremie er 5%?
3. Hvilken kapitalkostnad ville investorer kreve for Fjaerns egenkapital?

14

Anta risikopremien på faktoren SMB er 3.8%, på HML 4.6%, på markedet 8.5% og på PR1YR 8.9%. Anta du gjennomførte en regresjon med disse faktorene som forklaringsfaktorer og fant følgende:

$$E(r_i) - r_f = -0.01\% + 1.3r_{im} - 0.1r_{iSMB} - 1.0r_{iHML} + 0.1r_{iPR1YR}$$

Hva er ditt forslag til kapitalkostnad ut fra disse tallene når du antar at risikofri rente er 3%?

Kap. 10: Løsningsforslag

1

1.1

Markedets risikopremie (MP) er definert som $MP = (r_m - r_f)$.

Ifølge oppsummeringen i læreboken (Strøm, 2017, side 199), er markedets risikopremie i området $5.0 - 8.0$ prosent. Dette er en risikopremie som er beregnet fra forskjellige studier, hvor man har brukt data for ulike perioder og for ulike land.

1.2

På en investering med ettårig horisont er det riktig å bruke den ettårige statsobligasjonen som referanse for den risikofrie renten. tuilsvarende vil det være riktig å bruke den tiårige statsobligasjonen for en investering med horisont på ti år.

2

Vi skal se hvordan vi kan komme frem til beta for Orkla og Equinor fra de oppgitte verdiene i oppgaven.

2.1

De utfylte verdiene for Orkla vises i tabell 1.

Her er gjennomsnittlig avkastning i prosent

$$\bar{R}_O = \frac{1}{T} \sum_{t=2006}^{2016} \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 \right) \cdot 100$$

Tabell 1 Beregning av avkastning, varians og standardavvik for Orkla

År	Orkla S_{Ot}	Endring $\frac{S_{Ot}}{S_{Ot-1}} - 1$	Avvik $R_{Ot} - \bar{R}_O$	Avvik^2 $\left(R_{Ot} - \bar{R}_O\right)^2$
2005	26.80			
2006	34.64	29.22	15.04	226.26
2007	57.18	65.09	50.92	2592.64
2008	25.53	-55.36	-69.53	4834.76
2009	33.47	31.11	16.93	286.79
2010	34.87	4.18	-10.00	99.98
2011	32.08	-7.98	-22.15	490.79
2012	36.93	15.12	0.94	0.89
2013	37.87	2.53	-11.65	135.66
2014	43.11	13.84	-0.34	0.11
2015	61.48	42.63	28.46	809.88
2016	71.04	15.55	1.37	1.89
$\bar{R}_O$		14.17		
$Var\left(R_O\right)$				947.96
$s\left(R_O\right)$				30.79

I denne beregningen har vi $T = 11$. Summen av kolonnen "Endring" delt på 11 gir nå $\bar{R}_O = 14.17$.

Tilsvarende finner vi varians og standardavvik til avkastningene:

$$Var\left(R_O\right) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2006}^{2016} \left(R_{Ot} - \bar{R}_O\right)^2; \qquad s\left(R_O\right) = \sqrt{Var\left(R_O\right)}$$

Tabellen 1 viser hvordan dette gjøres.

2.2

Vi skal nå gjøre tilsvarende for markedsindeksen som for Orkla og også finne kovariansen med Orkla, se tabell 2.

I tabell 2 er verdiene funnet på samme måte som i tabell 1.

2.2.1

Vi skal nå finne beta til Orkla. Beta for Orkla er definert som:

$$\beta_O = \frac{Cov\left(R_O, R_m\right)}{Var\left(R_m\right)} \qquad \text{som gir} \qquad \beta_O = \frac{594.38}{843.05} = 0.71$$

Tabell 2 Beregning av avkastning, varians og standardavvik for markedsporteføljen og kovariansen med Orkla

År	S_{mt}	Endring $\frac{S_{mt}}{S_{mt-1}} - 1$	Avvik $R_{mt} - \bar{R}_m$	Avvik^2 $\left(R_{mt} - \bar{R}_m\right)^2$	Kovarians Orkla $\left(R_{Ot} - \bar{R}_O\right)\left(R_{mt} - \bar{R}_m\right)$
2005	332.51				
2006	440.36	32.44	21.31	453.95	320.48
2007	490.83	11.46	0.33	0.11	16.91
2008	225.48	-54.06	-65.19	4249.80	4532.86
2009	371.56	64.79	53.66	2879.10	908.67
2010	439.72	18.34	7.22	52.06	-72.14
2011	384.95	-12.46	-23.58	556.24	522.49
2012	444.09	15.36	4.23	17.93	3.99
2013	548.86	23.59	12.46	155.33	-145.16
2014	576.04	4.95	-6.18	38.15	2.07
2015	610.26	5.94	-5.19	26.92	-147.66
2016	683.87	12.06	0.93	0.87	1.28
$\bar{R}_m$		11.13			
$Var\left(R_m\right)$				843.05	
$Cov\left(R_O, R_m\right)$					594.38

Orklas beta er 0.71.

2.2.2

Er beta $\beta_O = 0.71$ til Orkla en høy betaverdi? Beta til markedsporteføljen $\beta_m = 1.0$. Orkla har da mindre systematisk risiko enn markedet generelt.

En forklaring på den relativt lave beta til Orkla er at selskapet i stigende grad konsentrerte seg om merkevarer for husholdninger i denne tiden. Nødvendighetsartikler som såpemidler og matvarer som Grandiosa er mindre utsatt for konkurranse og svingninger i markedet. Det er derfor rimelig at risikoen i Orkla er mindre enn markedet generelt.

Legg også merke til at den gjennomsnittlige avkastningen er høyere i Orkla enn i markedet generelt. Dette skulle tilsi høyere risiko i Orkla. Men slike avvik fra regelen kan forekomme for enkeltselskaper, men vil i mindre grad inntreffe med en portefølje av flere selskaper.

2.3

Finn beta for Equinor (før Statoil). Er beta til Equinor høy?

Beta for Equinor finnes på samme måte for Orkla. Vi får at $\bar{R}_E = 6.81$, $Covar\,(R_E, R_m) = 383.02$. Vi kjenner allerede variansen til markedsporteføljen. Da har vi

$$\beta_E = \frac{Cov\,(R_E, R_m)}{Var\,(R_m)} \qquad \text{som gir} \qquad \beta_O = \frac{383.02}{843.05} = 0.45$$

En beta på 0.45 for et petroleumsselskap virker veldig lavt. På den annen side er også avkastningen lav, betydelig lavere enn markedsporteføljen i denne tidsperioden. Videre kan en aksje være volatil og samtidig ha lav systematisk risiko i form av en lav beta. Det er jo kovariansen med markedsporteføljen som er avgjørende for om beta er høy eller lav. Slike forhold kan forklare en lav beta for Equinor.

3

Dette dreier seg om å beregne beta fra en regresjonsanalyse hvor vi bruker markedsmodellen:

$$r_S = \alpha + \beta_S r_m + u \tag{1}$$

3.1

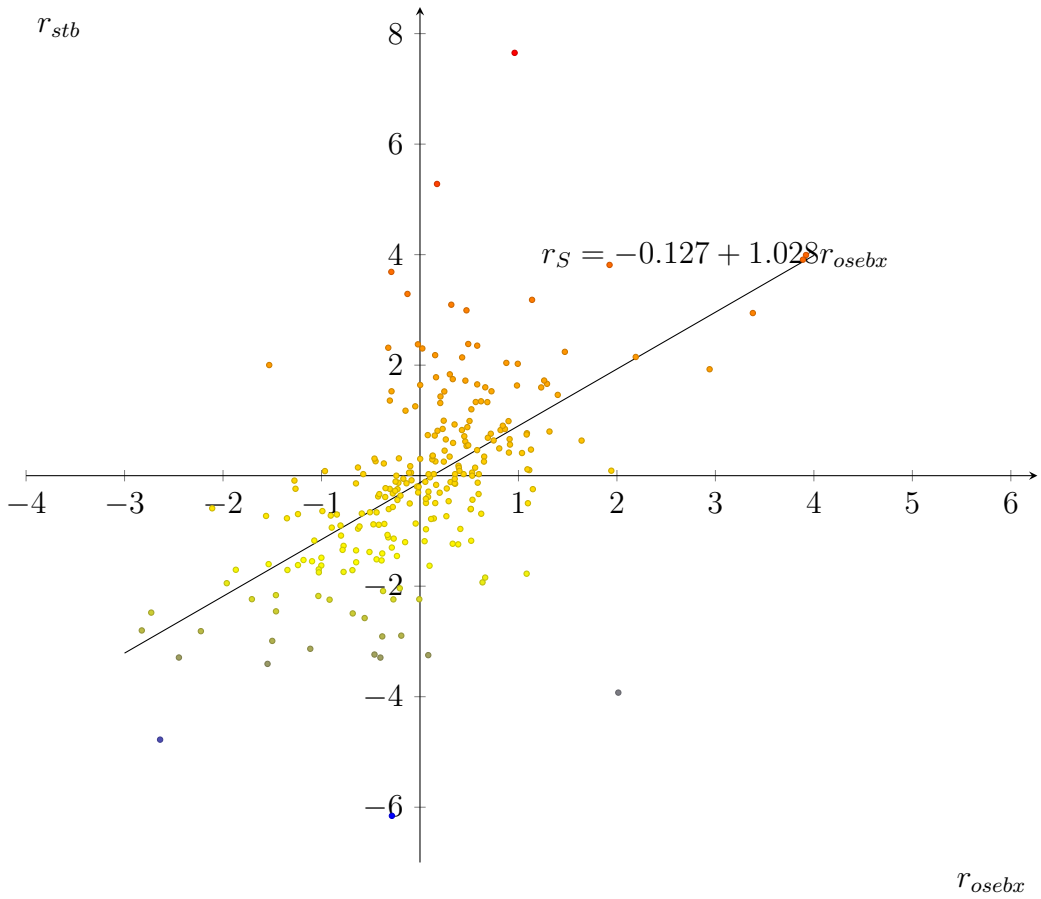
Hovedresultatene kan oppsummeres i følgende punkter. Den beregnede regresjonslinjen er

$$r_S = -0.127 + 1.028 r_{osebx}$$

Beta til Storebrand er da $\beta_S = 1.028$. Beta er temmelig nær den gjennomsnittlige beta på markedsporteføljen, som vi antar OSEBX avspeiler. Spredningsdiagrammet med regresjonslinjen er gjentatt i figur 1.

Kan vi stole på regresjonen? Vi ser at t-verdien til beta er veldig høy, 11.37, og at vi med mindre enn en prosents sannsynlighet kan si at beta-verdien avviker fra null. Ut fra dette vil vi si at beta til Storebrand er skarpt bestemt.

Videre viser det seg at $\alpha_S = -0.127$ med lav sannsynlighet. Vi kan ikke avvise nullhypotesen om at α_S er forskjellig fra null.



Figur 1: Spredningsdiagrammet med regresjonslinjen $r_S = -0.127 + 1.028 r_{osebx}$ for daglige data

3.2

Avkastningen $r_{osebx} = 1.5$. Da venter vi at avkastningen på Storebrand-aksjen er

$$r_S = -0.127 + 1.028 \cdot 1.5 = 1.42.$$

3.3

Problemet er formelt sett det samme som før:

$$E\left(r_S\right) = -0.127 + 1.028 \cdot 5 = 5.01.$$

Ikke overraskende venter vi at Storebrand-aksjen vil ha omtrent samme kursutvikling som markedsporteføljen. Her har vi brukt markedsmodellen til å

forutsi hva kursen på Storebrand-aksjen, gitt en spådom om utvikling i aksjemarkedet generelt. Dette er *prediksjon*.

3.4

Vi ser at $R^2 = 0.344$. Dette viser hvor mye av den systematiske risikoen som markedsmodellen har forklart. Usystematisk risiko for Storebrand er altså 0.656, eller 65.6%. Vi ser også fra spredningsdiagrammet at mange observasjoner ligger fjernt fra regresjonslinjen. Samtidig viser diagrammet at det er relativt få observasjoner som ligger fjernt fra andre. Vi har ikke problemer med såkalte uteliggere i datamaterialet, som kan gi skjevheter i beregningen av koeffisientene α_S og β_S.

4

4.1

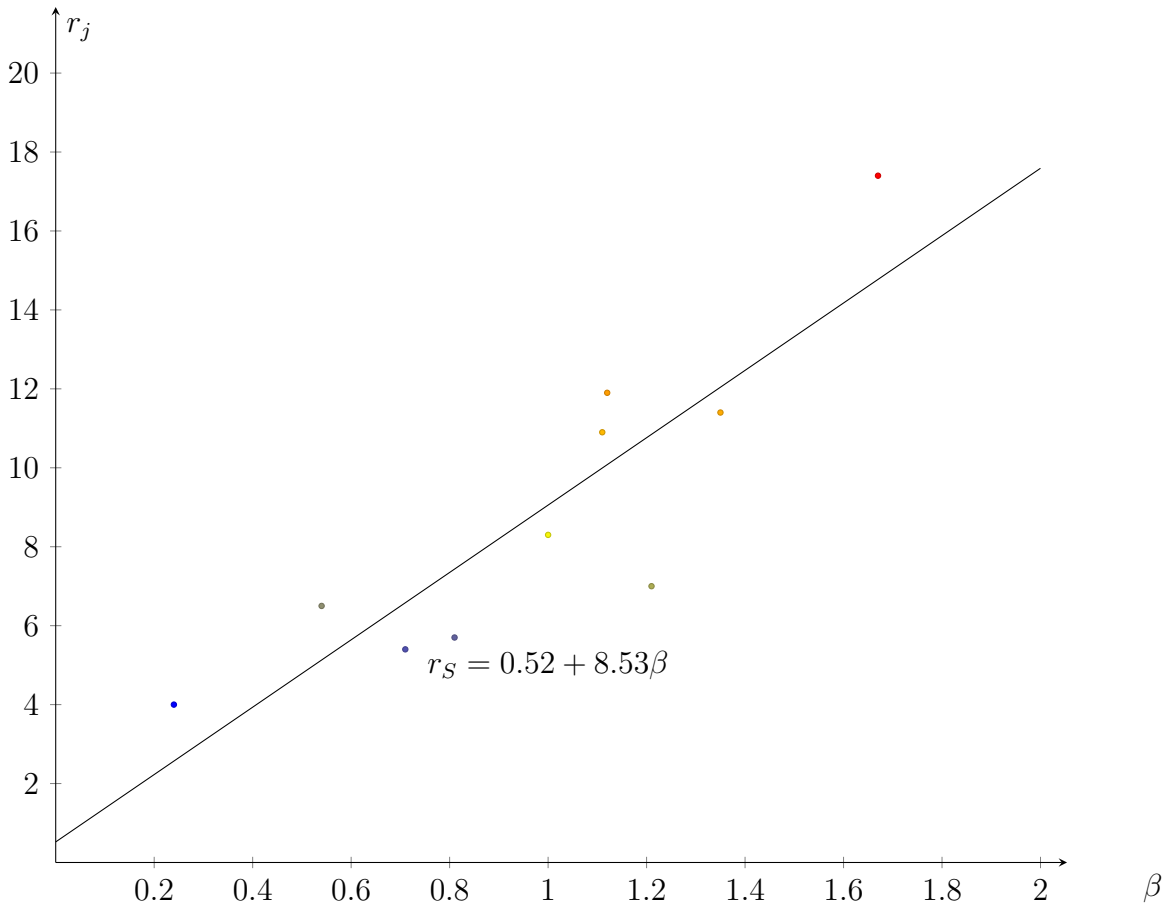
Vi skal lage et spredningsdiagram for avkastningene i forhold til beta og tegne inn regresjonslinjen. En (svært) enkel regresjon med 10 observasjoner gir regresjonslinjen som vist i diagrammet.

Det viser seg at sammenhengen mellom beta og avkastningene er svært tett.

4.2

Tabell 3 Beregning av systematisk risiko i selskapene

Selskap	Markedets standavv	Beta	Systematisk risiko
1	11.09	1.67	343.0
2	8.30	1.35	125.6
3	7.73	1.21	87.5
4	7.50	1.12	70.6
5	4.45	1.11	24.4
6	3.73	1.00	13.9
7	5.89	0.81	22.8
8	7.26	0.71	26.6
9	4.77	0.54	6.6
10	6.55	0.24	2.5



Figur 2: Sammenhengen mellom beta og avkastning i aksjen

Tabellen viser hvor sterk påvirkning størrelsen på beta har for den samlede systematiske risikoen i porteføljen.

4.3

Investorene kan bare ta hensyn til den systematiske risikoen fordi den gjenværende risikoen fluktuerer tilfeldig rundt null. Formelt sett har vi fra kjente egenskaper ved regresjonsanalysen at

$$E(u) = 0.$$

Forventningen til feilleddet er lik null. Det som gjenstår i forventningen til markedsmodellen (1) er dermed den systematiske risikoen.

4.4

Vi danner en likeveid portefølje av aksjene i selskapene 1 og 5. Porteføljens beta er da gitt av:

$$\beta_P = 0.5(1.67 + 1.11) = 1.39$$

Beta til en portefølje er lik den veide summen av betaene i porteføljen, veid med aksjens vekt i porteføljen.

Porteføljens systematiske risiko er:

$$\sigma_P^2 = 0.5(1.67^2 \cdot 11.09^2 + 1.11^2 \cdot 4.45^2) = 183.70$$

Vi kunne også hentet tallene for systematisk risiko i aksjene 1 og 5 fra tabell 3 og regnet ut porteføljens systematiske risiko.

Vekten i porteføljen er nå slik at vi holder 25% i selskap 1. Porteføljens beta blir nå:

$$\beta_P = 0.25 \cdot 1.67 + 0.75 \cdot 1.11 = 1.25$$

Porteføljens systematiske risiko er denne gangen:

$$\sigma_P^2 = 0.25 \cdot 1.67^2 \cdot 11.09^2 + 0.75 \cdot 1.11^2 \cdot 4.45^2 = 104.05.$$

En betydelig reduksjon i systematisk risiko i forhold til den likeveide porteføljen.

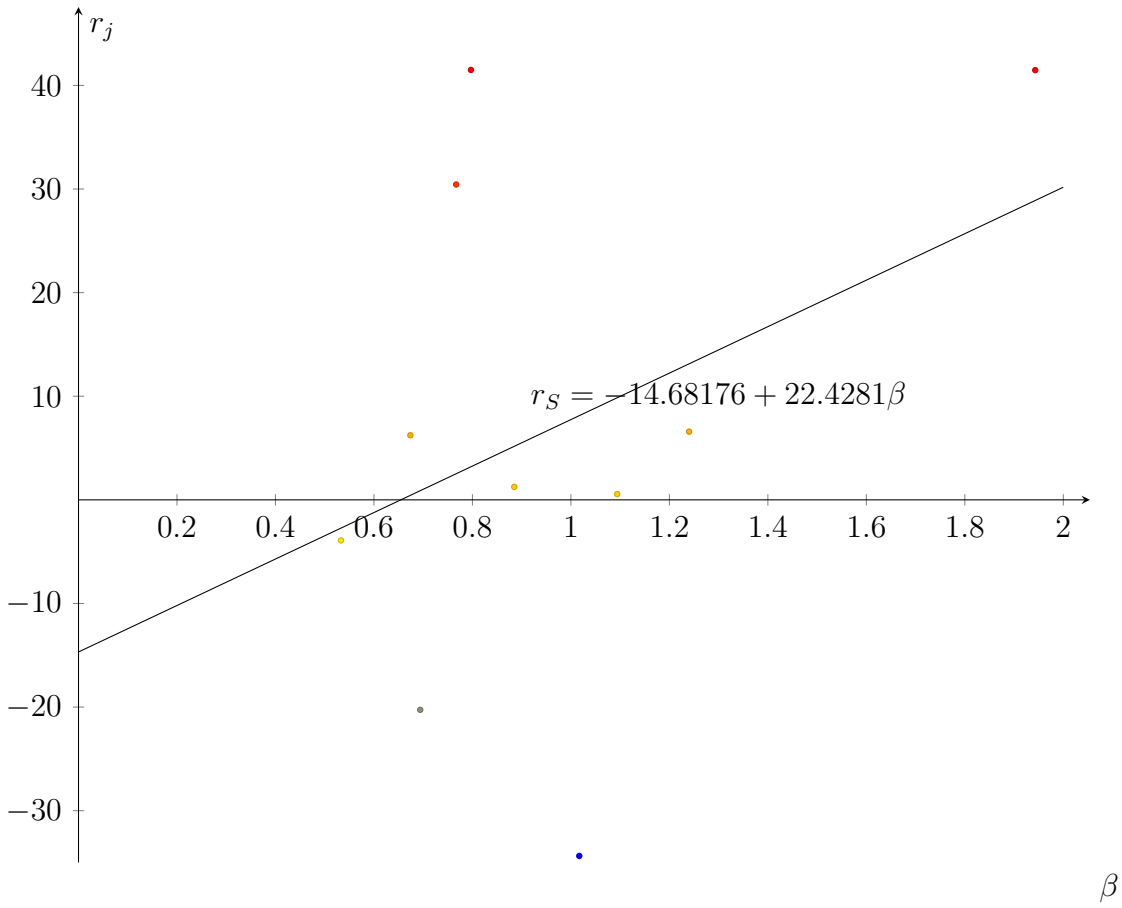
5

5.1

Spredningsdiagrammet for beta til enkeltselskapene og deres avkastninger vises i figur 3.

Sammenhengen mellom beta og avkastningen i selskapene er stigende, men observasjonene er svært sprikende i forhold til regresjonslinjen. Med bare 10 observasjoner er ikke dette et sikkert anslag. Ingen av koeffisientene i den beregnede markedsmodellen er signifikante, ikke en gang på 10% nivå. Det viser seg at t-verdien til forklaringsvariablen *beta* er 1.11, og for konstantleddet -0.70. $R^2 = 0.024$. Med få observasjoner må vi bruke justert R^2.

Til tross for den svake sammenhengen mellom beta og avkastning, ser vi av tabellen i oppgaven at beta-verdiene virker rimelige. Beta er høy for oljeselskapene Equinor og Aker BP, og lav for teleselskapet Telenor.



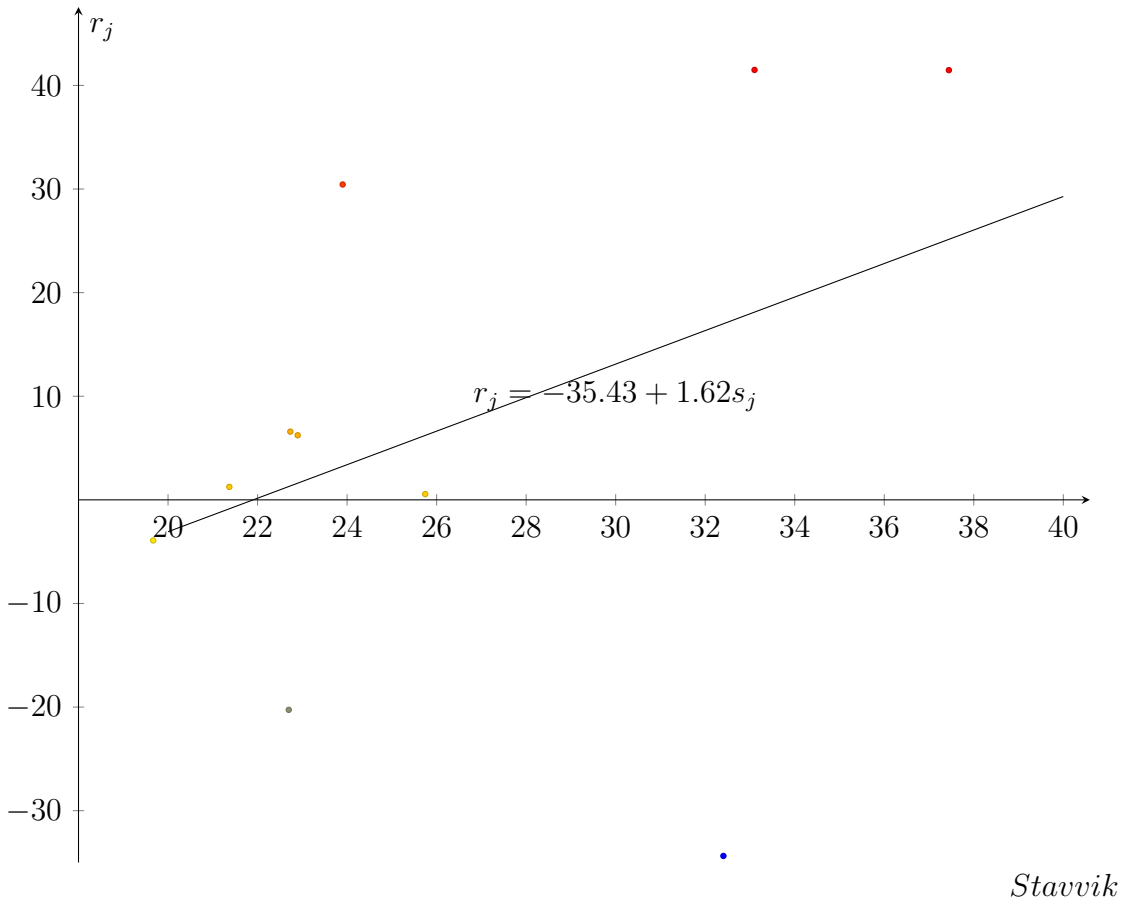
Figur 3: Sammenhengen mellom beta og avkastninger i enkeltselskaper med regresjonslinjen. Daglige data

5.2

Vi skal også undersøke sammenhengen mellom selskapenes standardavvik og deres avkastning. Vi vet at dette standardavviket inneholder både den systematiske og den usystematiske risikoen til selskapene. Gir dette en bedre sammenheng enn beta? Figur 4 gir mulighet for drøfting.

Spredningsdiagrammet viser at sammenhengen er omtrent like svak som med *beta* som forklaringsvariabel. Denne gangen viser det seg at t-verdien til forklaringsvariablen *Stavvik* er 1.19 som gir en p-verdi på 0.269, og for konstantleddet -0.97. $R^2 = 0.044$. Resultatene er bare marginalt bedre enn med *beta*. Siden vi har få observasjoner må vi igjen bruke justert R^2.

Vi kan ikke si at standardavviket er en bedre variabel til å forutsi selskapenes



Figur 4: Sammenhengen mellom selskapenes standardavvik og deres avkastning med inntegnet regresjonslinje. Daglige data

avkastning en selskapenes beta.

5.3

En årsak til at vi får så dårlige sammenhenger for både *beta* og *Stavvik*, er at vi har data for noen få selskaper over en relativt kort periode, bare ett år. Spesielle forhold i enkeltselskaper kan ha spilt inn i løpet av denne korte perioden. For eksempel måtte Norsk Hydro redusere sin bauxittproduksjon i Brasil kraftig. Videre kan en urolig verdensøkonomi ha spilt en rolle ved at forventninger om økonomiske resultater forandres.

6

Er beta fra regnskapsdata en god ide? I utgangspunktet skal jo renskapet avspeile verdiutviklingen i selskapet, slik at på lang sikt skulle regnskaps- og markedsvurderinger ligge nær hverandre, selv om de ikke er sammenfallende. La oss se.

6.1

Vi bruker dataene fra oppgaven og gjennomfører en regresjon med markedsmodellen på vanlig vis, men denne gangen med avkastning for selskapene beregnet fra regnskapsdata.

Tabell 4 Beregning av regnskapsbeta for Orkla og Ekornes. t-verdier i parentes.

	Avhengig variabel	
	r_{orkla}	$r_{ekornes}$
Skjæringspunkt	4.853	19.658
	(11.273)	(9.349)
r_{osebx}	0.017	0.084
	(1.275)	(1.296)
R^2 justert	0.043	0.046
Observasjoner	15	15

Her viser resultatene følgende:

1. Beta for begge selskapene er nær null. Dette er urealistisk for selskaper som leverer produkter og tjenester for et samfunn preget av endring.
2. I begge tilfeller er t-verdiene for beta ikke-signifikante, dvs. vi kan ikke avvise at $\beta = 0$. Samtidig er t-verdiene for α sterkt signifikante. Verdiene er høye, noe som indikerer at den regnskapsmessige avkastningen er frakoblet verdiutviklingen på børsen.
3. Den forklarte varians (R^2) er nær null, dvs. det aller meste av variasjonen i den regnskapsmessige avkastningen er usystematisk.

6.2

Denne modellen er åpenbart lite egnet til å beregne beta, til å finne ut hvordan avkastningen i et selskap varierer med avkastningen på markedsporteføljen. Det er blandingen av regnskaps- og markedsdata som øyensynlig ikke egnet til å beregne beta.

Referanser

Strøm, R. Ø. (2017). *Foretaksfinans*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kap. 10: Oppgaver

1

1. Hva er den omtrentlige størrelsen på markedets risikopremie?
2. Hvilken rente på statsobligasjoner ville du bruke som risikofri rente hvis investeringen er har en ettårig horisont. Hva om horisonten er ti år?

2

Ta utgangspunkt i dataene nedenfor.

År	Orkla	Equinor	OSEBX	Stat10
2005	26.80	85.84	332.51	3.74
2006	34.64	95.34	440.36	4.07
2007	57.18	102.99	490.83	4.78
2008	25.53	72.27	225.48	4.47
2009	33.47	96.94	371.56	4.00
2010	34.87	97.20	439.72	3.52
2011	32.08	112.55	384.95	3.12
2012	36.93	106.55	444.09	2.10
2013	37.87	118.50	548.86	2.58
2014	43.11	112.35	576.04	2.52
2015	61.48	111.52	610.26	1.57
2016	71.04	151.09	683.87	1.33

Aksjedataene er hentet fra databasen Titlon, hvor aksjekursene er justert for utbytte, aksjesplitter og andre forhold som kan ha betydning for aksjens verdi. "Stat10" er renten på 10-årig statsobligasjon, hentet fra Norges Bank. Aksjekursene er kursen på siste notering i året, mens renten er et beregnet årsgjennomsnitt.

2.1

For Orkla skal du fylle ut tabellen nedenfor.

År	Orkla S_t	Endring $\frac{S_{Ot}}{S_{Ot-1}} - 1$	Avvik $R_{Ot} - \bar{R}_O$	Avvik^2 $\left(R_{Ot} - \bar{R}_O\right)^2$
2005	26.80			
2006	34.64			
2007	57.18			
2008	25.53			
2009	33.47			
2010	34.87			
2011	32.08			
2012	36.93			
2013	37.87			
2014	43.11			
2015	61.48			
2016	71.04			
$\bar{R}_O$				
$Var\left(R_O\right)$				
$s\left(R_O\right)$				

2.2

Fyll ut tabellen for markedsindeksen nedenfor.

År	S_t	Endring $\frac{S_{mt}}{S_{mt-1}} - 1$	Avvik $R_{mt} - \bar{R}_m$	Avvik^2 $\left(R_{mt} - \bar{R}_m\right)^2$	Kovarians med Orkla $\left(R_{Ot} - \bar{R}_O\right)\left(R_{mt} - \bar{R}_m\right)$
2005	332.51				
2006	440.36				
2007	490.83				
2008	225.48				
2009	371.56				
2010	439.72				
2011	384.95				
2012	444.09				
2013	548.86				
2014	576.04				
2015	610.26				
2016	683.87				
$\bar{R}_m$					
$Var\left(R_m\right)$					
$Cov\left(R_O, R_m\right)$					

Finn nå beta til Orkla. Er beta til Orkla høy?

2.3

Finn beta for Equinor (før Statoil). Er beta til Equinor høy?

3

Et utdrag fra en excel-regresjon av markedsmodellen

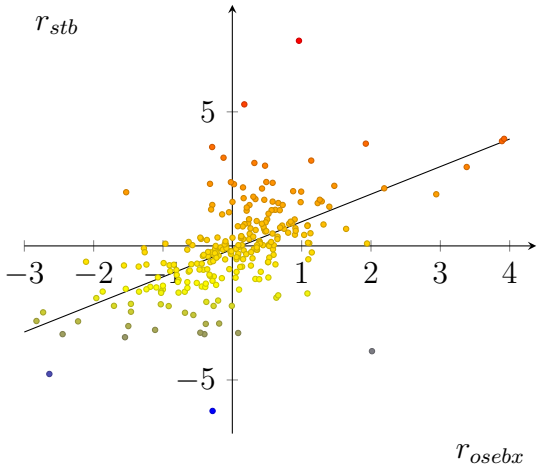
$$r_S = \alpha + \beta_S r_m + u \tag{1}$$

vises i tabellen nedenfor. S står for Storebrand og m er her definert som OSEBX. Dataene er daglige.

Multippel R	0.586
R-kvadrat	0.344
Justert R-kvadrat	0.341
Standardfeil	1.341
Observasjoner	249

	Koeffisienter	Standardfeil	t-Stat	P-verdi
Skjæringspunkt	-0.127	0.085	-1.491	0.137
r_{osebx}	1.028	0.090	11.373	0.000

Spredningen rundt regresjonslinjen er vist i figur 1 nedenfor.



Figur 1: Spredningsdiagrammet med regresjonslinjen $r_S = -0.127 + 1.028 r_{osebx}$ for daglige data

1. Kommenter hovedresultatene i analysen.
2. Avkastningen på OSEBX er en dag 1.5. Hva venter du at avkastningen på Storebrand er samme dagen?
3. I løpet av de neste tre månedene venter du at Oslo Børs vil stige 5%. Hvor mye venter du at Storebrand-aksjen utvikler seg i samme periode?
4. Hvor mye fanger modellen opp den systematiske risikoen i Storebrand-aksjen?

4

I tabell 1 er det vist avkastninger, standardavvik og beta for noen selskaper hentet fra historiske data 1945-1970 fra Copeland et al. (2005). Beta er

beregnet med markedsmodellen. Dataene er månedlige.

Tabell 1 Avkastninger, standardavvik og beta på enkeltselskaper

Selskap	Avkastning	Standardavvik	beta
1	17.40	11.09	1.67
2	11.40	8.30	1.35
3	7.00	7.73	1.21
4	11.90	7.50	1.12
5	10.90	4.45	1.11
6	8.30	3.73	1.00
7	5.70	5.89	0.81
8	5.40	7.26	0.71
9	6.50	4.77	0.54
10	4.00	6.55	0.24

Det er enkelt å vise at samlet varians for et selskap j beregnet fra markedsmodellen kan skrives

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2 \sigma_m^2 + \sigma_u^2. \tag{2}$$

Her er σ_j^2 samlet risiko for selskap j, $\beta_j^2 \sigma_m^2$ er systematisk risiko, og variansen til feilleddet σ_u^2 er usystematisk risiko. *Anta* nå at standardavviket på markedsporteføljen er $\sigma_m = 5.0$.

1. Lag spredningsdiagram for beta og avkastning og tegn inn regresjonslinjen for de to.
2. Beregn systematisk risiko for hvert selskap.
3. Begrunn hvorfor investorene bare vil ta hensyn til systematisk risiko i sine investeringsbeslutninger.
4. Anta du danner en likeveid portfølje av selskapene 1 og 5. Hva er porteføljens beta og dens systematiske risiko? Hva om vekten i selskap 1 i stedet er 25%, og ingen flere selskaper tas inn i porteføljen?

5

Hvordan oppfører markedsmodellen seg i enkeltperioder? I tabell 2 er det satt opp beregninger av sentrale størrelser for norske aksjer i 2018 og 2019, i alt 247 daglige observasjoner for hvert selskap. Bruk dataene som utgangspunkt for å besvare spørsmålene nedenfor.

1. Er sammenhengen mellom avkastning og beta stigende? Lag et spredningsdiagram og drøft.

Tabell 2 Sentrale kjennetegn ved de ti største børsnoterte selskapene i Norge. Markedsverdi er målt i millioner norske kroner, avkastningene er årlige, og den prosentvise avkastningen er beregnet med aritmetisk metode. Daglige data fra mars 2018 til mars 2019 fra Oslo Børs. Beta er beregnet med markedsmodellen

Selskap	Markedsverdi	Avkastning	St.avvik	Beta
Equinor	630,969	6.584	22.732	1.240
DNB	250,999	1.250	21.369	0.885
Telenor	250,357	-3.917	19.669	0.533
Mowi	107,697	30.438	23.901	0.767
Aker BP	105,153	41.473	37.444	1.943
Yara	93,726	0.556	25.746	1.094
Gjensidige	77,547	6.233	22.896	0.674
Norsk Hydro	68,817	-34.368	32.407	1.017
Orkla	68,347	-20.266	22.697	0.694
SalMar	49,898	41.496	33.102	0.797
OSEBX		5.676	14.711	

2. Gir beta eller standardavvik den beste sammenhengen med avkastning?
3. Kommenter problemer med å bruke ettårige beregninger av beta for enkeltselskap. Bruk gjerne innsikt om aksjemarkedets utvikling i 2018 og 2019.

6

Kan vi bestemme beta fra regnskapsmessige data? I tabell 3 er totalkapitalrentabiliteten (TKR) beregnet for Orkla og Ekornes. TKR er beregnet fra Driftsresultat over sum Gjeld og Egenkapital.

1. Beregn beta for Orkla og Ekornes fra tallene i tabellen.
2. Vil du anbefale å bruke denne fremgangsmåten? Begrunn.

Referanser

Copeland, T. E., J. F. Weston, and K. Shastri (2005). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Reading, MA: Pearson Education.

Tabell 3 TKR for Orkla og Ekornes og endring i OSEBX-indeksen 2003 til 2017. Kilde: Titlon

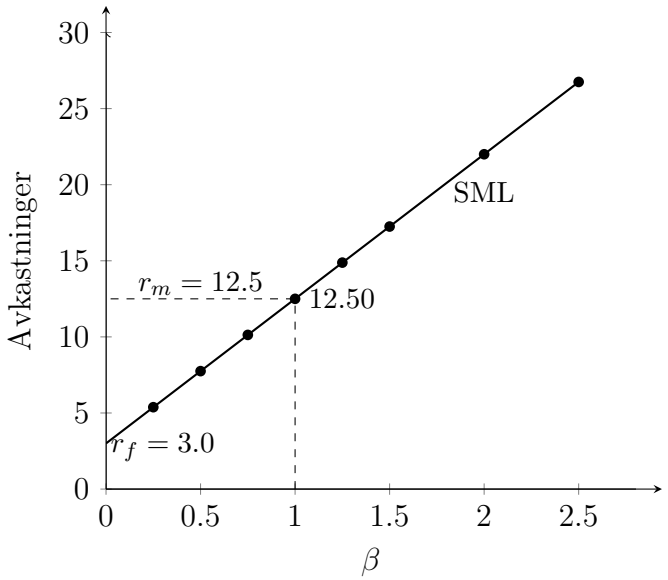
	TKR		
År	Orkla	Ekornes	r_{osebx}
2003	4.23	29.43	48.40
2004	4.03	32.13	38.45
2005	5.71	25.50	40.47
2006	5.63	29.76	32.43
2007	4.29	25.62	11.46
2008	2.25	24.10	-54.06
2009	5.39	24.41	64.78
2010	4.82	23.57	18.35
2011	4.44	18.41	-12.46
2012	4.93	15.94	15.36
2013	4.38	13.31	23.59
2014	6.21	11.16	4.95
2015	5.73	11.77	5.94
2016	7.04	18.82	12.06
2017	8.30	13.64	19.10

Kap. 11: Avvik fra markedsporteføljen
Løsningsforslag

1

1.1

Opplysningen om markedsporteføljens volatilitet er overflødig informasjon. Vi vet at $E(r_m) = 12.50$, og vi vet at $\beta_m = 1.00$. Siden SML er en rett linje og risikofri rente er $r_f = 3.00$ i punktet $\beta = 0.00$, har vi de to punktene vi trenger for å konstruere den rette SML-linjen. SML er vist i figur 1.



Figur 1: SML-linjen når $r_f = 3.0$ og $r_m = 12.5$

1.2

Avkastningene til aksjene er plottet inn i figur 1. Det viser seg at avkastningene ligger nøyaktig på SML-linjen. Alle aksjene er "riktig priset". Markedet er i likevekt.

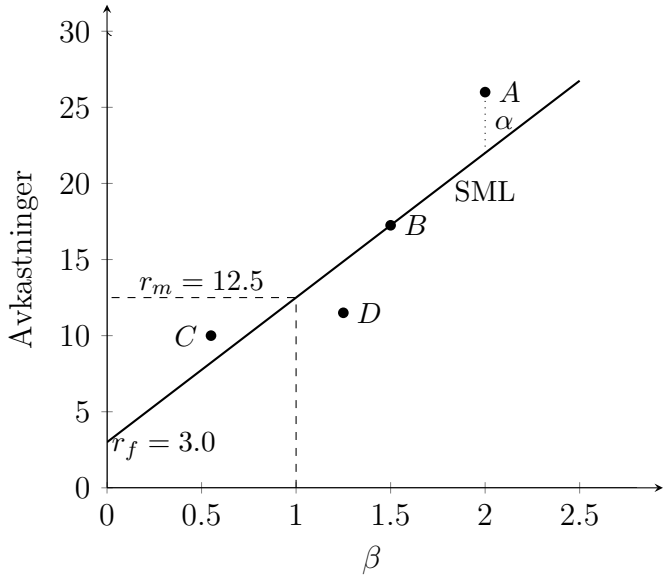
1.3

Markedet er i likevekt og aksjene er riktig priset etter kapitalverdimodellen. Aksjene har den avkastningen de skal ha ut fra mengden av systematisk risiko den bærer. Investorer kan ikke finne aksjer som gir ekstraavkastning ut over kravet til avkastning ifølge kapitalverdimodellen.

2 Positiv alfa?

2.1

Vi skal beregne SML-linjen. Vi har de samme opplysningene som i oppgave 1. Vi markerer samtidig avkstningene til aksjene A til D i diagrammet. Resultatet er vist i figur 2.



Figur 2: SML-linjen når $r_f = 3.0$ og $r_m = 12.5$. Avkastningene ligger ikke nødvendigvis på SML-linjen.

En aksjes α er da avstanden fra den faktiske avkastningen til kravet til avkastning ifølge kapitalverdimodellen. α kan være både negativ og positiv.

2.2

Investoren kan være på jakt etter såkalte positiv alfa-aksjer. Det er aksjer som har en forventet avkastning høyere enn krav til avkastning etter kapitalverdimodellen, dvs. investorens ønske er at:

$$\alpha_s = E(r_s) - r_f - (E(r_m) - r_f)\beta_s > 0 \tag{1}$$

Alfa-verdiene i prosent er vist nedenfor når opplysningene fra oppgaven er tatt inn.

Aksje	Forventet avkastning	Risikofri rente	Risiko-premie	Beta	Krav til avkastning	Alfa
A	26.00	3.00	9.50	2.00	22.00	4.00
B	17.25	3.00	9.50	1.50	17.25	0.00
C	10.00	3.00	9.50	0.55	8.23	1.78
D	11.50	3.00	9.50	1.25	14.88	-3.38

Investoren bør sette sine penger i aksjene A og C, som begge har en positiv alfa. En positiv alfa innebærer også at forventet avkastning plasserer seg over SML-linjen i diagrammet med systematisk risiko β og forventet avkastning på henholdsvis horisontal og vertikal akse. Videre kan investoren shorte aksje D.

2.3

Hva om den faktiske avkastningen avviker fra kravet til avkastning? Vi har to situasjoner, en hvor avkastningen er høyere enn avkastningskravet, en annen hvor den er lavere. I det første har vi en såkalt positiv α, i det andre tilfellet en negativ.

Positiv α Flere investorer tiltrekkes aksjen pga. dens høy avkastning. Forutsatt at kontantstrømmen fra selskapet ikke endres, vil prisen på aksjen stige, og dermed vil den prosentvise avkastningen falle. Fallet i avkastning vil foregå inntil avkastningen på aksjen samsvarer med kapitalverdimodellen. Da er $\alpha = 0$.

Negativ α Flere investorer vil selge seg ut av aksjen. Hvis kontantstrømmen ikke påvirkes, vil prisen på aksjen falle, og dermed vil den prosentvise avkastningen stige. Stigningen vil foregå inntil den er på linje med KVM's krav til avkastning, dvs. på SML. På SML er $\alpha = 0$.

3

3.1

Skal markedsporteføljen ikke være effisient, må mange nok investorer avviker fra markedsporteføljen i sine porteføljevalg. Dette kan skje på en av to måter:

1. Investorene har ikke rasjonelle forventninger og feiltolker informasjon. De kan tro de har positive alfa-aksjer, mens de i virkeligheten har negative.
2. Investorene har rasjonelle forventninger, men har andre begrunnelser for å avvike fra markedsporteføljen. Det kan være at man har forkjærlighet for visse aksjer, slik som

aksjer i sin favorittklubb i fotball, eller et ønske om å støtte økologisk bærekraftige selskaper.

3.2

Virkninger av avvik er at det er mulig å slå markedsporteføljen, for eksempel ved å finne frem til positive alfa-aksjer.

4

4.1

KVM er en likevektsteori som sier at det er et bestemt, lineært forhold mellom systematisk risiko uttrykt ved β og avkastningen på en eiendel. Grafisk er denne likevekten uttrykt ved SML-linjen, se figur 1. Avvik fra denne linjen kalles α og avviket kan være negativt eller positivt. Slike avvik vil fort fjernes, fordi investorer vil gjenkjenne avviket som en arbitrasjemulighet og kjøpe opp positiv-α-aksjer og selge negativ-α-aksjer. Prisene presses ned eller opp til SML og investor får ikke mer betalt enn den systematiske risikoen vedkommende er villig til å akseptere.

I det lange løp er det svært vanskelig å oppnå mer enn avkastningen i markedsporteføljen. Derfor er en fornuftig investeringsstrategi å holde en portefølje som avspeiler markeds-porteføljen. Kjøp og salg av aksjer for å sikre seg en positiv-α-aksje for eksempel medfører kostnader. Summen av kostnadene kan bli så store at den samlede avkastningen i porteføljen er lavere enn den ville vært ved en kjøp-og-hold-strategi.

En investor bør altså ikke følge rådet: *Ikke bare sitt der, gjør noe!*, men heller *Ikke gjør noe, sitt!*.

4.2

Undersøkelser viser at husholdninger diversifiserer for lite og handler for ofte, altså stikk i strid med implikasjonene fra KVM.

Det har vært pekt på mange grunner til at husholdningene oppfører seg som de gjør. Det er mulig at undersøkelsene ikke tar hensyn til investering i egen bolig, som oftest er den største investering folk har. Fra adferdsforskning er det pekt på at investorene ikke opptrer rasjonelt, men lar seg styre av ulike forhold, for eksempel:

Nærsynthet Velger aksjer i selskaper man allerede kjenner; sjøfolk investerer i shipping
Måler seg mot andre Bryr seg mest om utviklingen i kjentfolks porteføljer; man velger

som naboen, eller man følger en såkalt "bjellesau".

Andre deler av samme teoriretning peker på forhold som:

Overdreven selvtillit Overdreven tro på at man er i stand til å plukke aksjer bedre enn andre på markedet (Barber and Odean, 2000).

- Det viser seg at de som handler ofte har lavere avkastning på porteføljen enn de som sitter med en fast portefølje, en kjøp-og-hold-strategi.
- Menn handler oftere enn kvinner (Barber and Odean, 2001)

Sensasjonssøking Leting etter intense risiko-opplevelser. Slike investorer kan være på jakt etter "det siste nye"

5

Sentralt i løsningen av denne oppgaven er det at det finnes *informerte investorer* som vet om det kommer et bud eller ikke. Videre illustrerer oppgave *ikke-handelsteoremet* som sier at prisene kan bevege seg selv uten at noen handler er foretatt når ny informasjon tilflyter markedet.

5.1

Hans og de informerte investorene har lagt inn bud på priser under 50. Det innebærer at den eneste prisen som klarerer markedet er 50. Derfor vil ingen selge, og det foretas ingen handler. Hans oppnår ingen fortjeneste.

5.2

Oppkjøpsbudet blir ikke lagt inn. I dette tilfellet vil informerte investorer legge inn salgsordre for enhver pris under 50. Handler vil skje på priser mellom 40 og 50. Hans kjøper på disse nivåene i tro på at prisen vil stige til 50. Det skjer jo ikke, prisen faller tilbake til det opprinnelige likevektsnivået 40. Han vil oppnå negativ fortjeneste.

5.3

Hvis oppkjøpsbudet blir lagt inn er Hans' fortjeneste lik null. Hvis oppkjøpsbudet ikke legges inn, er forventet fortjeneste for Hans negativ. Utfallene har samme sannsynlighet for å inntreffe. La oss si at Hans i gjennsonitt kjøper til prisen 45. Da er forventet fortjeneste:

$$E(Resultat) = 0.5(0.0 + (40.0 - 45.0)) = -2.50.$$

Forventet resultat for Hans er -2.50.

6

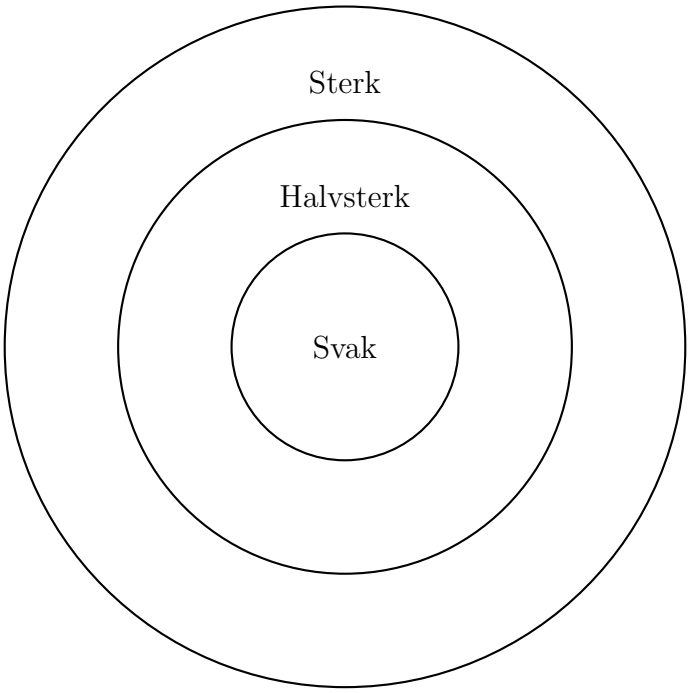
6.1

Markedseffisens sier at kjent informasjon allerede er reflektert i markedsprisene. Effisiens kommer i tre former og dreier seg om mengden av informasjon:

Svak form Informasjonsmengden består av historiske priser.

Halvsterk form Informasjonsmengden består av historiske priser og all annen offentlig informasjon.

Sterk form Informasjonsmengden består av historiske priser, all annen offentlig informasjon og privat informasjon.



Figur 3: Informasjonsmengde og former for effisiens. Jo sterkere formen for effisiens er, jo større er informasjonsmengden

6.2

En anomali er et vedvarende avvik fra markedseffisiens. En anomali gir investorer en mulighet å foreta arbitrasjehandler.

Anomalier er studert i svært mange sammenhenger. Ett eksempel er januar-effekten, dvs. at avkastningene sies å være høyere i januar enn i andre måneder av året. Dagseffekten sier

at enkelte dager har bedre avkastning enn andre. En tredje anomali er at små selskaper øyensynlig har bedre risikojustert avkastning enn andre.

6.3

I tabell 1 vises resultatene fra t-tester av signifikans for enkeltdager mot den gjennomsnittlige avkastningen for uken for alle aksjer og OSEBX. t-verdiene er regnet ut fra formelen

$$t = \frac{\bar{r}_{id} - \bar{r}_{pd}}{\sqrt{\frac{s_{id}^2}{N_{id}} + \frac{s_{pd}^2}{N_{pd}}}} \tag{2}$$

Her er $\bar{r}_{id}$ den gjennomsnittlige avkastningen for aksje i på dag d og $\bar{r}_{pd}$ er fotskriften for *Total*. N er antall dager. t-testen forutsetter at avkastningene er normalfordelte.

Tabell 1 t-verdier for sammenligning av avkastning for enkeltdager mot samlet avkastning for ukens dager i gjennomsnitt. Signifikans på 5%-nivå oppnås ved $t = \pm 1.96$

	Frontline	Statoil	DNB	Marine Harvest	OSEBX
Mandag	0.688	1.012	2.470	-0.429	1.586
Tirsdag	0.188	0.012	-2.577	-0.866	-0.997
Onsdag	-0.073	0.069	0.746	1.391	0.443
Torsdag	-0.918	-0.533	0.784	-1.256	-0.177
Fredag	0.202	-0.477	-1.654	1.022	-0.660

Tabellen viser at for Frontline er ingen av dagsavkastningene signifikant forskjellige fra *Total*. For 2010 og for Frontline kan vi ikke si at enkelte dager gir bedre eller dårligere avkastning enn for gjennomsnittet i uken.

Hva om vi sammenligner avkastningen til enkeltaksjer mot OSEBX? Resultatene av t-testen er vist nedenfor.

	Frontline	Statoil	DNB	Marine Harvest
Onsdag	0.000	0.165	1.105	1.883

Ingen av aksjeavkastningene er signifikant forskjellig fra OSEBX på 5%-nivå. Nærmest kommer Marine Harvest. t-verdien til Marine Harvest denne onsdagen i 2010 er signifikant på 10%-nivå, hvor kravet er $t = \pm 1.645$.

6.4

Analysen gir ikke grunnlag for å anbefale en investeringsstrategi. Riktignok har DNB signifikant t-verdier på mandag og tirsdag. En investeringsstrategi kunne være å kjøpe tidlig om morgenen mandag, holde aksjen ut dagen og så kjøpe tilbake på slutten av dagen tirsdag.

Risikoen ved en investeringsstrategi som denne, er at anomalier er relativt lette å oppdage. Når mange nok i aksjemarkedet vet om anomalien, vil flere benytte seg av de arbitrasjemulighetene som dette gir. Resultatet er at anomalien forsvinner.

7

Tilbøyelighetseffekten springer ut av psykologisk adferdsteori om hvordan vi velger. Vi har en tendens til å basere nye valg på valg som er foretatt tidligere. I aksjesammenheng betyr dette at vi foretar valg om salg gjennom en sammenligning med hva vi har betalt for aksjen.

Investeringsregelen fra tilbøyelighetseffekten er dermed at vi skal holde på aksjer som har tapt seg i verdi og selge aksjer som har steget. Grunnen til dette er at et tap er verre å akseptere enn en gevinst som er like stor i tallverdi.

Vi legger merke til at investeringsregelen bryter med vanlig investeringsråd. Tilbøyelighetseffekten sier at vi skal se bakover og sammenligne med tidligere priser. I vanlig investeringsteori er det derimot antatte fremtidige resultater sammenlignet med alternativer som avgjør om man skal satse på aksjen eller ikke.

8 Tilbøyelighet

Når vi følger investeringsregelen fra tilbøyelighetseffekten, kommer vi frem til følgende svar på de fire spørsmålene i oppgaven.

8.1

1. Selg Passiv, hold Aktiv. Passiv har oppnådd en pris mer enn 15, som var innkjøpsprisen. Vi taper ikke på å selge aksjen, og velger å realisere gevinsten. Vi beholder Aktiv, fordi prisen på aksjen er lavere enn innkjøpspris. Det er tungt å akseptere et tap, noe som fører til at vi ikke er villige til å selge for lavere pris enn det vi har betalt for aksjen.
2. Selg Aktiv, behold Passiv. I dette tilfellet er det motsatt mekanisme som slår gjennom. Aktiv får dekket innkjøpsprisen, Passiv gjør det ikke.

8.2

Vi har nå kjøpt i periode 3. Prisene i periode 3 er nå referanseprisene gitt av innkjøpsprisene i periode 3 for beslutninger om kjøp eller salg i senere perioder.

1. Selg Aktiv, behold Passiv. Aktiv er høyere enn innkjøpspris, Passiv er det ikke.
2. Selg begge, når vi vurderer salg i periode 5. Aktiv er høyere enn innkjøpspris, Passiv er lik innkjøpspris. For Passivs del innebærer det at vi ikke har tapt på investeringen. Dermed føler vi ikke noe tap ved å selge denne aksjen.

9 Tilbøyelighet

1. Likevektsprisen ville være 55. Alle i markedet vil altså være fornøyd med en 10% stigning, og de ville alle handle på dette prisnivået.
2. Megleren ville kjøpe på priser over 55. En 10% prisstigning ville bli tatt som et signal på at nyheten er gunstig, og at prisen til slutt vil ende på 60. Investoren vil altså ha en arbitrasjefortjeneste på 5 pr aksje.

Referanser

Brad M. Barber and Terrance Odean. Trading is hazardous to your wealth: The common stock investment performance of individual investors. *Journal of Finance*, 55(2):773–806, 2000.

Brad M. Barber and Terrance Odean. Boys will be boys: Gender, overconfidence, and common stock investment. *Quarterly Journal of Economics*, 116(1):261–292, 2001.

Kap. 11: Avvik fra markedsporteføljen

1

En analytiker har funnet ut at beta og avkastning for et utvalg aksjer er som følger.

Aksje	1	2	3	4	5	6	7	8
Beta	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	2.50
Avkastning	5.38	7.75	10.13	12.50	14.88	17.25	22.00	26.75

Videre henter analytikeren inn informasjon om markedsforhold. Det viser seg at avkastningen på markedsporteføljen er 12.50%, volatiliteten i markedsporteføljen er 18.50% og risikofri rente er 3.00%.

1. Beregn SML og vis den i diagram.
2. Plott avkastningene for aksjene inn i diagrammet.
3. Hva forteller det ferdige diagrammet?

2

En investor forsøker å finne aksjer som er feilpriset i markedet. Han vurderer følgende kandidater, hvor avkastning og volatilitet er oppgitt i prosent:

Aksje	Forventet avkastning	Volatilitet	Beta
A	25.00	26.00	2.00
B	17.25	30.00	1.50
C	10.00	35.00	0.55
D	11.50	20.00	1.25

Avkastningen på markedsporteføljen er 12.50%, volatiliteten i markedsporteføljen er 18.50% og risikofri rente er 3.00%.

1. Beregn SML og plott de ulike aksjenes avkastning inn i SML-diagrammet.
2. Hvilke aksjer ville du anbefale investoren å kjøpe og hvilke bør selges?

3. Hva vil skje med en aksje som har en unormalt høy avkastning sammenlignet med avkastningskravet ifølge kapitalverdimodellen? Hva med en som har lavere?

3

1. I hvilke tilfeller er markedsporteføljen ikke en effisient portefølje?
2. Hvilke virkninger har det at markedsporteføljen ikke er effisient?

4

1. Hvorfor impliserer kapitalverdimodellen at investorene bør handle svært sjeldent?
2. Følger husholdningene dette rådet? Nevn avvik og grunner til avvik.

5

Hans, en bekjent fra småskolen, er i dag hjernekirurg med et overdrevent høyt selvbilde. Hobbyen er å handle aksjer og han tror på egne spådommer om aksjenes utvikling 100%. Faktum er at han er like lite informert som alle andre. Nå går det rykter om et oppkjøp av legemiddelselskapet Helseskann til en kurs på 50 pr. aksje. Aksjen handles i dag for 40. En avklaring av om det blir oppkjøp eller ikke kommer i løpet av dagen. Hans er sikker på at det går mot et oppkjøpsbud, og legger inn en kjøpsordre på Helseskann på kurser under 50 pr. aksje. I realiteten er sjansen for et bud 50%, men noen få mennesker vet sikkert om det blir gitt et bud eller ikke. De har også lagt inn kjøpsordre på Helseskann. Ingen andre handler i aksjen.

1. Beskriv hva som vil skje med aksjekursen når disse ordrene er lagt inn i ordreboken hvis det faktisk skjer et bud på aksjene i Helseskann fra et selskap som ønsker å overta. Hva, om noe, vil Hans tjene på at det blir lagt inn et oppkjøpsbud?
2. Hva er høyeste og laveste pris aksjen handles for etter at ordrene er lagt inn hvis det viser seg at et oppkjøpsbud ikke blir lagt på bordet? Taper Hans i dette tilfellet?
3. Hva er forventet inntjening for Hans?

6

1. Forklar hva som menes med markedseffisiens i svak form, halvsterk form og sterk form.
2. Hva er en "anomali"? Gi eksempler på anomalier.
3. Ta utgangspunkt i tallene i tabellen nedenfor. Er avkastningen for Frontline på noen dager signifikant forskjellig fra *Total*, dvs. uken som helhet? Er avkastningen på onsdag for noen aksjer signifikant forskjellig fra OSEBX?

4. På bakgrunn av analysen, ville du anbefale en investeringsstrategi til din nærmeste familie basert på dagseffekter?

Tabell 1 Daglige gjennomnsittlige avkastninger i prosent ("Gj.snitt"), standardavvik ("St.avvik") i 2010 for utvalgte aksjer og OSEBX.

	Frontline	Statoil	DNB	Marine Harvest	OSEBX
Mandag					
Gj.snitt	0.22238	0.19809	0.903509	0.057395	0.407697
St.avvik	2.025335	1.175134	2.003978	2.236045	1.332974
Dager	48	48	48	48	48
Tirsdag					
Gj.snitt	0.069869	0.006393	-0.58262	-0.16171	-0.18641
St.avvik	2.599553	1.647865	1.767251	2.897432	1.720193
Dager	52	52	52	52	52
Onsdag					
Gj.snitt	-0.03204	0.020729	0.330789	0.724753	0.174262
St.avvik	2.607946	1.677694	1.7657	2.430025	1.57844
Dager	52	52	52	52	52
Torsdag					
Gj.snitt	-0.33653	-0.11568	0.382385	-0.16974	0.030358
St.avvik	2.336959	1.446099	2.139315	1.85154	1.391297
Dager	50	50	50	50	50
Fredag					
Gj.snitt	0.067576	-0.08695	-0.36362	0.597892	-0.06494
St.avvik	2.235851	1.16448	1.879177	2.429389	1.259967
Dager	49	49	49	49	49
Total					
Gj.snitt	-0.00348	0.003481	0.125798	0.21053	0.068818
St.avvik	2.366796	1.438669	1.972952	2.410179	1.473726
Dager	251	251	251	251	251

7

Forklar hva som menes med tilbøyelighetseffekten.

8 Tilbøyelighetseffekt

Anta at investorene i en økonomi har en *tilbøyelighetseffekt* når de kjøper og selger aksjer. Anta videre at over et tidsrom kan følgende aksjekursutvikling observeres for aksjene Aktiv og Passiv:

	Periode					
Aksje	1	2	3	4	5	6
Aktiv	10	8	6	9	13	17
Passiv	15	14	16	18	15	14

1. Anta at du investerer og at du kjøpte i periode 1.
   (a) Anta at vi nå befinner oss i periode 3. Forklar hvilke aksjer du ville selge og hvilke du ville kjøpe.
   (b) Hvilke ville du beholde og hvilke ville du selge, dersom vi befinner oss i periode 6?
2. Anta at du kjøpte i periode 3.
   (a) Vi er nå i periode 6. Hvilken aksje ville du selge?
   (b) Nå er perioden 5. Hvilken aksje ville du selge?
3. Nevn andre effekter investorer kan være påvirket av.

9 Tilbøyelighet

Anta at alle investorer har tilbøyelighetstrekk. Nå finnes en ny aksje på børsen. Den omsettes for 50, og alle investorene kjøper aksjen i dag. Om ett år vil selskapet kjøpes opp til en pris av enten 60 eller 40, avhengig av den informasjonen som tilflyter markedet i løpet av året. Aksjen kommer ikke til å betale dividende i løpet av året. Investorer vil selge aksjen så snart prisen går opp mer enn 10%.

1. Anta at gode nyheter fremkommer etter seks måneder, slik at oppkjøpstilbudet blir 60. Hva er likevektsprisen som aksjen vil omsettes for etter at nyheten slippes, altså, den prisen som gir tilbud lik etterspørsel.
2. Anta at du er den eneste investoren som ikke har tilbøyelighetstrekk og at dine handler er for små til å påvirke markedet. Sett at du ikke vet hva som kommer til å hende. Ved hvilken pris ville du være villig til å kjøpe? investoren vil være villig til å kjøpe til priser opp til 60.

10

Kap 13 Opsjonsprising: Løsninger

1 Grunnleggende sammenhenger

1.1

Tabell 1 viser gevinsten for opsjonen ved ulike utøvelseskurser.

Tabell 1 Verdien av opsjonen i eksempel 1.1. Utøvelseskurs = 100

Kurs	Utøvelses-kurs	Gevinst
80	100	0
90	100	0
100	100	0
110	100	10
120	100	20
130	100	30

Er kursen over 100, vil opsjonen benyttes. Er kursen under 100, er det billigere å kjøpe aksjen på børsen. Legg også merke til at vi som regel vil betale en premie for å kjøpe opsjonen. Denne premien kommer da som fradrag fra gevinsten.

1.2

Vi har altså at $X = 100$ og S_T enten 50 eller 150.

Når $S_T = 50$, har vi at:

$$C_T = \max[0, 50 - 100] = 0$$

0 er altså større enn -50. Kjøpsopsjonens verdi er dermed 0, siden vi skal velge det høyeste av de to tallene inne i parentesen.

Når i stedet $S_T = 150$ er opsjonens verdi:

$$C_T = \max[0, 150 - 100] = 50$$

Det høyeste tallet inne i parentesen er positivt, og regelen sier at vi skal velge dette tallet, dvs. 50 i dette tilfellet.

1.3

Når $S_T = 50$, har vi at salgsopsjonen er verdt:

$$P_T = \max[0, 100 - 50] = 50$$

Er derimot $S_T = 150$, vil vi ha:

$$P_T = \max[0, 100 - 150] = 0$$

Salgsopsjonen har altså verdi i det stikk motsatte tilfellet av kjøpsopsjonen. Er innløsningskursen den samme, er altså kjøpsopsjonen ITM når salgsopsjonen er OTM, og motsatt.

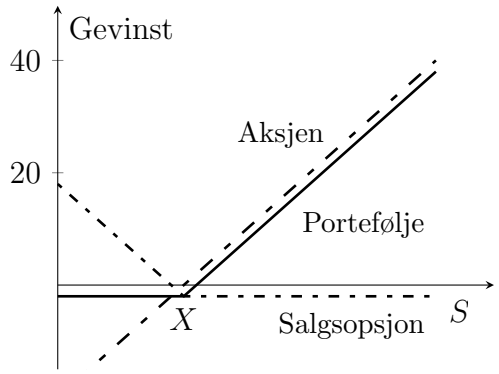
1.4 Sikring med salgsopsjon

Tabell 2 Gevinst i en portefølje av salgsopsjon og aksje fra eksempel 1.4.

Kurs	Aksje	Salgs-opsjon	Porte-følje
80	-20	18	-2
90	-10	8	-2
100	0	-2	-2
110	10	-2	8
120	20	-2	18
130	30	-2	28
140	40	-2	38

Tabellen danner grunnlag for figuren over verdipapirene og porteføljen, se figur 1.

Ved hjelp av salgsopsjonen har altså eieren av aksjen kjøpt en forsikring mot et kursfall. Premien på denne forsikringen er den premien man betaler for salgsopsjonen. I dette tilfellet har altså salgsopsjonen blitt benyttet for å sikre verdier. Opsjonen inngår i en strategi for risikostyring.



Figur 1: Kontantstrøm for kombinasjonen av en aksje og en kjøpt salgsopsjon. "Protective put".

Legg også merke til at kombinasjonen, eller porteføljen, av eiendelen og salgsopsjonen gir en gevinstprofil som en kjøpt kjøpsopsjon. Ved hjelp av ulike kombinasjoner av verdipapirer og derivater kan man få frem nær sagt en hvilken som helst gevinstprofil. Dette kalles ofte finansiell ingeniørkunst, eller finansiell alkymi.

1.5

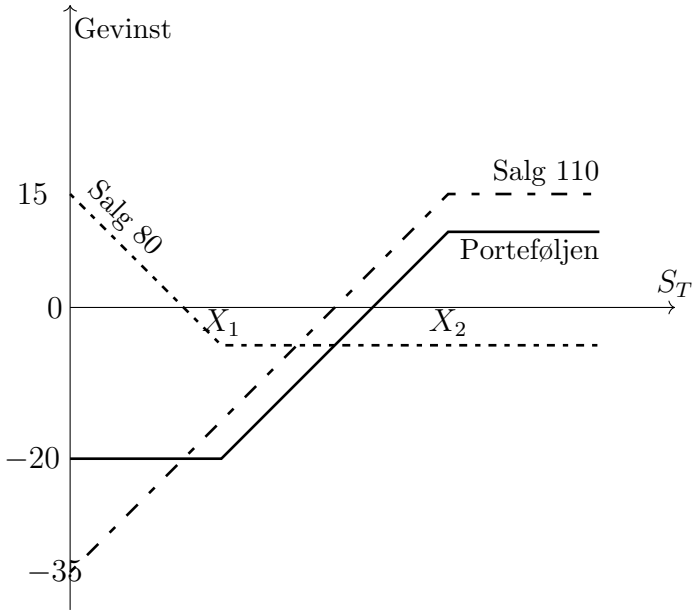
Tabellen over aktuelle verdier er vist nedenfor.

Tabell 3 Gevinstprofil for porteføljen i eksempel 1.5

Aksje-kurs	Premie 80	Premie 110	Salg 80	Salg 110	Porte-følje
60	-5	15	20	-50	-20
70	-5	15	10	-40	-20
80	-5	15	0	-30	-20
90	-5	15	0	-20	-10
100	-5	15	0	-10	0
110	-5	15	0	0	10
120	-5	15	0	0	10
130	-5	15	0	0	10

Strategien er vist i figur 2.

Vi ser at strategien sikrer en gevinst når prisene stiger, og at utstedelsen av salgsopsjonen på kurs 110 finansierer kjøpet av salgsopsjonen på 80. Dermed er både finansieringsbehovet ved kjøp eliminert, og man har skaffet seg et gulv for mye man kan tape. Motvekten er selvsagt at man heller ikke får full gevinst (15) hvis prisene beveger seg slik man antar.



Figur 2: Gevinstprofil for spekulasjonsstrategien av utstedelse av en salgsopsjon på høy innløsningskurs (X_2) og kjøp av en salgsopsjon på lav kurs (X_1). "Bull spread".

2 Røkke og Wallenberg

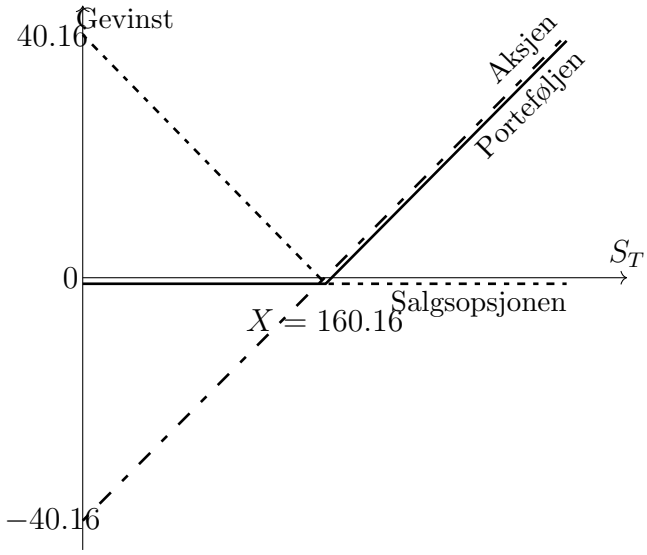
Gevinstprofilene er vist i figurene 3 og 4.

Wallenberg har altså forsikret seg mot tap på aksjen ved å avtale en salgsopsjon. Aker har på sin side skrevet salgsopsjonen uten en motgående forsikring, etter hva vi får opplyst. Hvis aksjekursen på utøvelsestidspunktet er 80, vil altså Aker tape $160,16 - 80,00 = 80,16$ for hver aksje som Wallenberg løser inn.

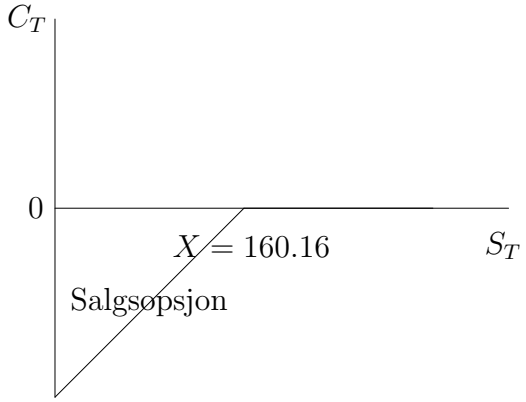
3 Kombinasjon

Porteføljen med en kjøps- og en salgsopsjon er vist i figur 5.

Det vil være gunstig å holde en portefølje med salgs- og kjøpsopsjon når du forventer økt volatilitet i markedene, men er usikker på om det blir en oppgang eller en nedgang. Porteføljen vil gjøre det tilsvarende svakt i tider med stabile markeder.



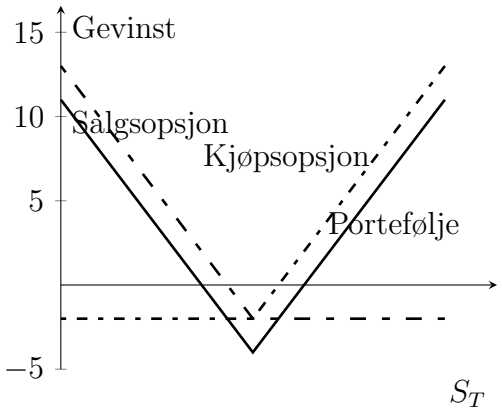
Figur 3: Wallenbergs gevinstprofil for kombinasjonen av en aksje og en kjøpt salgsopsjon. Porteføljen er vist med tykk strek.



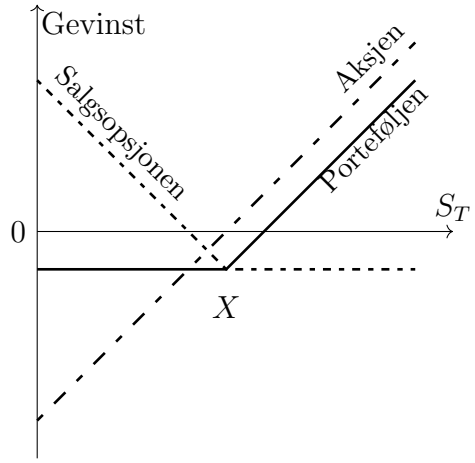
Figur 4: Akers gevinstprofil for utstedelsen av en salgsopsjon med utøvelseskurs $X = 160,16$.

4 Sikring

Gevinstprofilen for sikringen mot et kursfall er den samme som vi støtte på i oppgave 1.4 og 2. Den prinsipielle formen fremkommer i figur 6. Denne form for sikring kalles gjerne *covered put* fordi man bruker en salgsopsjon for å forsikre seg mot store kursfall.



Figur 5: Salgs- og kjøpsopsjonen og porteføljen av de to opsjonene



Figur 6: Sikring med en salgsopsjon

5 Kjøp-salgspariteten: Energifirmaet Koks

Vi bruker kjøps-salgspariteten:

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f}X = P_0 + S_0 \tag{1}$$

Vi isolerer C_0 og har:

$$C_0 = 12.40 + 85.00 - \frac{1}{1.075}90.00 = 13.68$$

6 Arbitrasje i Vest?

Oppgave 1 Vi kan først sjekke at kjøps-salgspariteten ikke stemmer. Vi bruker altså (1):

$$C_0 = P_0 + S_0 - \frac{1}{1+r_f}X$$
$$14.00 > 6.50 + 40.00 - \frac{1}{1.06}35.00 = 13.481$$

Forskjellen er altså $14.00 - 13.481 = 0.519$. Kjøpsopsjonen er altså overpriset sammenlignet med porteføljen av salgsopsjonen, aksjen og nåverdien fratrukket et sikkert beløp lik utøvelseskursen.

Oppgave 2 For å sikre gevinsten må man selge kjøpsopsjonen, kjøpe salgsopsjonen og aksjen, og ta opp et risikofritt lån på nåverdien av utøvelseskursen. Vi får altså:

$$C_0 + \frac{1}{1+r_f}X - P_0 - S_0 = 14.00 + 33.02 - 6.50 - 40.00 = 0.519$$

Man får altså 0.519 pr. aksje. Kjøper man 1,000 aksjer får man en arbitrasjegevinst på 519.

7 Opsjonens grenseverdier

At opsjonene ikke utøves før forfall, betyr at vi har med europeisk opsjoner å gjøre.

Oppgave 1 Siden en opsjon til å kjøpe en aksje til en positiv pris ikke kan være mer verdt enn aksjeprisen, må vi ha at $C_0 \leq S_0$. Den maksimale verdien av opsjonen er følgelig 500.

Oppgave 2 Siden en opsjon til å selge en aksje til en positiv pris ikke kan være mer verdt enn utøvelseskursen, må vi ha at $P_0 \leq X$ på forfallsdagen. Den maksimale verdien av salgsopsjonen er følgelig 550 på utøvelsestidspunktet. Siden opsjonen er europeisk, innebærer det at dagens pris på salgsopsjonen kan være maksimalt den neddiskonterte verdien av utøvelseskursen. Generelt må vi ha at $P_0 \leq \frac{1}{(1+r_f)^t}X$

Oppgave 3 Kjøpsopsjonen kan aldri ha lavere verdi enn null.

Oppgave 4 Salgsopsjonen kan aldri ha lavere verdi enn null.

8 Grenseverdi ved arbitrasje

Vi ser igjen på europpeiske opsjoner. At forfallstidspunkt er om et halvt år, betyr at $t = 0.5$.

Oppgave 1 På forfallstidspunktet T vil portefølje A være verdt S_T. Portefølje B kan ha en av to verdier. Hvis $S_T > X$, utøves opsjonen og porteføljen er verdt S_T. Hvis $S_T < X$, kastes opsjonen og porteføljen er verdt X. I sum er porteføljen verdt $\max(S_T, X)$.

Siden portefølje B er mer verdt på forfallstidspunktet, betyr at den må være mer verdt i dag, eller

$$C_0 + \frac{1}{(1+r_f)^t} X \geq S_0 \tag{2}$$

Siden opsjonen ikke kan ha en negativ verdi, må vi ha at

$$C_0 \geq \max\left(S_0 - \frac{1}{(1+r_f)^t} X, 0\right) \tag{3}$$

Den laveste verdien kjøpsopsjonen kan ha er altså null. Den høyeste verdien er forskjellen mellom dagnes aksjekurs og den neddiskonterte verdien av utøvelseskursen.

Med tallene i oppgaven har vi at

$$C_0 = \max\left(500 - \frac{1}{1.075^{0.5}} 525, 0\right) = \max(500 - 506.355, 0) = 0.00$$

Oppgave 2 Vi skal bestemme grenser for salgsopsjonen. Portefølje C er verdt X på utøvelsestidspunkteet. Portefølje D er verdt S_T hvis $S_T > X$ og X hvis $S_T < X$. I sum er porteføljen verdt $\max(S_T, X)$.

I dag må vi på samme måte som under Spørsmal 1 ha at

$$P_0 + \frac{1}{(1+r_f)^t} X \geq S_0 \tag{4}$$

og salgsoposjonen må følgelig ha grensene

$$P_0 \geq \max\left(\frac{1}{(1+r_f)^t} X - S_0, 0\right) \tag{5}$$

Vi bruker tallene i oppgaven og finner at

$$P_0 = \max\left(\frac{1}{1.075^{0.5}}525 - 500, 0\right) = 6.355$$

Kap. 12 Opsjoner: Oppgaver

1 Grunnleggende sammenhenger

1. Du vurderer å kjøpe en kjøpsopsjon på en aksje. Utøvelseskursen er 100. Opsjonen kan bare utøves på en bestemt dag. Anta kursen kan være fra 80 til 130 på utøvelsestidspunktet. Når vil opsjonen benyttes?
2. En aksje med innløsningskurs på 100 kan ved forfall enten være verdt 50 eller 150. Hva er kjøpsopsjonen verdt i de to tilstandene?
3. Bruk tallene fra oppgave 1. Hva er salgsopsjonen verdt i de to tilstandene?
4. Anta du eier en aksje som er kjøpt til kurs 100. Du er usikker på fremtiden, og ønsker å sikre et "gulv" som aksjekursen ikke kan synke under. Du kjøper en salgsopsjon med utøvelseskurs 100. Premien er 2 for opsjonen. Vis gevinstprofilen til porteføljen av aksjen og salgsopsjonen i kursintervallet 80-140.
5. Anta du tror prisen på en aksje vil stige, og at du vil lage en strategi som tar hensyn til dette, samtidig som du vil begrense risikoen. På aksjen kan det kjøpes og selges kjøps- og salgsopsjoner på kurs 80 og på 110. Premien for salgsopsjonen på 80 er 5, mens den er 15 på 110. Anta at du utsteder en salgsopsjon på 110 og kjøper en på 80. Vis gevinstprofilen av denne strategien over kursene fra 60 til 130.

2 Røkke og Wallenberg

(Dagens Næringsliv nett 14.10.2010) Kjell Inge Røkke er forberedt på å bla opp nær 1,8 milliarder kroner til sommeren på tidenes dyreste svenskehandel, skriver Dagens Næringsliv.

Bakgrunnen for den kostbare svenskehandelen er en avtale Røkke-kontrollerte Aker inngikk sommeren 2007 da selskapet solgte deler av sin aksjebeholdning i Aker Solutions til den norske staten og Wallenberg-sfæren. Wallenberg er blant Sveriges rikeste og mektigste familier.

I motsetning til Næringsdepartementet, sørget svenskene for å inngå en avtale som gjorde at de ikke kunne tape penger på et eventuelt kursfall i Aker Solutions.

Avtalen går i korte trekk ut på at Aker må kjøpe Wallenbergs Aker Solutions-aksjer for 160.16 kroner i juni 2011, hvis svenskene ønsker dette. Den norske stat og Wallenberg-selskapene betalte 145.60 kroner per aksje i 2007.

Høsten 2010 handles aksjen for i overkant av 80 kroner, etter at Aker Solutions igår fikk seg en knekk på Oslo Børs.

1. Anta kursen på Aker Solutions er 80 på utøvelsestidspunktet. Vis gevinstprofilen for Wallenberg og for Aker Solutions.

3 Kombinasjon

Du eier både en kjøps- og en salgsopsjon på den samme aksjen. Opsjonene utløper på den samme forfallsdatoen og de har samme utøvelseskurs 45.00. For hver opsjon må du etale 2. Vis gevinstprofilen til porteføljen inkludert premiene på forfallsdatoen. Når vil det være gunstig å holde en slik portefølje?

4 Sikring

Du holder aksjer på et selskap, men utviklingen i verdensøkonomien gjør deg bekymret for et fall i aksjekurser. Vis hvordan du kan bruke opsjoner til å sikre verdien av aksjene.

5 Kjøp-salgspariteten: Energifirmaet Koks

Energifirmaet Koks omsettes for tiden for 85.00. Aksjen betaler ikke utbytte. En ettårig europeisk salgsopsjon på aksjen med utøvelseskurs 90.00 omsettes for 12.40. Den risikofrie renten er 7.5%.

1. Hva er prisen på en kjøpsopsjon på firmaets aksjer med samme utøvelseskurs?

6 Arbitrasje i Vest?

Du oppdager en arbitrasjemulighet. Dagens aksjekurs på Vest er 40.00 pr. aksje og den risikofrie renten er 6.00%. En ettårig salgsopsjon på selskapets aksjer med utøvelsespris på 35.00 omsettes for tiden for 6.50, mens en identisk kjøpsopsjon går for 14.00.

1. Vis at der er arbitrasjemuligheter.
2. Vis hvordan du går frem for å sikre gevinsten.

7 Opsjonens grenseverdier

Anta en aksje omsettes for 500 og at aksjen ikke utbetaler dividende, fordi selskapet er i en vekstfase og prioriterer investeringer. Opsjonene utøves ikke før forfall.

1. Hva er den høyeste mulige prisen på en kjøpsopsjon på aksjen?
2. Hva er den høyeste mulige prisen på en salgsopsjon på aksjen med en utøvelsespris på 550?
3. Hva er den laveste mulige prisen på en kjøpsopsjon på aksjen med en utøvelsespris på 700?
4. Hva er den laveste mulige prisen på en salgsopsjon på aksjen med en utøvelsespris på 675?

8 Grenseverdi ved arbitrasje

Anta du kjøper aksjen til 500. Kall dette portefølje A. Samtidig investerer du i en portefølje B som består av en opsjon til å kjøpe aksjen kombinert med en kontantbeholdning som er den neddiskonterte verdien av utøvelseskursen på 525. Opsjonene har forfall om et halvt år.

1. Hva er den høyeste mulige prisen på en kjøpsopsjon på aksjen når den risikofrie renten er 7.5%
2. Sett sammen to nye porteføljer. I portefølje C befinner seg en kontantbeholdning som er den neddiskonterte verdien av utøvelseskursen på 525. I portefølje D befinner seg en salgsopsjon til å selge aksjen på forfallstidspunktet og en aksje. Hva er den høyeste mulige prisen på en salgsopsjon på aksjen. Den risikofrie renten er også nå 7.5%.

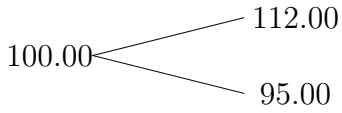
Kap 13 Opsjonsprising: Løsninger

1 Prising med arbitrasje

Oppgave 1 For å finne opsjonens verdi, bruker vi følgende fremgangsmåte:

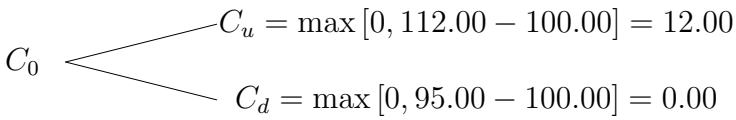
1. Definer aksjens prisprosess. Gitt dagens pris, kan aksjen ha en av to verdier neste periode, enten $S_0(1+u)$ eller $S_0(1+d)$.
2. Bestem verdien av kjøpsopsjonen ved forfall. Det vil bare være to mulige priser på kjøpsopsjonen ved forfall.
3. Sett verdien av en ukjent "likeverdig portefølje" av aksjen og lån lik med kontantstrømmen av kjøpsopsjonen. Dette gir to ligninger med to ukjente.
4. Benytt loven om en pris: Når to eiendeler har samme kontantstrømmer på et fremtidig tidspunkt, må de to eiendelene være like mye verdt i dag. Siden porteføljen og kjøpsopsjonen har samme kontantstrømmer, må de være like mye verdt.

Første steg er å bestemme aksjens prisprosess. Vi ser at aksjens pris i neste periode er enten $100.00 \cdot 1.12 = 112.00$ eller $100.00 \cdot 0.95 = 95.00$, se figur 1.



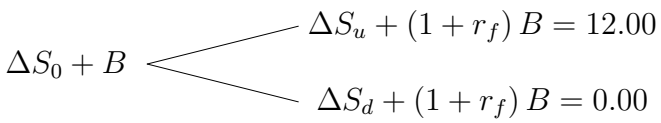
Figur 1: Aksjens prisprosess: To sluttverdier er mulige.

Neste steg er å bestemme opsjonens verdi ved forfall. Utøvelseskursen er 100.00. Da har vi altså at kjøpsopsjonen kan ha verdiene 12.00 og 0.00 ved forfall, se figur 2



Figur 2: Verdien av en kjøpsopsjon ved forfall: To sluttverdier er mulige.

I **tredje steg** skal vi altså sette sammen en portefølje som etterligner utbetalingene til opsjonen ved forfall. Portefølje som består av en andel Δ av aksjen og et kontantbeløp B. Figur 3 illustrerer.



Figur 3: Verdien av en porteføljen: To sluttverdier er mulige.

Fra figur 3 ser vi at dette tilsvarer to ligninger med to ukjente, Δ og B. Vi setter inn verdiene for aksjepriser i de to tilstandene og den risikofrie renten. De to ligningene er dermed:

$$\begin{aligned} 112.00\Delta + 1.06B &= 12.00 \\ 95.00\Delta + 1.06B &= 0 \end{aligned}$$

Fra siste ligning har vi at $B = -95.00\Delta/1.06$. Vi setter dette inn i første ligning og løser for Δ:

$$\begin{aligned} 112.00\Delta + 1.06\frac{-95.00\Delta}{1.06} &= 12.00 \\ 17.00\Delta &= 12.00 \\ \Delta &= 0.70588 \end{aligned}$$

Dermed har vi at B må være:

$$B = -\frac{95.00 \cdot 0.70588}{1.06} = -63.26$$

Vi skal altså investere i aksjen med en andel 0.70588, samtidig som vi skal ta opp et lån på 63.26.

I **fjerde steg** bruker vi innsikten om arbitrasjefri handel. Porteføljen vi nettopp har satt sammen gir samme kontantstrøm som opsjonen i periode 1. Siden de har samme verdi i periode 1, må de også ha samme verdi i periode 0. Dermed kan vi sette prisen på opsjonen ut fra de kjente verdiene til aksjen og lånet:

$$C_0 = 0.70588 \cdot 100.00 - 63.26 = 7.328$$

En arbitrasjefri pris på opsjonen er altså 7.328. Opsjonen er altså like mye verdt som en andel i aksjen og et lån. Dette kan tolkes som et kjøp av aksjen finansiert med lån. Opsjonen vil derfor være mer volatil enn aksjen selv. Generelt har vi altså at

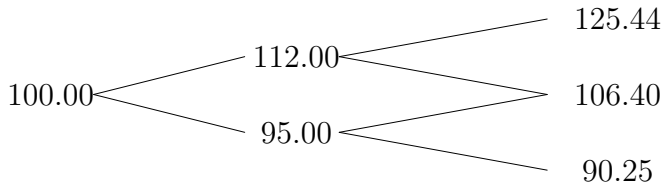
$$C_0 = \Delta S_0 - B \tag{1}$$

Det viser seg at denne sammenhengen er svært nyttig også i BSM-modellen og i verdset-

ting av et selskaps eiendeler.

Vi har altså funnet opsjonens verdi i dag. Vi har satt sammen en portefølje som nøyaktig *replikerer*, eller avbilder, etterligner, kjøpsopsjonens kontantstrøm. Siden vi kjenner porteføljens verdi, kjenner vi også opsjonens.

Oppgave 2 Vi skal nå utvide problemet til to perioder. Ved å gå gjennom de samme fire steg som for en periode, kommer vi etter hvert frem til opsjonens pris i dag. Vi starter med prisprosessen som altså gir prisene i periode 1 og 2, se figur 4.



Figur 4: Aksjens prisprosess i to perioder: Tre sluttverdier er mulige.

Opsjonens verdi (steg 2) i de tre tilstandene vil være 25.44, 6.40 og null. Ser vi nærmere på figur 4, ser vi at vi har to binomiske utfall i annen periode. Verdsettingen av opsjonen foregår nå fra høyre til venstre. Vi verdsetter de to utfallene hver for seg til periode 1 og verdsetter deretter fra periode 1 til 0.

I det binomiske utfallet oppe til høyre har vi altså ligningene, når vi setter sammen porteføljen med aksjer og obligasjoner:

$$125.44\Delta + 1.06B = 25.44$$
$$106.40\Delta + 1.06B = 6.40$$

Vi finner på vanlig måte at $\Delta = 1.00$ og $B = -94.34$. Da har vi opsjonsverdien i første periode:

$$C_u = 1.00 \cdot 112.00 - 94.34 = 17.66$$

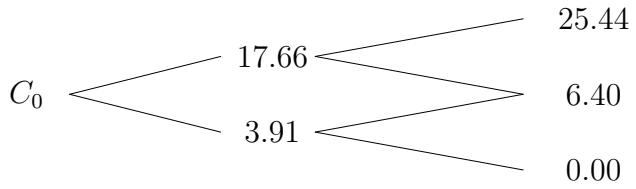
Tilsvarende har vi for det binomiske utfallet nede til venstre følgende ligninger:

$$106.40\Delta + 1.06B = 6.40$$
$$90.25\Delta + 1.06B = 0.00$$

Vi finner på vanlig måte at $\Delta = 0.39625$ og $B = -33.74$. Da har vi opsjonsverdien i første periode:

$$C_d = 0.39625 \cdot 95.00 - 33.74 = 3.91$$

Vi har altså nå funnet opsjonsverdiene i første periode, se figur 5.



Figur 5: Opsjonsverdier i periode 1 og 2

Da har vi til slutt problemet fra periode 1 til periode 0:

$$112.00\Delta + 1.06B = 17.66$$
$$95.00\Delta + 1.06B = 3.91$$

Vi finner på vanlig måte at $\Delta = 0.80882$ og $B = -68.80$. Da har vi opsjonsverdien i startperioden:

$$C_0 = 0.80882 \cdot 100.00 - 68.80 = 12.08$$

Sammenlignet med opsjonsverdien i Oppgave 1, har altså verdien økt. Dette er ikke uventet; verdien av opsjonen øker med tid til forfall.

2 Risikonøytral prising

Generelt har vi at risikonøytral prising i en periode kan skrives som:

$$C_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[qC_u + (1-q)C_d\right] \tag{2}$$

(2) er en ligning med en ukjent q. Løser vi med hensyn på denne, kan vi definere de to sannsynlighetene i tilstandene.

$$q = \frac{r_f - d}{u - d} \qquad \text{og} \qquad 1 - q = \frac{u - r_f}{u - d} \tag{3}$$

q oppfører seg så å si som en sannsynlighet. For det første har den egenskapen at $0.0 \leq q \leq 1.0$. For det andre er q en sannsynlighet i et viktig tilfelle, når investorene er risikonøytrale. Basert på (2) kan kjøpsopsjonens verdi sees på som den forventede verdien av kjøpsopsjonen ved forfall, diskontert med risikofri rente og sannsynligheten for kursøkning er gitt av q. q omdanner de to mulige utfallene for opsjonens verdi i hakeparentesen i ligning (2) til en "sikkerhetsekvivalent" kontantstrøm.

q og $1-q$ har mange navn. Vi bruker *risikonøytrale sannsynligheter* for det meste her. I mer matematisk preget finans vil man ofte støte på begrepet *ekvivalent martingalmål* (EMM) som henspiller på at man innfører en sannsynlighet som omdanner en flukterende kontantstrøm til en kontantstrøm som skal diskonteres med risikofri rente. All usikkerheten er så å si flyttet over i sannsynlighetsmålet. *Tilstandspriser* er også mye brukt. Tankegangen bak dette begrepet er at hver tilstand har sin pris. Å være i tilstand "opp" i eksemplet vårt har prisen $q = 0.6923$. Et annet brukt begrep er *sikringssannsynligheten* som viser hen til at sannsynlighetsmålet gir den mengde av opsjoner man må ha for å sikre kursen til aksjen, eller generelt den underliggende.

Vi sammenfatter og har altså at den en-periodiske opsjonsprismodellen (2) kan formuleres slik:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{r_f-d}{u-d}C_u + \frac{u-r_f}{u-d}C_d\right] \\ &= \frac{1}{1+r_f}\left[qC_u + (1-q)C_d\right] \end{aligned} \tag{4}$$

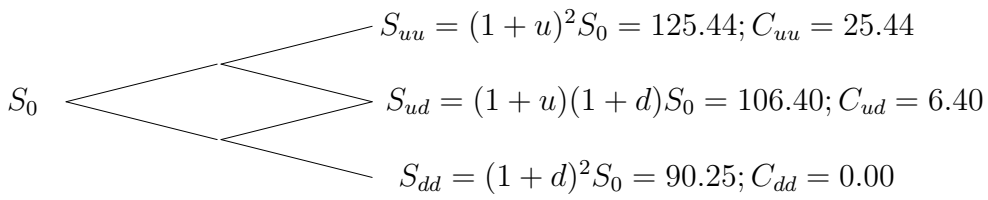
I hakeparentesen finner vi de to sluttverdiene til kjøpsopsjonen. Dagens verdi C_0 avhenger altså av disse to mulige fremtidige verdiene. Betydningen av de to sluttverdiene er veid med to brøker, hvor endringer og risikofri rente inngår. Brøkene kan tolkes som en slags sannsynligheter. Det hele er så diskontert med risikofri rente. Denne relasjonen er grunnleggende for den binomiske opsjonsprismodellen, og er med i utvidelser til flere perioder.

Oppgave 1 Vi skal først finne opsjonsverdien for det enperiodiske problemet. Vi setter inn i (4):

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1.06}\left[\frac{0.06-(-0.05)}{0.12-(-0.05)}12.00 + \frac{0.12-0.06}{0.12-(-0.05)}0.00\right] \\ &= \frac{1}{1.06} \times \frac{0.11}{0.17}12.00 \\ &= 7.325 \end{aligned}$$

som altså er det samme som vi fikk med arbitrasjefri prising, med litt avrundingsfeil. (4) er en eksakt formel for prising av en enperiodisk opsjon.

Oppgave 2 Når tid til forfall utvides til to perioder, har vi altså en prisprosess som gir sluttverdiene som i figur 6.



Figur 6: Aksjens prisprosess og opsjonsverdier i to perioder

Figur 6 og (4) viser at det er mulig å utvide opsjonsmodellen på følgende måte:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r_f)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \tag{5}$$

Det lønner seg nå å regne ut verdiene for q og $1-q$. Vi har:

$$q = \frac{0.06 - (-0.05)}{0.12 - (-0.05)} = 0.64706 \qquad 1 - q = \frac{0.12 - 0.06}{0.12 - (-0.05)} = 0.35294$$

Vi finner opsjonsprisen ved direkte innsetting i (5).

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1.06^2}(0.64706^2 \cdot 25.44 + 2 \cdot 0.64706 \cdot 0.35294 \cdot 6.40 + 0.35294^2 \cdot 0.00) \\ &= \frac{1}{1.1236}(10.65 + 2.92 + 0.00) \\ &= 12.08 \end{aligned}$$

som er den samme som før. Det er klart at risikonøytral prising letter regnearbeidet betydelig, og er av denne grunn den mest foretrukne metoden.

3 Prising med binomisk modell

3.1 Den replikerende porteføljen

Den replikerende porteføljen er i dette tilfellet:

$$34.50\Delta + 1.05B = 4.50$$
$$26.10\Delta + 1.05B = 0.00$$

Vi finner at $\Delta = 0.53571$ og $B = -13.31622$. Vi har da fra (1) at kjøpsopsjonen må være

$$C_0 = 0.53571 \cdot 30.00 - 13.31622 = \underline{2.76}.$$

For å beregne den risikonøytrale prisen, må vi vite opp- og nedbevegelsene. De er gitt av

$$u = \frac{34.50}{30.00} - 1 = 0.15; \qquad d = \frac{26.10}{30.00} - 1 = -0.13$$

Nå kan vi bruke (4):

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left[\frac{0.05 - (-0.13)}{0.15 - (-0.13)} \cdot 4.50 + \frac{0.15 - 0.05}{0.28} \cdot 0.00\right] = \underline{2.76}$$

Vi har videre at

$$q = \frac{0.05 - (-0.13)}{0.15 - (-0.13)} = 0.64286; \qquad 1 - q = 0.35714$$

3.2 Kjøpsopsjonen med to perioder

Vi skal utvide til to perioder. Siden prisprosessen er konstant, kan vi bruke (5). Vi finner

$$\begin{aligned}
S_{uu} &= 30.00 \cdot 1.15^2 = 39.675; \qquad C_{uu} = 9.675 \\
S_{ud} &= 30.00 \cdot 1.15 \cdot 0.87 = 30.015; \qquad C_{ud} = 0.015 \\
S_{uu} &= 30.00 \cdot 0.87^2 = 22.707; \qquad C_{dd} = 0.00
\end{aligned}$$

Innsetting i (5) gir med en gang:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{1.05^2}\left[0.64286^2 \cdot 9.675 + 2 \cdot 0.64286 \cdot 0.35714 \cdot 0.015 + 0.35714^2 \cdot 0.00\right] \\
&= \underline{3.63}
\end{aligned}$$

3.3 Kjøpsopsjonen med høyere utøvelseskurs

Utøvelseskursen er nå 32.00. Det gir $C_u = 2.50$. Vi har da fra (4):

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left[0.64286 \cdot 2.50 + 0.35714 \cdot 0.00\right] = \underline{1.53}$$

Høyere utøvelsespris har gitt lavere verdi på kjøpsopsjonen.

3.4 Kjøpsopsjonen med høyere aksjepris

Prisprosessen er som før, men starter i $S_0 = 35.00$. Da har vi at

$$S_u = 35.00 \cdot 1.15 = 40.25; \qquad C_u = 10.25$$
$$S_d = 35.00 \cdot 0.87 = 30.45; \qquad C_d = 0.45$$

Vi bruker igjen (4):

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left[0.64286 \cdot 10.25 + 0.35714 \cdot 0.45\right] = \underline{6.43}$$

En høyere aksjekurs til å begynne med gir høyere verdi på kjøpsopsjonen.

3.5 Kjøpsopsjonen med høyere volatilitet

Vi må nå beregne $q, 1-q$ på nytt. Vi har $u = 36/30-1 = 0.20$ og $d = 25.50/30.00 = -0.15$. Dermed

$$q = \frac{0.05 + 0.15}{0.20 + 0.15}6.00 = 0.57143; \qquad 1 - q = \frac{0.20 - 0.05}{0.35} = 0.42857$$

Nå gir (4):

$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left[0.57143 \cdot 6.00 + 0.42857 \cdot 0.00\right] = \underline{3.27}$$

Prisen på kjøpsopsjonen er høyere enn i utgangspunktet. Økt volatilitet gir høyere verdi av kjøpsopsjonen.

3.6 Kjøpsopsjonen med lavere risikofri rente

Vi har samme situasjon som i utgangspunktet, men nå en lavere risikofri rente. Det betyr at $q, 1-q$ og diskonteringsleddet modifiseres. I første omgang:

$$q = \frac{0.025 - (-0.13)}{0.15 - (-0.13)} = 0.55357; \qquad 1 - q = 0.44643$$

Vi har dermed:

$$C_0 = \frac{1}{1.025}\left[0.55357 \cdot 4.50 + 0.44643 \cdot 0.00\right] = \underline{2.43}$$

Opsjonsprisen har altså falt som følge av en lavere risikofri rente.

4 Black-Scholes-Merton

Black-Scholes/Merton-modellen for prising av en kjøpsopsjon med en bestemt underliggende eiendel, med en bestemt utøvelseskurs, gitt tid til forfall, gitt volatilitet og gitt risikofri rente ser slik ut:

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - X \cdot e^{-r_f T}\mathcal{N}(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{6}$$

Symbolene er forklart i tabell 1. Formelen gir prisen på en kjøpsopsjon på tidspunkt $t = 0$.

Tabell 1 Symbolforklaringer til Black-Scholes-modellen

σ	Volatilitet: Standardavvik til aksjen
$\ln(S_0/X)$	Den naturlige logaritmen til S_0/X
S_0	Aksjekurs på tidspunkt $t = 0$
X	Innløsningskurs (utøvelseskurs)
$e^{-r_f T}$	Nåverdi-faktoren når r_f beregnes i kontinuerlig tid
$\mathcal{N}(\cdot)$	Arealet av den normaliserte normalfordelingen opp til verdien i parentesen

Modellen krever bare beregning av den underliggende eiendels standardavvik. Alle andre størrelser er gitt i markedet.

Vi ser at markedsrisiko ikke inngår, heller ikke risikoholdning.

4.1 Volare

4.1.1 Kjøpsopsjonens pris

Vi bruker formelen (6). Start med d_1:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(30/30) + \left(0.05 + \frac{0.4^2}{2}\right) 0.5}{0.4\sqrt{0.5}} \\ &= \frac{0.00 + 0.13 \cdot 0.5}{0.2828} \\ &= 0.22981 \end{aligned}$$

d_2 fremkommer på denne måten:

$$d_2 = 0.22981 - 0.2828 = -0.05303.$$

Da har vi verdiene i den normaliserte normalfordeling

$$\mathcal{N}(0.22981) \sim 0.59088 \qquad \mathcal{N}(-0.05303) \sim 0.478853$$

Med disse verdiene kan vi nå finne opsjonens pris ved å sette inn i (6):

$$\begin{aligned} C_0 &= 30.00 \cdot 0.59088 - e^{-0.050 \cdot 0.5} 30.00 \cdot 0.478853 \\ &= \underline{3.72} \end{aligned}$$

Opsjonens pris er altså 3.72. Legg merke til at prisen er høyere enn null, selv om dagens aksjekurs er den samme som utøvelseskurs. Det er opsjonens *tidsverdi* som forårsaker dette. Det er ennå tre måneder til forfall. Innen den tid kan aksjen ha steget så mye at opsjonen er "in the money" (ITM). Det er denne muligheten en investor som kjøper opsjonen er villig til å betale for.

4.1.2 Kjøpsopsjonens replikerende portefølje

Den replikerende porteføljе har vi fra (1), som vi gjentar her:

$$C_0 = \Delta S_0 + B$$

En sammenligning med (6) viser at $\Delta = \mathcal{N}(d_1) = 0.59088$. B må da være $B = -0.59088 \cdot 30 + 3.72 = -14.01$.

Porteføljen som replikerer opsjonsprisen er dermed

$$C_0 = 3.72 = 0.59088 \cdot 30.00 - 14.01.$$

4.1.3 Kjøpsopsjonen med høyere aksjekurs

Vi bruker igjen (6), men setter nå $S_0 = 32.00$. Det gir

$$d_1 = 0.457988 \qquad \mathcal{N}(d_1) = 0.676519$$
$$d_2 = 0.145145 \qquad \mathcal{N}(d_2) = 0.569517$$

som gir:

$$C_0 = 30.00 \cdot 0.676519 - e^{-0.050 \cdot 0.5} 30.00 \cdot 0.569517 = \underline{4.98}$$

4.1.4 Kjøpsopsjonen med lavere volatilitet

Vi bruker igjen (6), men setter nå $\sigma = 0.20$. Det gir

$$d_1 = 0.247847 \qquad \mathcal{N}(d_1) = 0.597734$$
$$d_2 = 0.106066 \qquad \mathcal{N}(d_2) = 0.542235$$

som gir:

$$C_0 = 30.00 \cdot 0.597734 - e^{-0.050 \cdot 0.5} 30.00 \cdot 0.542235 = \underline{2.07}$$

4.1.5 Prisen på en salgsopsjon med de samme prisene

Her er det nødvendig å ta i bruk paritetsbetingelsen, som vi for vårt formål kan omskrive til

$$P_0 = C_0 + \frac{1}{1 + r_f} X - S_0 \tag{7}$$

Da har vi salgsopsjonens pris:

$$P_0 = 3.72 + \frac{1}{1.05} \cdot 30 - 30 = \underline{2.29}$$

4.2 Tilli

Vi skal finne kjøpsopsjonens pris og bruker (6). Symbolforklaring og verdier:

Symbol	Definisjon	Verdi
C_0	Kjøpsopsjon pris i dag	?
S_0	Aksjekurs på tidspunkt $t = 0$	200
σ	Aksjens volatilitet	$\sqrt{0.5}$
X	Innløsningskurs (utøvelseskurs)	300
r_f	Risikofri rente	3%
$\mathcal{N}(\cdot)$	Arealet av den normaliserte normalfordelingen opp til verdien i parentesen	

Vi finner først d_1:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{200}{300}\right) + (0.03 + 0.5 \cdot 0.5)\, 0.5}{\sqrt{0.5} \cdot \sqrt{0.5}} = -0.53093$$

Vi bruker resultatet og finner d_2:

$$d_2 = -0.53093 - \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{0.5} = -1.03093$$

Dermed har vi også $\mathcal{N}(d_1), \mathcal{N}(d_2)$: $\mathcal{N}(d_1) = 0.297734$ og $\mathcal{N}(d_2) = 0.151287$.

Vi kan nå sette inn i første linje i (6) og finner kjøpsopsjonens pris:

$$C_0 = 200 \cdot 0.297734 - 300 \cdot e^{-0.03 \cdot 0.5} \cdot 0.151287 = \underline{14.836}$$

4.3 Implisitt volatilitet

Vi kjenner alle størrelser i BSM-modellen fra avsnitt 4.1.1, bortsett fra volatiliteten. Vi får opplyst at opsjonsprisen er $C_0 = 2.50$. Vi kjenner altså alle størrelsene som inngår i BSM-formelen (6) inkludert opsjonens pris, bortsett fra volatiliteten σ. Men da er jo volatiliteten implisitt gitt i formelen. Det er ikke mulig å finne et eksplisitt uttrykk for σ, og vi må derfor prøve oss frem.

Prøving og feiling innebærer at vi prøver nye verdier av σ for å komme så nær $C_0 = 2.50$ som mulig. Det er selvsagt de sentrale sannsynlighetsverdiene $\mathcal{N}(d_1), \mathcal{N}(d_2)$ som endres hver gang σ endres og de andre variablene i (6) holdes konstante. Vi ser at den oppgitte opsjonsprisen er betydelig under prisen fra avsnitt 4.1.1. Volatiliteten må derfor

være lavere enn $\sigma = 0.4$. Etter en del prøving og feiling finner jeg at volatiliteten er $\sigma = \underline{0.2527}$.

4.4 Dividende

Vi bruker igjen opplysningene fra avsnitt 4.1.1, men innfører nå en proporsjonal dividende på 5%. I stedet for S_0, bruker vi nå en S^* som er definert ved

$$S^* = \frac{S}{1+\delta} \tag{8}$$

hvor δ er den proporsjonale dividenden. Vi har altså at $S^* = 30/1.05 = 28.57$. Vi bruker denne i (6), og legger også merke til at tid til forfall er nå ett år, $T = 1$.

4.4.1 Kjøpsopsjonens pris med dividende

Sentrale størrelser i utregning av

$$\begin{aligned} d_1 &= 0.203025 \qquad \mathcal{N}(d_1) = 0.580442 \\ d_2 &= -0.19698 \qquad \mathcal{N}(d_2) = 0.421923 \end{aligned}$$

som gir:

$$C_0 = 28.57 \cdot 0.580442 - e^{-0.050 \cdot 0.5} 30.00 \cdot 0.421923 = \underline{4.54}$$

Opsjonsprisen er relativt høy. Dette har sammenheng ikke bare med dividende, men også med en lengre tid til forfall.

4.4.2 Kjøpsopsjonens pris uten dividende

Hva er kjøpsopsjonens pris uten dividende? Forandringen i forhold til avsnitt 4.1.1 er at forfallstiden er forlenget. Innsetting i (6) gir denne gangen resultatene

$$\begin{aligned} d_1 &= 0.325 \qquad \mathcal{N}(d_1) = 0.627409 \\ d_2 &= -0.075 \qquad \mathcal{N}(d_2) = 0.470107 \end{aligned}$$

som gir:

$$C_0 = 30.00 \cdot 0.627409 - e^{-0.050 \cdot 0.5} 30.00 \cdot 0.470107 = \underline{5.41}$$

En forlengelse av tid til forfall øker altså prisen på kjøpsopsjonen, og kjøpsopsjonens pris uten dividende er høyere enn prisen på en kjøpsopsjon med dividende.

4.4.3 Hva skyldes prisforskjellen?

Kjøpsopsjonen på en aksje som betaler dividende er altså lavere enn en kjøpsopsjon på en sammenlignbar aksje uten dividende. En del av verdien i den dividendebetalende aksjen er bundet i kontantene fra opsjonen, noe som selvsagt begrenser aksjens volatilitet og dermed kjøpsopsjonens verdi.

Kap. 13 Opsjonsprising: Oppgaver

1 Prising med replikerende portefølje

En aksje har i dag verdi 100.00, som også er kjøpsopsjonens utøvelsespris. I neste periode kan prisen gå opp 12.0% eller falle 5.0%. Risikofri rente i markedet er 6.0%.

1. Hva er kjøpsopsjonens pris i dag? Bruk prising med replikerende portefølje.
2. Bruk de samme opplysningene, men la nå opsjonens forfall være om to år. Hva er nå kjøpsopsjonens pris i dag? Bruk igjen prising med replikerende portefølje.

2 Risikonøytral prising

Svar på de samme oppgavene som i 1, men denne gangen med risikonøytral prising.

3 Prising med binomisk modell

En aksje med kurs lik 30.00 i dag er verdt enten 34.50 eller 26.10 etter ett år. Den risikofrie renten er 5.0%. En opsjon skrevet på aksjen har utøvelseskurs lik 30.00.

1. Hva er en kjøpsopsjon på aksjen verdt? Bruk både prising med en replikerende portefølje og risikonøytral prising.
2. Forutsett at prisprosessen er den samme i periode 2 og at risikofri rente er den samme. Hva er nå prisen på kjøpsopsjonen?
3. Anta en periode og at utøvelseskursen nå er 32.00. Hva er prisen på kjøpsopsjonen?
4. Anta en periode og at aksjekursen er 35.00. Hva er prisen på kjøpsopsjonen i dette tilfellet hvis prisprosess og risikofri rente er som før?
5. Anta at kursen er 30.00 i dag, men at den kan stige til 36.00 eller falle til 25.50 etter en periode. Hva er kjøpsopsjonens pris?

6. Anta de første opplysningene, bortsett fra at den risikofrie renten nå faller til 2.5%. Hva er kjøpsopsjonens pris?

4 Black-Scholes-Merton

4.1 Volare

Anta at aksjekursen i selskapet Volare i dag er 30.00, utøvelseskursen er 30.00 og at den risikofrie renten er 5.00%. Aksjens volatilitet er 40% og opsjonens forfallstidspunkt er om seks måneder.

1. Hva er opsjonens pris?
2. Finn den replikerende porteføljе.
3. Anta at aksjekursen i dag endres til 32.00, men at opplysningene ellers er som før. Hva er nå den replikerende porteføljе?
4. Anta at volatiliteten i stedet er 20%. Hva blir opsjonens pris denne gangen?
5. Hva er prisen på en salgsopsjon hvis du bruker de opprinnelige opplysningene?

4.2 Tilli

Anta at en kjøpsopsjon på foretaket Tilli sin aksje forfaller om seks måneder til en utøvelsespris på 300. Aksjekursen i dag er 200. Risikofri rente er 3.0%, og aksjens varians er beregnet til 0.5.

Finn kjøpsopsjonens pris ved hjelp av formelen etter Black-Scholes-Merton.

4.3 BSM: Implisitt volatilitet

Bruk de samme opplysningene som i 4.1, men anta nå at volatiliteten er ukjent. Du observerer at kjøpsopsjonen omsettes for 2.50. Vis hva disse opplysningene impliserer for volatiliteten.

4.4 BSM: Dividende

Aksjen har kurs 30.00 i dag, utøvelseskursen er 30.00, dens volatilitet er 40%, det er ett år til forfall og den risikofrie renten er 5%. Utbyttebetalingene fra selskapet er proporsjonale

med aksjekursen og utgjør 5%.

1. Hva er kjøpsopsjonen verdt?
2. Hva er en tilsvarende kjøpsopsjon uten dividende verdt?
3. Hvorfor er kjøpsopsjonen med dividende mindre verdt enn den uten?

Oppgaver i MM1 og MM2 (uten skatt)

1 MM-proposisjonene

De første proposisjonene utviklet Miller og Modigliani for en tenkt verden uten skatt.

1.1 Første proposisjon

I første proposisjon ier MM at verdien av et selskap er uberørt av hvordan selskapet er finansiert. Anta to selskaper har samme kontantstrømmer i fremtiden, og at kontantstrømmene er konstante og varer evig. Hele driftsresultatet deles ut som utbytte. Da er selskapene like mye verdt, enten de er finansiert med egenkapital eller med en kombinasjon av egenkapital og gjeld.

Sammenhengene er som følger.

$$\begin{aligned} V_U &= V_L \\ V_U &= E_U \\ V_L &= E_D + D \\ E_U &= E_D + D \end{aligned} \tag{1}$$

Første proposisjon sier dermed at verdien av et selskap så å si skapes på eiendelssiden av balansen. Det er selskapets evne til å anvende eiendelene til å selge produkter til en pris høyere enn kostnadene med å fremstille produktene som avgjør selskapets verdi, ikke hvordan eiendelene er finansiert.

1.2 Andre proposisjon

Andre proposisjon sier at kapitalkostnaden for egenkapitalen stiger i takt med økt finansiell risiko. Vi har sammenhengen

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\frac{D}{E} \tag{2}$$

Den finansielle risikoen er uttrykt med gjeldsgraden D/E.

1.3 Forutsetninger

I tillegg til å forutsette ingen skatter, er forutsetningene i MMs teori om kapitalstruktur:

1. Alle investorer har perfekt informasjon om markedsmulighetene.
2. Alle kan låne til samme rente for samme risiko.
3. Det er ingen transaksjonskostnader.
4. Alle selskapers egenkapital og gjeld er fritt omsettelige via aksjer og obligasjoner.

2 Verdiens konstans

2.1 Betalinger

Rentebetalingene i Gamma er Renter $= r_D D$, dvs. Renter $= 0.045 \cdot 5000 = 225.00$. For øvrig har vi betalingene i de to tilstandene

	Delta		Gamma	
	Lav KS	Høy KS	Lav KS	Høy KS
EBIT	250.00	500.00	250.00	500.00
Renter	0.00	0.00	225.00	225.00
Dividende	250.00	500.00	25.00	275.00

2.2 Replikere EK i Delta?

Du eier 5% i Delta. Kan du konstruere en portefølje som har den samme kontantstrømmen som 5% i Delta? Delta har ingen gjeld. Vi utnytter sammenhengene i (1), spesielt at $E_U = E_D + D$. Vi kan tolke sammenhengen slik at ved å sette sammen en portefølje av

høyre side, kan vi replikere kontantstrømmen på venstre side. Vi skal mao. investere 5% i Gammas egenkapital og gjeld. Dette gir i de to tilstandene:

$$KS_{lav}: DIV_L = 0.05 \cdot 25.00 + 0.05 \cdot 225.00 = 12.50$$
$$KS_{høy}: DIV_H = 0.05 \cdot 275.00 + 0.05 \cdot 225.00 = 25.00$$

En investering på 5% i Delta gir i tilfellet Lav KS $DIV_L = 0.05 \cdot 250 = 12.50$ og i tilfellet med Høy KS $DIV_H = 0.05 \cdot 500 = 25.00$. Kontantstrømmene er dermed like.

Verdien av et selskap er jo verdien av de neddiskonterte kontantstrømmene, eller dividendene som i dette tilfellet. Siden kontantstrømmene er like, må den investeringen som har frembrakt kontantstrømmene også være like, dvs. vi har virkelig at $E_U = E_D + D$ eller $V_U = V_L$.

2.3 Replikere EK og gjeld i Gamma?

Vi vil replikere, eller etterligne, kontantstrømmen fra det å eie i Gamma med å eie i Delta og samtidig ta opp et lån på privat hånd. Vi utnytter altså at *EK i selskap med gjeld* er det samme som *EK i selskap uten gjeld pluss privat lån*, $E_D = E_U - D$. Vi låner tilsvarende 5% av gjelden i Gamma og kjøper 5% av aksjene i Delta. 5% av gjelden er $0.05 \cdot 5000 = 250$. Det gir kontantstrømmene i de to tilstandene:

$$KS_{lav:} DIV = 0.05 \cdot 250.00 - 0.05 \cdot 225.00 = 1.25$$
$$KS_{høy:} DIV = 0.05 \cdot 500.00 - 0.05 \cdot 225.00 = 13.75$$

3

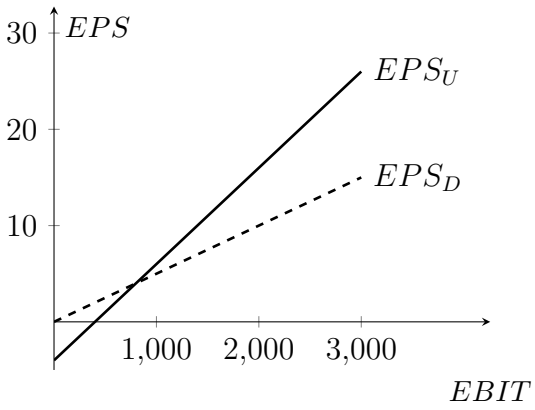
Tabell 1 viser effekten på overskudd pr. aksje (EPS) i de tre konjunkturfasene og med ulik kapitalstruktur.

Setter vi r som avkastning på eiendelene I, har vi jo at $EBIT = r \times I$ som for lavkonjunkturens vedkommende er $0,10 \cdot 10000 = 1000$. I det tilfellet at selskapet låner, er rentebetalingene $r_D \cdot D$, altså $0.08 \times 5000 = 400$. Tallet på aksjer er i utgangspunktet 200 og med gjeldsfinansiering 100. EPS blir da i lavkonjunktur for Utn i utgangspunktet $1000/200 = 5.00$. Det viser seg altså at overskudd (og avkastning) pr. aksje er langt høyere for selskapet når det har gjeld enn når det er uten.

Effekten på overskudd pr. aksje er vist i større detalj i figur 1.

Tabell 1 Effekten av endring i kapitalstrukturen

	100 prosent EK Konjunkturfase			50 prosent EK Konjunkturfase		
	Lav	Forventet	Høy	Lav	Forventet	Høy
Avkastning på eiendeler	0.10	0.20	0.30	0.10	0.20	0.30
EBIT	1000	2000	3000	1000	2000	3000
Renter 8%	0	0	0	-400	-400	-400
EBT	1000	2000	3000	600	1600	2600
Avkastning på EK	0.10	0.20	0.30	0.12	0.32	0.52
EPS	5.00	10.00	15.00	6.00	16.00	26.00



Figur 1: Effekten på overskudd pr. aksje av en økning i gjeld. EPS_D viser EPS for selskapet med gjeld, EPS_U er EPS for selskapet uten gjeld.

Figuren viser altså at med en positiv gjeldsandel øker overskuddet pr. aksje EPS mye raskere når foretaket har gjeld enn når selskapet ikke har gjeld. Samtidig ser vi at gjelden medfører en finansiell risiko. I lavkonjunkturer vil overskudd pr. aksje være negativ. Denne effekten av gjeld kalles også for *hevstangseffekten*, og et foretak som har gjeld sies å være "giret". I gode tider får eierne mer igjen pr. aksje når selskapet er giret.

Men en investor kan kopiere disse effektene ved å låne selv og kjøpe aksjer i Utn forut for endring i kapitalstrukturen. Sammenlign utbetalinger og kostnader for en investor som kjøper 10 aksjer i Utn når gjelden er 50% med en investering på 20 aksjer finansiert på egen hånd med lån på 500 i Utn når EK-andelen er 100%. Resultatene er vist i tabell 2.

Det viser seg altså fra tabell 2 at en investor kan kopiere eller duplisere den kontantstrømmen et selskap med gjeld har ved å ta opp lån på egen hånd. Under de forutsetninger som gjelder, tilfører altså selskapets finansakrobatikk ikke noen nye verdier til aksjonærene som de ikke kunne oppnå på egen hånd. For selskapets eiere er ikke dette verdiøkende aktiviteter.

Tabell 2 En investor kan kopiere utbetalinger og kostnader i Utn ved å ta opp lån på egen hånd

	Konjunkturfase		
	Lav	Forventet	Høy
Bedriftens kapitalstruktur			
EPS	6	16	26
EPS på 10 aksjer	60	160	260
Opprinnelig kostnad	500	(= (5000/100) × 10)	
Hjemmelaget kapitalstruktur			
EPS	5	10	15
EPS på 20 aksjer	100	200	300
Rente på lån 500	-40	-40	-40
Netto	60	160	260
Opprinnelig kostnad:	500		
Aksjer	1000	(= (10000/200) × 20)	
Lån	-500		

4

4.1

I en MM1-verden uten skatt (men med perfekte kapitalmarkeder) er verdien av selskapet uberørt av dets finansiering. Derfor har vi at:

$$\begin{aligned} V_{\text{alfa}} &= V_{\text{omega}} = E + D \\ E &= V_{\text{alfa}} - D \\ &= 220 - 60 = 160 \end{aligned}$$

Aksjekursen i Omega er dermed: $S_{omega} = 160/20 = 8$.

4.2

Omega-aksjen er overpriset. Dette gir arbitrasjemuligheter. Selg for eksempel 20 aksjer i Omega, kjøp 10 i Alfa og lån 60. Dette gir $220 - 220 + 60 = 60$. Forutsetningen for denne handelen er at markedet er likvid ved disse priser, dvs. at der er investorer som er villige til å kjøpe og selge til disse prisene. Videre kreves det at det er mulig for investoren å låne penger til samme rente som Omega.

5

5.1

Beesofts balanse er altså

Aktiva	Passiva
Kontanter	Egenkapital
Andre aktiva	Opsjoner

Da er (Andre aktiva) = (EK + Opsjoner − Kontanter) slik at (Andre aktiva) = $12 \times 5 + 8 - 5 = 63$.

5.2

Egenkapitalen blir nå redusert med de 5 som brukes til tilbakekjøp av aksjer, dvs. ny egenkapital er (Ny EK) = $60 - 5 = 55$.

Beesoft skal altså bruke 5 milliarder til tilbakekjøp. Selskapet må betale 12 pr. aksje. Det gir (i tusen)

$$\text{Tilbakekjøpte aksjer} = \frac{5,000,000}{12} = 416,667$$

slik at selskapet har 4,583,333 tusen aksjer tilbake. Da er ny aksjekurs:

$$S_{\text{Etter tilbakekjøp}} = \frac{55,000,000}{4,583,333} = \underline{12.00}.$$

6

6.1

Vi bruker MM2 (uten skatt):

$$r_E = r_U + (r_U - r_D)\frac{D}{E} \tag{3}$$

Her er r_E kapitalkostnaden for egenkapitalen, r_U kapitalkostnaden for et selskap uten gjeld (et ugiret selskap), r_D lånerenten og D/E er selskapets gjeldsgrad.

Når $D/E = 0$, er jo $r_E = r_U$, dvs. vi vet at $r_U = 12\%$. Da er forventet gjeldsgrad ved

$D/E = 0.50$:

$$r_E = 12 + (12 - 6) \times 0.50 = \underline{15.00}.$$

6.2

Vi bruker igjen (3), slik at EK-kostnaden denne gangen blir:

$$r_E = 12 + (12 - 8) \times 1.50 = \underline{18.00}.$$

6.3

Skulle vi følge resonnementet helt ut, skulle foretaket ha høyest mulig gjeld. Men den høyere avkastningen på egenkapitalen "kjøpes" altså med høyere risiko. Det er ingen fri lunsj.

7

Igjen er (3) relevant. Vi kjenner igjen $r_E = r_U = 9.2\%$. Da kan vi sette inn:

$$r_E = 9.2 + (9.2 - 6) \times \frac{0.13}{0.87} = \underline{9.68}.$$

8

8.1

Vi har jo at $r_U = r_A$ eller $r_U = r_{wacc}$ når selskapet opererer i et perfekt kapitalmarked, siden gjeldsandel ikke påvirker den gjennomsnittlige kapitalkostnaden for firmaet. Vi tar dermed utgangspunkt i

$$r_{wacc} = r_E \frac{E}{E + D} + r_D \frac{D}{E + D} \tag{4}$$

Vi får ved innsetting:

$$r_{wacc} = 15 \cdot \frac{200}{300} + 6 \cdot \frac{100}{300} = 12.00$$

Dette blir jo også egenkapitalkostnaden etter overgangen til full EK-finansiering. Vi får altså fra (3):

$$r_E = 12.0 + (12.0 - 6.0) \times \frac{0}{300} = \underline{12.0}.$$

8.2

8.2.1

Hva om man i stedet øker gjelden? Selskapet er fremdeles verdt 300 etter MM1 uten skatt. Hvis risikoen ikke øker, vil lånerenten fremdeles være 6,0%. Dermed har vi fra (3):

$$r_E = 12,0 + (12,0 - 6,0) \times \frac{150}{150} = \underline{18,0}.$$

8.2.2

Hvis derimot risikoen øker, vil lånerenten øke. Isolert sett fører dette til at r_E er mindre enn om risikoen forblir på samme nivå. Antar vi for eksempel at $r_D = 8,0\%$, vil $r_E = 16,0\%$. Långiverne er med på å bære en del av risikoen.

Kap 14 Oppgaver i MM1 og MM2 (uten skatt)

1

Forklar med egne ord:

1. Hva sier Miller og Modigliani sin første proposisjon i en verden uten skatter?
2. Hva sier den andre proposisjon?
3. Hva er forutsetningene for MMs proposisjoner når det ikke er skatt?

2

Anta at økonomien er uten skatter. Selskapet Delta har ikke noe gjeld, mens selskapet Gamma har en gjeld på 5,000 som det betaler 4.5% rente på i året. Selskapene har identiske prosjekter som skaper kontantstrømmen 250 eller 500 hvert år. Kontantstrømmen utbetales som dividende etter at betaling av renter på gjeld er foretatt.

1. Vis betalingene til gjeld og egenkapital.
2. Anta at du eier 5% av egenkapitalen i Delta. Du kunne valgt en annen portefølje som har samme kontantstrøm. Hvilken ville det være?
3. Anta at du eier 5% av egenkapitalen i Gamma. Du kan låne til 5%. Kan du da velge en alternativ strategi til denne porteføljen?

3

Skal det gjeldfrie selskapet Utn dele ut en del av aksjekapitalen til aksjonærene og erstatte denne kapitalen med gjeld? Bedriften betaler ikke skatt, og hele kontantstrømmen betales som utbytte. Anta at verdien av selskapet er i dag 10,000, og det planlegger å dele ut 5,000 ved å kjøpe tilbake halvparten av aksjene, dvs. 100 aksjer, finansiert ved opptak av nytt lån. Utn befinner seg i en usikker bransje, og dets $EBIT$ svinger med konjunkturene. Hver konjunkturfase har like stor sannsynlighet for å inntreffe. Avkastningen på eiendelene er

henholdsvis 10, 20 og 30 prosent i lavkonjunktur, forventet og høykonjunktur. Lånerenten er 8%.

1. Vis at eierne er indifferente mellom den gamle og den nye kapitalstrukturen.

4

Anta at foretakene Alfa og Omega har identiske eiendeler som frembringer identiske kontantstrømmer. Alfa er kun finansiert med egenkapital fordelt på 10 millioner aksjer. Aksjen handles for 22 pr. stykk. Omega har 20 millioner aksjer utestående og også en gjeld på 60 millioner.

1. Hva er aksjekursen for Omegas aksjer når du bruker MM1 (uten skatt)?
2. Anta at Omegas aksjer for tiden omsettes for 11 pr. aksje. Hvilke arbitrasjemuligheter åpner dette for? Hvilke forutsetninger trenges for at du kan utnytte denne muligheten?

5

Beesoft er et svært lønnsomt teknologifirma som har 5 milliarder i kontanter. Selskapet har besluttet å bruke disse kontantene til å kjøpe tilbake aksjer fra investorer, noe som allerede er kunngjort. Foretaket er i dag finansiert med bare egenkapital fordelt på 5 milliarder aksjer. Prisen på aksjen er i dag 12. Beesoft har ikke utstedt andre verdipapirer bortsett fra aksjeopsjoner til ansatte. Deres markedsverdi er i dag 8 milliarder.

1. Hva er markedsverdien på Beesofts eiendeler utenom kontanter?
2. Anta at kapitalmarkedene er perfekte. Hva er markedsverdien til Beesofts egenkapital etter tilbakekjøpet av aksjer? Hva er verdien pr. aksje?

6

Hardmon er for tiden finansiert utelukkende med egenkapital. Foretakets forventede avkastning er 12%. Det vurderes tilbakekjøp av aksjer gjennom en lånefinansiert rekapitalisering.

1. Anta at Hardmon låner slik at dets gjeldsgrad er 0.50. På dette gjeldsnivået er lånerenten 6%. Hva er forventet avkastning på egenkapitalen etter transaksjonen?
2. Anta at Hardmon i stedet låner slik at dets gjeldsgrad er 1.50. Med en så høy

gjeldsgrad, er Hardmons gjeld mye mer risikabel. Derfor er lånekostnaden 8%. Hva er nå forventet avkastning på egenkapitalen?

3. En av topplederne hevder at det er i aksjonærenes beste interesse å velge den kapitalstrukturen som gir den høyeste forventede avkastning for egenkapitalen. Holder topplederens argument?

7

Forutsett at Microsoft ikke har noen gjeld og en kapitalkostad på 9.2%. Den gjennomsnittlige gjeldsandelen i bransjen er 13%. Hva blir Microsofts EK-kostnad hvis selskapet bruker forholdsmessig like mye gjeld som bransjen og lånerenten er 6%?

8

GP er finansiert med egenkapital med en markedsverdi på 200 millioner og en gjeld med verdi 100 millioner. Investorer forventer en 15% avkastning på aksjen og en 6% avkastning på gjelden. Forutsett perfekte kapitalmarkeder.

1. Anta at GP utsteder 100 millioner i nye aksjer for å finansiere tilbakebetaling av gjelden. Hva er forventet avkastning på aksjen etter refinansieringen?
2. Anta at GP i stedet utsteder 50 millioner i ny gjeld (via obligasjoner) for å kjøpe aksjer tilbake.
   (a) Hva er forventet avkastning på aksjen, hvis risikoen ikke endres etter denne transaksjonen?
   (b) Anta i stedet at risikoen øker etter transaksjonen. Blir forventet avkastning på aksjen høyere eller lavere enn i forrige underspørsmål?

Kap 15: Oppgaveløsninger

1 Kort

1.1

Før kunngjøringen er selskapet verdt:

$$\text{Eiendeler} = \text{Egenkapital} = 7.50 \times 20 = 150m$$

siden aksjekursen er 7.50 og der er 20 millioner aksjer i selskapet.

1.2

$$\text{Eiendeler} = 150(\text{eksisterende}) + 50(\text{kontanter}) + 0.40 \times 50(\text{skattefordel}) = 220m$$

Man låner 50 millioner og legger dem foreløpig i kassen. Lånet gir opphav til renteskattefordeler.

1.3

EK er nå:

$$E = \text{Eiendeler} - \text{Gjeld} = 220 - 50 = 170m$$

EK har altså steget med 20 millioner som følge av låneopptaket. Dette er jo renteskattefordelene $0.40 \times 50 = 20m$. Aksjekursen blir nå:

$$S = \frac{170}{20} = 8.50.$$

Kort vil nå kjøpe tilbake

$$\text{Tilbakekjøp antall aksjer} = \frac{50m}{8.50} = 5.882m \text{ aksjer.}$$

1.4

Etter tilbakekjøpet er kassa tom:

$$\text{Eiendeler} = 150(\text{eksisterende}) + 0.40 \times 50(\text{skattefordel}) = 170m$$

Gjelden er selvsagt 50. Da er egenkapitalen 170-50 = 120 millioner. Aksjekursen er nå:

$$P = \frac{120}{20 - 5.882} = 8.50.$$

All gevinsten av økt gjeld tilfaller altså eierne.

2 Rally

2.1

$$\text{Aksjekurs} = \frac{25mrd}{10mrd \text{ aksjer}} = 2.50 \text{ pr. aksje}$$

2.2

Like før tilbakekjøpet har vi følgende:

$$\text{Eiendeler} = 25(\text{eksisterende}) + 10(\text{kontanter} + 0.35 \times 10(\text{skattefordel}) = 38.5mrd$$

og

$$E = A - D = 38.5 - 10 = 28.5 \Rightarrow \text{Aksjekurs} = \frac{28.5}{10} = 2.85$$

Aksjonærene vil følgelig ikke selge for 2.75 pr. aksje.

2.3

$$\text{Eiendeler} = 25(\text{eksisterende}) + 0.35 \times 10(\text{skattefordel}) = 28.5mrd$$

slik at

$$E = A - D = 28.5 - 10 = 18.5$$

Antall aksjer har nå forandret seg:

$$\text{Antall aksjer} = 10 - \frac{10}{3} = 6.667m$$

slik at aksjekursen er:

$$S|\text{Tilbakekjøp} = \frac{18.5}{6.667} = 2.775$$

2.4

Svaret på deloppgave 2.2 tyder på at en fair pris på aksjen er 2.85. Forrige deloppgave 2.3 viser at prisen før og etter tilbakekjøp er forskjellige. Det bryter med prinsippet om markedslikevekt. Bruker man prisen 2.85 som utgangspunkt, har selskapet

$$\text{Antall aksjer} = 10 - \frac{10}{2.85} = 6.491 \text{ aksjer etter tilbakekjøpet}$$

Da er aksjekursen etter tilbakekjøpet:

$$S|\text{Tilbakekjøp} = \frac{18.5}{6.491} = 2.85$$

Aksjonærene vil altså være villige til å selge til denne prisen.

3 Apple

3.1

Apple reduserer altså skatteutbetalingene med 1 milliard hvert år. Den kapitaliserte langtidseffekten av dette er

$$NV(\text{skattefordel}) = \frac{1mrd}{0.075} = 13.333mrd$$

3.2

Skal skattene reduseres med 1 milliard, må man betale $1mrd/0.35 = 2.857mrd$. Da må selskapet hente inn $2.857mrd/0.075 = 38.1mrd$ i lån.

Den samlede skattesats N^* blir med skatter på personlig hånd i tillegg til bedriftsskatter:

$$N^* = 1 - \frac{(1-\tau_c)(1-\tau_d)}{1-\tau_i} = 1 - \frac{(1-0.35)(1-0.15)}{1-0.35} = 0.15$$

Her er τ_c skatt på bedriftens driftsresultat, τ_d skatt på dividende (og verdistigning på aksjen) og τ_i skatt på renteinntekter. Skattefordelen er dermed:

$$\text{Skattefordel} = N^*D = 0.15 \times 38.1mrd = 5.77mrd$$

altså langt lavere enn skattefordelen når det bare er skatt på bedriftens driftsresultat.

4 Dann

4.1

Vi finner først fri kontantstrøm (FKS):

$$\begin{aligned} FKS &= EBIT(1-\tau_c) + \text{Avskr.} - \text{KapInvest} - \Delta\text{Arb.kap} \\ &= 15(1-0.35) + 3 - 6 = 6.75 \end{aligned}$$

Egenkapitalen er da verdt:

$$E = \frac{6.75}{0.10 - 0.085} = 450.00$$

4.2

Dann produserer altså en $EBIT = 15m$. Renteutgifter på 15 millioner tilsvarer et lån på $15/0.08 = 187.50$.

4.3

Nei. Det meste de bør låne er 187.50, siden det ikke gir noen skatteskjerming av å låne mer.

Kap 15: Oppgaver

1

Kort Tilvirkning har for tiden ikke noe gjeld, mens egenkapitalen er fordelt på 20 millioner aksjer. Aksjekursen er 7.50. Selv om investorene forventer at Kort skal forbli helfinansiert med egenkapital, annonserer Kort at de vil låne 50 millioner og bruke pengene til å kjøpe tilbake aksjer. Kort vil bare betale renter på lånet, og har samtidig ingen planer om å øke eller redusere lånestørrelsen. Kort betaler 40% selskapsskatt.

1. Hva er markedsverdien til Korts nåværende eiendeler før kunngjøringen?
2. Hva er markedsverdien til Korts eiendeler (inkludert eventuelle skatteskjerminger) like etter at gjelden er utstedt, men før aksjene er kjøpt tilbake?
3. Hva er prisen på en aksje i Kort like før tilbakekjøpet? Hvor mange aksjer vil Kort kjøpe tilbake?
4. Hva er Korts markedsbalanse og aksjekurs etter tilbakekjøpet?

2

Rally AS er et selskap uten gjeld med eiendeler verdt 25 milliarder fordelt på 10 milliarder utestående aksjer. Nå planlegger det å låne 10 milliarder og bruke kapitalen til å kjøpe tilbake aksjer. Selskapsskatten til Rally er 35% og Rally har planer om å beholde lånesummen på 10 milliarder permanent.

1. Hva er Rallys aksjekurs uten lånet?
2. Anta at Rally tilbyr 2.75 pr. aksje i tilbakekjøpet. Vil aksjonærene selge for dette beløpet?
3. Anta at Rally tilbyr 3.00 pr. aksje og at aksjonærene er villige til å selge for denne prisen. Hva blir Rallys aksjekurs etter tilbakekjøpet?

4. Hva er den laveste prisen Rally kan tilby som aksjonærene vil godta? Hva blir aksjekursen etter tilbakekjøpet i dette tilfellet?

3

Apple Corporation har ingen gjeld i balansen i 2008, men betalte 2 milliarder i skatt. Anta at Apple utstedte nok gjeld til å redusere sine skattebetalinger med 1 milliard pr. år for overskuelig fremtid. Forutsett at Apples marginale selskapsskattesats er 35% og at dets lånekostnad er 7.5%.

1. Hvis Apples investorer ikke betaler personskatter (fordi de holder Apples aksjer i skattefrie pensjonsfond – i Norge: gjennom et annet selskap), hvor store verdier ville bli skapt?
2. Hvor mye endres svaret ditt hvis du i stedet forutsetter at Apples investorer betaler 15% skatt på inntekt fra aksjeeie og 35% skatt på inntekt fra renteinntekter?

4

Dann Systems vil ha en EBIT kommende år på 15 millioner. Selskapet vil også bruke 6 millioner på samlede realinvesteringer og økninger i netto arbeidskapital. Avskrivningene vil være 3 millioner. Dann har for tiden ingen gjeld, skattesatsen er 35% og kapitalkostnaden er 10%.

1. Hva er egenkapitalens markedsverdi i dag hvis Dann vokser med 8.5% i året?
2. Anta at lånerenten er 8%. Hvor mye kan Dann låne nå og enda ha et ikke-negativt driftsresultat det kommende året?
3. Er det en skattefordel for Dann å velge en gjeldsandel som overstiger 50%? Forklar.

Kap 16: Løsninger på oppgaver

1

Det forutsettes at selskapets ledelse velger de prosjektene som maksimerer eiernes formue.

1.1

Det usikre prosjektet har forventet netto nåverdi:

$$NNV = -100 + 0.20 \cdot 200 + 0.80 \cdot 0 = 40.00$$

Det sikre prosjektet har netto nåverdi:

$$NNV = -100 + 1.00 \cdot 115 = 15$$

Etter vanlige prosjektvurderingsregler bør altså det sikre prosjektet velges, siden det har positiv netto nåverdi.

Vi må også undersøke hvordan dette stiller seg for eiere og långivere i de to tilstandene.

Tabell 1 Utbetalinger til eiere og långivere i de to tilstandene for de to prosjektene

	Usikkert		Sikkert
	Gunstig	Ugunstig	prosjekt
NNV	100	-100	15
Til långiverne	20	0	15
Til eierne	80	0	0

Eierne står altså overfor valget mellom (80.0) og 0. For eierne i denne situasjonen er det usikre prosjektet det beste, selv om $NNV < 0$. Et prosjekt med negativ netto nåverdi kan altså velges av eiere som ikke har noe å tape. Dette er *overinvesteringsproblemet*.

2

2.1

Kursen er fremdeles 5.50, fordi finansielle transaksjoner alene skaper ikke verdi.

2.2

Det er altså bedriftsskatter med skattesats $\tau_c = 0.28$. Dette gir renteskattefordeler totalt til $\tau_c D$ der D er gjeld. Denne fordelen gir et løft til aksjekursen:

$$S_{ny} = 0.28 \cdot \frac{20}{\text{10m aksjer}} + 5.50 = \underline{6.06}.$$

2.3

Aksjekursen stiger altså ikke helt opp til 6.06. Årsaken må være stresskostnader, eller krise- og konkurskostnader. Nåverdien er gitt av:

$$NV(\text{Stress}) = (6.06 - 5.75)10m = \underline{3.1m}$$

3

Gjeld medfører fordeler i form av renteskattefordeler og ulemper i form av stresskostnader. Definer netto renteskattefordel (NSF) som forskjellen mellom disse to. Et selskap vil gjøre denne størst mulig. Selskapsverdien uten disse kostnadene er jo uberørt ($V_U = V_L$).

3.1

Stresskostnadene er 2 millioner, og ved ulike gjeldsnivåer er det ulik sannsynlighet for at disse oppstår. Vi må altså finne den forventede stresskostnad (E(Stresskostnad)) og sammenligne denne med renteskattefordelen.

	Gjeldsnivå						
	0	40	50	60	70	80	90
Renteskattefordel	0,00	0,76	0,95	1,14	1,33	1,52	1,71
Sanns.(Stresskostn)	0,00	0,00	0,01	0,02	0,07	0,16	0,31
Stresskostnader 2m	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
E(Stresskostn.)	0.00	0.00	0.02	0.04	0.14	0.32	0.62
Netto RSF	0.00	0.76	0.93	1.10	1.19	1.20	1.09

Netto renteskattefordel er altså sin høyeste på 1.20. Det viser seg at gjeldsnivået bør være 80%.

3.2

Stresskostnadene er nå 5 millioner. Vi har samme utregning som før:

	Gjeldsnivå						
	0	40	50	60	70	80	90
Renteskattefordel	0,00	0,76	0,95	1,14	1,33	1,52	1,71
Sanns.(Stresskostn)	0,00	0,00	0,01	0,02	0,07	0,16	0,31
Stresskostnader 5m	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00
E(Stresskostn.)	0.00	0.00	0.05	0.10	0.35	0.80	1.55
Netto RSF	0.00	0.76	0.90	1.04	0.98	0.72	0.16

Det optimale gjeldsnivået er nå 60%.

3.3

Stresskostnadene er nå 25 millioner. Vi har samme utregning som før:

	Gjeldsnivå						
	0	40	50	60	70	80	90
Renteskattefordel	0,00	0,76	0,95	1,14	1,33	1,52	1,71
Sanns.(Stresskostn)	0,00	0,00	0,01	0,02	0,07	0,16	0,31
Stresskostnader 25m	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
E(Stresskostn.)	0.00	0.00	0.25	0.50	1.75	4.00	7.75
Netto RSF	0.00	0.76	0.70	0.64	-0.42	-2.48	-6.04

Det optimale gjeldsnivået er nå 40%.

Hvor realistisk er dette? Det ser for meg ut til å være for lave sannsynligheter for stresskostnader ved høye gjeldsnivåer. Men dette avhenger av bransje og virksomhet. I selskaper som har en jevn og forutsigbar kontantstrøm er det vanlig å bruke mye gjeld i finansieringen. Hvor usikker kontantstrømmen er, avgjør derfor om gjeldsnivået er utålelig høyt eller ikke.

4

4.1

Hvis tomten ikke utvikles er gjelden høyere enn tomteverdien, dvs. egenkapitalen har verdi lik null. Dagens verdi av gjelden er:

$$NNV_D = \frac{10}{1.1} = 9.09$$

4.2

Utvikling av tomten gir netto nåverdi:

$$NNV = -20 + \frac{25}{1.1} = \underline{2.73}$$

4.3

Tomten utvikles og ny egenkapital på 20m skytes inn. Gjelden er fortsatt 15m, neddiskontert $15/1.1 = 13.64$, slik at egenkapitalen i dag er $\text{EK} = (35 - 15)/1.1 = 18.18$.

4.4

Eierne er ikke villige til å være med på prosjektet, fordi det for dem er en en negativ NNV-investering: $18.18 - 20.00 < 0$.

I denne oppgaven forhindrer et gjeldsoverheng at et godt prosjekt realiseres.

5

I denne oppgaven bruker vi nåverdibrøken definert ved

$$\frac{NNV}{I} > \frac{\beta_D}{\beta_E}\frac{D}{E} \tag{1}$$

som investeringskriterium.

5.1

Eierne vil være villige til å finansiere prosjekter hvor nåverdibrøken er høyere enn forholdet mellom gjeldsbeta og EK-beta ganget med gjeldsgraden. Dette risikoforholdet på høyre side i (1) er i oppgaven:

$$\frac{\beta_D}{\beta_E}\frac{D}{E} = \frac{0.3}{2.0} \cdot 1.2 = 0.18$$

Prosjektene må altså gi en nåverdibrøk som overstiger dette tallet.

	Prosjekt				
	A	B	C	D	E
Investering	100.00	50.00	85.00	30.00	75.00
Netto nåverdi	20.00	6.00	10.00	15.00	18.00
Nåverdibrøk	0.20	0.12	0.12	0.50	0.24

Konklusjonen er at prosjektene A, D og E gjennomføres.

5.2

Prosjektene B og C godtas ikke. De ville gi et tap på grunn av overinvestering på $6+10 = 16$ i netto nåverdi. Legg merke til at disse prosjektene har også positiv netto nåverdi, men gjennomføres altså ikke siden selskapet også må regne med de negative effektene av økt gjeld.

6

6.1

Vi finner den forventede utbetaling på strategiene ved:

$$E(A) = 1.0 \cdot 75 = 75$$
$$E(B) = 0.5 \cdot (140 + 0) = 70$$
$$E(C) = 0.1 \cdot 300 + 0.9 \cdot 40 = 66$$

Prosjekt A har altså høyest utbetaling.

6.2

Når selskapet har gjeld på 40, modifiserer vi rett og slett beregningene ovenfor:

$$E(A - D) = 1.0 \cdot (75 - 40) = 35$$
$$E(B - D) = 0.5 \cdot (140 - 40) = 50$$
$$E(C - D) = 0.1 \cdot (300 - 40) + 0.9 \cdot (40 - 40) = 26$$

Strategi B har den høyeste utbetaling for eierne.

6.3

Vi gjentar siste delspørsmål med $D = 10$.

$$E(A - D) = 1.0 \cdot (75 - 10) = 65$$
$$E(B - D) = 0.5 \cdot (140 - 10) = 65$$
$$E(C - D) = 0.1 \cdot (300 - 10) + 0.9 \cdot (40 - 10) = 56$$

Strategi A og B har den høyeste utbetaling for eierne.

6.4

Med 40m i gjeld vil ledelsen velge strategi B. Denne strategien har en utbetaling som er $75 - 70 = 5$ lavere enn utbetalingen i det beste prosjektet A. Agentkostnadene ved finansieringen er dermed 5.

Har Zyx 110 millioner i gjeld, må vi først finne hvilket prosjekt som gir høyest utbetaling for eierne, slik som før. Vi har altså:

$$E(A - D) = 1.0 \cdot (75 - 110) \text{ dvs. } 0$$
$$E(B - D) = 0.5 \cdot (140 - 110) = 15$$
$$E(C - D) = 0.1 \cdot (300 - 110) + 0.9 \cdot (40 - 110) = 19$$

Strategi C har den høyeste utbetaling for eierne. Agentkostnadene av å velge denne strategien er da $75 - 66 = 19$.

7

7.1

Gjeld gir OI en renteskattefordel. Men i tillegg får eierne også en *eierstyringsfordel* ved at kontantstrømmen til disposisjon for ledelsen blir mindre. Dette er **?** sitt argument om at den frie kontantstrømmen bør være minst mulig, slik at ledelsen ikke fristes til sløseri.

7.2

Hver krone i rentebetalinger ville redusere det skattbare resultatet. Skattesatsen er åpenbart 35%, slik at virkningen av en krone i økt renteutbetaling gir en effekt på $1 - 0.35 = 0.65$. Siden ledelsen sløser bort 10% av den frie kontantstrømmen, er virkningen på utbytte $0.65 \cdot (1.0 - 0.1) = 0.585$.

7.3

Den samlede utdeling gjelder for alle investorer i selskapet, eiere og långivere. For hver krone i økt renteutbetaling reduseres altså utbytte og tilbakekjøp av aksjer med 0.585. Den samlede effekten for alle investorer er dermed $1 - 0.585 = 0.415$.

8

Dette er et *underinvesteringsproblem*: Ledelsen frykter at de ikke kan kommunisere hvor godt prosjekt de sitter med, nøler med å invitere eiere til å tegne nye aksjer, og står dermed i fare for å forkaste et prosjekt som egentlig bør gjennomføres siden det har positiv NNV. Valg av gjeld eller egenkapital er et *signal* om hvor godt prosjektet er.

8.1

8.1.1

Ledelsen vet at den riktige aksjekursen er 12.50.

Stresskostnadene overstiger altså renteskattefordelen med 20m hvis man finansierer med gjeld. Effekten pr. aksje er jo $20/100 = 0.20$.

Finansierer man med egenkapital, selger man altså aksjer for 500m til kurs 13.50. Dette er $500/13.50 = 37$ millioner nye aksjer med en premie på 1, dvs. en samlet gevinst på 37m. Med i alt 137m aksjer utgjør denne gevinsten $37/137 = 0.27$ pr. aksje. Vi kan også

vise dette ved:

$$S_{ny} = \frac{\text{Ny egenkapital}}{\text{Ny aksjebeholdning}} = \frac{12.50 \cdot 100 + 500}{100 + \frac{500}{13.50}} = 12.77 = 12.50 + 0.27$$

Konklusjon: Finansier med egenkapital.

8.1.2

Hva om ledelsen vet at den riktige aksjekursen er 12.50? Kostnaden for lånefinansiering er som før 0.20 pr. aksje.

Henter man inn egenkapital, utgjør dette en rabatt på 1 pr. aksje i forhold til den riktige prisen på 14.50. I alt utgjør dette et tap på 37m, eller 0.27 pr. aksje. Derfor: Finansier med gjeld.

8.2

Hvis IST finansierer med egenkapital, vil investorene konkludere med at aksjen er overpriset, og kursen vil falle til 12.50. Prosjektet er en "lemon", en sur sitron (amerikansk slang for dårlig bruktbil) som IST forsøker å selge til nye eiere.

8.3

Hvis IST finansierer med gjeld, vil investorene ta dette som et signal på at aksjen er underpriset, og kursen vil stige til 14.50.

8.4

Hva om stresskostnadene var null? Renteskattefordelen er en fordel hvis selskapet har et positivt skattbart driftsoverskudd. Finansierer man nå med egenkapital, tas det som et tegn på at prosjektet er svakt, en sur sitron, og investorer vil betale lavest mulig pris for aksjen. Finansierer man derimot med gjeld, vil dette oppfattes som et signal om at aksjen er underpriset, og kursen vil stige med størrelsen på renteskattefordelen pr. aksje dvs. $0.28 \cdot 500/100 = 1.40$. Ny kurs ville i så fall være 14.90.

Kap 16: Oppgaver

1

Anta selskapets ledelse kan velge mellom to prosjekter som begge krever en investering på 100. Det første er usikkert, slik at det gir 200 med sannsynlighet 0.20 i det gunstige utfallet og null i det ugunstige. Det sikre prosjektet gir en utbetaling på 110. Selskapet skal innfri et lån på 20. Alle utbetalinger er nåverdier. Selskapet har ikke evne til å investere mer enn 100, og prosjektene er slik at man må velge hele prosjektet eller ikke noe. Hvis selskapet ikke kan innfri sine låneforpliktelser, vil det etter all sannsynlighet bli slått konkurs.

1. Hvilket prosjekt vil selskapet velge?

2

Aksjekursen til rederiet Osean Int er for tiden 5.50. det er 10 millioner aksjer i selskapet. Anta at selskapet planlegger å redusere sine skattebetalinger ved å låne 20 millioner og kjøpe tilbake aksjer. Skattesatsen er 28%, og eierne forventer at endringen i kapitalstruktur er permanent.

1. Anta perfekte kapitalmarkeder. Hva blir aksjekursen etter kunngjøringen?
2. Anta at den eneste imperfeksjonen i markedet er bedriftsskatter. Hva er aksjekursen etter kunngjøringen med denne forutsetningen?
3. Anta at bedriftsskatter og finansielle stresskostnader, og anta at aksjekursen stiger til 5.75 etter kunngjøringen. Hva er i så fall nåverdien av stresskostnadene?

3

Ditt Firma vurderer å utstede ettårige obligasjoner. Anta at selskapets beta er null. Du mener at følgende estimater for renteskattefordeler og sannsynligheter for stresskostnader gjelder (beløp i millioner):

	Gjeldsnivå						
	0	40	50	60	70	80	90
Renteskattefordel	0.00	0.76	0.95	1.14	1.33	1.52	1.71
Sanns.(Stresskostn)	0.00	0.00	0.01	0.02	0.07	0.16	0.31

1. Hvilket gjeldsnivå er optimalt gitt at stresskostnadene er 2 millioner?
2. Hvilket gjeldsnivå er optimalt når stresskostnadene er 5 millioner?
3. Hva om stresskostnadene er 25 millioner?

4

Et eiendomsselskap har som eneste eiendel en tomt verdt 10 millioner. Selskapet har gjeld på 15 millioner. Med en kostnad på 20 millioner kan tomten utvikles og vil da være verdt 35 millioner om ett år. Den risikofrie renten er 10%, og anta at alle kontantstrømmer er risikofrie. Der er ingen skatter.

1. Hva er verdien av selskapets egenkapital hvis tomten ikke utvikles i dag?
2. Hva er NNV av å utvikle tomten?
3. Anta at selskapet henter inn 20 millioner i egenkapital for å utvikle tomten. Hva er verdien av selskapets egenkapital og gjeld hvis tomten utvikles?
4. Gå tilbake til svaret på forrige deloppgave. Er eiere villige til å skyte inn de 20 millionene som trenges for å utvikle tomten?

5

Sasys har en gjeldsgrad på 1.2, en EK-beta på 2.0 og en gjeldsbeta på 0.30. Foretaket vurderer prosjektene A til E. Ingen av disse endrer foretakets volatilitet.

	Prosjekt				
	A	B	C	D	E
Investering	100	50	85	30	75
Netto nåverdi	20	6	10	15	18

1. Hvilke prosjekter vil eierne være villige til å finansiere?
2. Hva er kostnaden for Sasys av den gjeldsbyrden som skapes?

6

Zyx er et nystartet firma basert på bioteknologi. Nå må det velge en av tre forskningsstrategier. Utbetalingene etter skatt for hver strategi samt deres sannsynlighet er vist nedenfor. Risikoen i hvert prosjekt er diversifiserbar.

Strategi	Sannsynlighet	Utbetaling (mill.)
A	100%	75
B	50%	140
	50%	0
C	10%	300
	90%	40

1. Hvilket prosjekt har høyest forventet utbetaling?
2. Anta Zyx har gjeld på 40 millioner som forfaller til betaling omtrent på den tiden da prosjektets utbetaling kommer. Hvilket prosjekt har den høyeste verdien for eierne?
3. Besvar det siste spørsmålet under forutsetning av at gjelden er 10 millioner.
4. Anta at daglig leder velger den strategien som maksimerer utbetalingene til eierne. Hva er de forventede agentkostnadene for selskapet av å ha 40 millioner i gjeld? Hva om gjelden er 110 millioner?

7

Offentlige Industrier (OI) forutsier at driftsresultatet kommende år er som følger:

EBIT	1000
Rentebetalinger	0
EBT	1000
Skatt	-350
Driftsresultat etter skatt	650

Omtrent 200,000 av OI's driftsresultat trenges for å skape nye, positive NNV-prosjekter. Uheldigvis ventes OI's ledelse å kaste bort 10% av driftsresultatet på unødvendige personlige fordeler, favorittprosjekter og andre utgifter som ikke bidrar til verdiskapingen i selskapet. All gjenværende inntekt vil bli utdelt til eierne via kontantdividende eller tilbakekjøp av aksjer.

1. Hva er de to fordelene av gjeldsfinansiering for OI?
2. Hvor mye ville hver krone i rentebetalinger redusere OI's utbytte og tilbakekjøp av aksjer?
3. Hva er økningen i den samlede utdeling for hver krone i renteutgifter?

8

IST fremstiller datautstyr og trenger nå 500 millioner for å oppføre et nytt produksjonsanlegg. I dag har selskapet ingen gjeld og egenkapitalen er fordelt på 100 milloner utestående aksjer. Den egentlige prisen for IST's aksjer er enten 14.50 eller 12.50. Uavhengige investorer vurder begge muligheter som like sannsynlige, så aksjen omsettes for 13.50.

IST frykter at en ren gjeldsfinansiering av det nye prosjektet vil medføre så mye finansiell stress i form av tap av kunder og dyktige ingeniører at dette vil overstige renteskattefordelen av gjeld på 20 millioner. På den annen side frykter IST også et "lemons"-problem hvis det prøver å finansiere hele nysatsingen med en emisjon på 500 millioner.

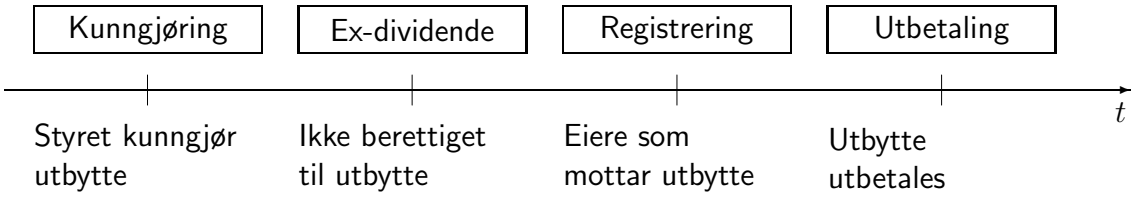
1. Anta at IST emitterer, og at aksjekursen blir værende på 13.50. Anta videre at selskapets ledelse ønsker å maksimere den langsiktige aksjekursen. Ville da ledelsen velge gjeld eller egenkapital hvis
   (a) de vet at den riktige aksjekursen er er 12.50?
   (b) de vet at den riktige aksjekursen er er 14.50?
2. Gitt svaret i forrige deloppgave, hva vil være investorenes konklusjon være hvis IST henter inn ny egenkapital? Hva skjer med aksjekursen?
3. Gitt svaret i deloppgave 1, hva vil være investorenes konklusjon være hvis IST finansierer med gjeld? Hva skjer med aksjekursen?
4. Ville svarene dine endres hvis det ikke var noen stresskostnader, men bare skattefordeler av økt gjeld?

Kap 17: Løsninger

1

1.1

En oversikt over viktige datoer i utbyttebetalingene er vist i figur 1.



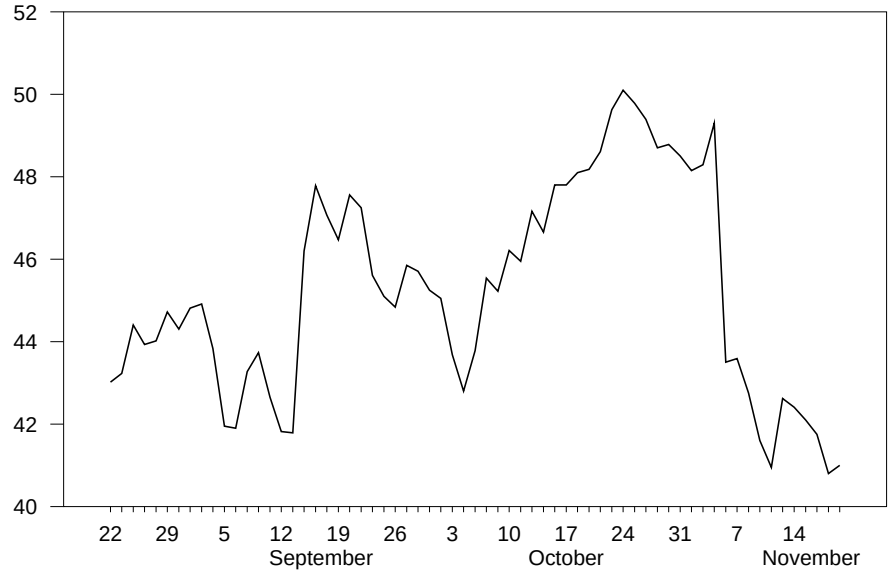
Figur 1: Viktige datoer i utbytteutdeling

Registreringsdatoen er altså den datoen hvor aksjonærer berettiget til utbytte listes opp. *Ex-dividendedatoen* er første dag aksjen noteres uten rett til utbytte. Dette er 4. november 2011.

1.2

Tabellen i oppgaven viser viser altså at prisen før ex-dividendedatoen er 49.30, for så å falle til 43.50 på ex-dividendedatoen, et fall på 5.80. Det foreslåtte, ekstraordinære utbyttet var på 5 kroner pr. aksje, kursnedgangen er altså noe større. Legg merke til at kursendring i tabellen er forskjellen mellom dagens kurs og gårsdagens. Den markerte endringen i prisen kommer også klart frem i figur 2.

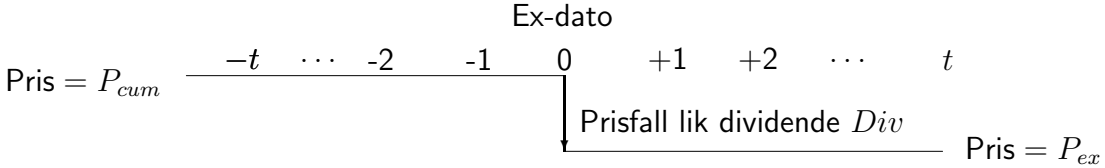
Figur 2 viser en viss stigning i kursen frem til ex-dividendedagen, for så å falle kraftig på selve ex-dividendedagen. Det ser ut til at det var en del etterspørsel etter Orkla-aksjen før ex-dividendedagen, som så slår ut i en dumping av aksjen etter ex-dividendedagen.



Figur 2: Aksjekursutviklingen rundt ex-dividendedagen 4. november 2011 i Orkla. Kilde: Oslo Børs

1.3

Prisendringen er ikke overraskende, se figur 3. Når aksjen har rett til dividende, kalles den P_{cum}, der "cum" rett og slett betyr "med", i dette tilfelle med dividende. Aksjer som er anskaffet på ex-dividende-datoen eller senere har altså ikke rett til dividende, og kalles P_{ex}, "ex" er "uten" dividende. *I et perfekt marked vil aksjekursen synke med dividenden pr. aksje på ex-dividende-dagen.*



Figur 3: Prisfallet på aksjen på ex-dividendedatoen tilsvarer den foreslåtte dividenden når kapitalmarkedet er perfekt

En annen måte å se dette på, er at

$$P_{cum} = P_{ex} + Div \qquad \text{og} \qquad \frac{P_{cum} - P_{ex}}{Div} = 1.0 \tag{1}$$

Denne relasjonen inneholder ikke skatteeffekter. Tar vi hensyn til disse, viser det seg at følgende sammenheng må gjelde når skatt på verdistigning er t_g og skatt på utbytte er t_d:

$$(P_{cum} - P_{ex})(1 - t_g) = Div\,(1 - t_d) \tag{2}$$

Dette impliserer videre at

$$\frac{P_{cum} - P_{ex}}{Div} = \frac{1 - t_d}{1 - t_g} \tag{3}$$

Uten skatter husker vi at dette forholdet må være lik 1.0 i perfekte kapitalmarkeder. Nå kommer det an på skattesatsene om forholdet mellom verdiendring og dividende er lik 1.0. Vi kan omformulere (2) på følgende måte:

$$P_{cum} - P_{ex} = Div \cdot \left(\frac{1 - t_d}{1 - t_g}\right) = Div \cdot \left(1 - \frac{t_d - t_g}{1 - t_g}\right) = Div \cdot (1 - t_d^*) \tag{4}$$

Her er det lagt til og trukket fra 1.0 i den første parentesen. Vi definerer dermed den **effektive skattesatsen på dividende** som

$$t_d^* = \frac{t_d - t_g}{1 - t_g} \tag{5}$$

Sammenhengen (4) sier da at prisendringen på aksjen må tilsvare dividenden justert med den effektive skattesatsen på utbytte. Alt i alt innebærer dette at vi skulle vente en reduksjon i aksjekursen på 5.00, det samme som ekstraordinært utbytte pr. aksje.

Figur 3 viser at dividenden ikke betyr noe for eiernes formue. Prisen P_{cum} før utbetaling av dividende er lik prisen P_{ex} etter utbetaling pluss den utbetalte dividende Div. Eierne har like mye formue før og etter transaksjonen. Dette tyder på at dividendepolitikken er irrelevant for eierne, og at selskapene deler ut utbytte i det hele tatt fremstår som gåte (Black, 1976).

Temaet ble tatt opp av (Miller and Modigliani, 1961) som utformet den siste av Miller og Modigliani's irrelevansteoremer. Teoremet sier at størrelsen på dividendeutbetalingen har ingen virkning på selskapets verdi. De gikk ut fra en forutsetning om et perfekt kapitalmarked, som betyr at

1. Der er ingen markedsfriksjoner og ingen skattevurderinger.
2. Ingen usikkerhet om investeringsplaner.
3. Ingen transaksjonskostnader, for eksempel ingen meglerhonorarer ved kjøp og salg av aksjer, eller ved selskapenes aksjeutvidelser.
4. Ingen informasjonskostnader pga. asymmetrisk informasjon.

For en gitt investeringsplan og forutsetningene ovenfor er selskapets verdi uavhengig av dets dividendepolitikk.

Teorem 1.1: MM3: Dividendens irrelevans

2 Tilbakekjøp

2.1

Like før tilbakekjøpet har HEJ 20m aksjer. Kursen på aksjen må derfor være:

$$P_0 = \frac{\text{Markedsverdi}}{\text{Antall aksjer}} = \frac{1,000,000'}{20,000'} = 50.00$$

2.2

Antall aksjer som kjøpes tilbake:

$$\text{Tilbakekjøpte aksjer} = \frac{100,000,000}{50.00} = 2,000,000$$

2.3

Hvis markedene er perfekte, bør kursen etter tilbakekjøpet være like høy som før tilbakekjøpet.

$$P_{ny} = \frac{\text{Markedsverdi} - \text{Tilbakekjøp}}{\text{Antall aksjer} - \text{Tilbakekjøpte aksjer}} = \frac{900,000'}{18,000'} = 50.00$$

3

3.1

Kapitalkostnaden er opplagt 12%. Aksjekursen er dermed:

$$P_0 = \frac{2 \cdot (1.00 - 0.20)}{0.12} = 13.33$$

3.2

Man bruker de 2 pr. aksje til å kjøpe tilbake aksjer i stedet. Skattesatsen på verdistigning er nå relevant, denne er null. Dermed:

$$P_{ny} = \frac{2}{0.12} = 16.67.$$

4

4.1

Vi har jo at $P_{cum} = P_{ex} + Div$ når det ikke er skatt. Aksjekursen har steget med 10, men samtidig er det kunngjort et ekstra utbytte på 10. Kursen vil da synke til 40 etter dividenden. Den skattbare inntekten er da i begge tilfeller 10. Skatten på verdistigning og på utbytte til bedrifter er lik i Norge på 0% for personlige eiere. Det er dermed skattemessig likegyldig om man velger å selge nå før utbytte eller etter og motta utbytte. I begge tilfeller sitter man igjen med 10.00.

4.2

Hvis du i stedet eier aksjene personlig, er skattesatsen 28% på både verdistigning ved salg og utbytte. Dermed sitter du igjen med 7.20 i begge tilfeller, og alternativene er igjen skattemessig likestilte.

4.3

Hva om skatt på verdistigning er 20% og det dobbelte på utbytte? Dermed favoriseres alternativet med salg før utbytte. Etter skatt har man $10.00 \cdot (1.00 - 0.20) = 8.00$, mens med utbytte har man kun $10.00 \cdot (1.00 - 0.40) = 6.00$ igjen.

5

Vi skal anta at kapitalmarkedene er perfekte. Da innebærer det at det ikke er skatt i økonomien. Generelt er dette spørsmål om det lønner seg for selskapets eiere at selskapet har kontanter eller om man skal dele ut kontantene til eierne i form av utbytte eller tilbakekjøp. Kontantene i dette tilfellet er lett omsettelige, kortsiktige statsobligasjoner.

5.1

Verdien av BG forblir den samme frem til ex-dividendedatoen, dvs. om man deler ut til eierne i form av en årlig dividende eller om man deler ut (nåverdien) av den årlige dividenden på en gang er likegyldig for eierne. Dette fremgår jo av (1).

Ønsker eierne å ha en fast årlig inntekt, kan de selv få til det ved å investere engangsbeløpet i obligasjoner.

5.2

Etter at dividenden er utdelt, faller selskapets verdi med beløpet, 100m.

5.3

Som sagt, dette er likegyldig for eierne.

6

Vi skal altså besvare de tre spørsmålene i oppgave 5 for hvert av underspørsmålene i denne oppgaven. Spørsmålet om hva som er best for eierne avhenger nå av skattesatsene på utbytte og verdistigning. Her blir det regning.

6.1

Den effektive skattesatsen på dividende tar hensyn til skattesatsen på dividende og på verdistigning. I denne oppgaven har vi at den effektive utbytteskatten blir:

$$t_d^* = \frac{t_d - t_g}{1 - t_g} = \frac{0.15 - 0.00}{1 - 0.00} = 0.15.$$

hvor t_d er skatt på utbytte og t_g er skatt på verdistigning.

6.1.1

Hva om styret beslutter at obligasjonene selges og salgssummen deles ut i utbytte? Verdien av BG forblir den samme når dette kunngjøres, fordi tilbakehold av kontanter ikke påvirker utbytteskatt, siden utbytteskatten må betales ved utdeling uansett måten dette gjøres på.

6.1.2

På ex-dividendedagen endres dette. Den effektive skatttesatsen på BG's utbytte er 15%. Dermed faller BG's verdi med

$$\Delta V_L = D \cdot (1 - t_d^*) = 100 \cdot 0.85 = 85$$

Verdifallet er altså mindre enn under forutsetningen om perfekte kapitalmarkeder pga. en "utbytteskattefordel".

6.1.3

Dette vil verken tjene eller skade eierne, dvs. de er likegyldige ved disse skattesatser.

6.2

Skattesatsene endres nå slik at $t_d = t_g = 15\%$ og $\tau_c = t_p = 35\%$. Vi ser dermed at den effektive skattesatsen på dividende er null, siden

$$t_d^* = \frac{t_d - t_g}{1 - t_g} = \frac{0.15 - 0.15}{1 - 0.15} = 0.00.$$

6.2.1

BG kunngjør at den vil betale alt i dividende. Investorer oppfatter dette som et signal om at BG har en skatteulempe med å holde ekstra kontanter i balansen, en ulempe som fjernes i og med utbetalingen. Vi må dermed ta hensyn til bedriftsskatt (τ_c), skatt på kreditors renteinntekter (t_p) og aksjens verdistigning (t_g) for å anslå denne ulempen. Vi går ut fra verdien av selskapet "med alle skatter", dvs.

$$\begin{aligned} V_L &= V_U + D \cdot \left[1 - \frac{(1 - \tau_c)\,(1 - t_d)}{(1 - t_p)}\right] \\ &= V_U + 100 \cdot \left[1 - \frac{(1 - 0.35)(1 - 0.15)}{(1 - 0.35)}\right] \\ &= V_U + 100 \cdot 0,15 = V_U + 15 \end{aligned}$$

BG har altså blitt 15m mer verdt på grunn av beslutningen.

6.2.2

På ex-dividendedagen endres dette. BG vil da falle med 100m siden vi har sett at $t_d = t_g = 15\%$ og dermed $t_d^* = 0$. Verdifallet er altså det samme som under perfekte kapitalmarkeder.

6.2.3

Det har altså vært to prisreaksjoner. Først en på kunngjøringsdatoen og så en på ex-dividendedatoen. Den første betød en økning i selskapsverdi $\Delta V_L = 15$, den andre en nedgang pga utbetalt utbytte. Det siste verdifallet har eierne mottatt som dividende, slik at eierne har tjent de 15 millionene i den første verdistigningen på beslutningen.

7

Dette dreier seg i stor grad om selskapsverdi, eller "enterprise value":

$$\text{Selskapsverdi} = \text{Egenkapital} + \text{Gjeld} - \text{Overflødige kontanter} \tag{6}$$

7.1

Verdien av eiernes egenkapital er fra (6) markedsverdien av egenkapital pluss de overflødige kontantene, til sammen 500m. Dermed er aksjekursen gitt av

$$P_0(\text{CAM}) = \frac{500}{10} = 50.00.$$

7.2

CAM kjøper altså tilbake $100m/50.00 = 2m$ aksjer, og har nå 8m aksjer utestående. Hvis selskapsverdien er 600m, betyr dette at aksjekursen er

$$P_H = \frac{600}{8} = 75.00$$

der P_H antyder en høy selskapsverdi. Er derimot selskapsverdien 200m, har vi at aksjekursen P_L blir

$$P_L = \frac{200}{8} = 25.00$$

7.3

CAM venter altså til etter at nyheten om selskapsverdien er kjent med å kjøpe tilbake aksjer. Hvis den nye verdien er 600m, er kursen før tilbakekjøp

$$P_{0H} = \frac{600 + 100}{10} = 70.00$$

Er det dårlige nyheter er kursen før tilbakekjøp

$$P_{0L} = \frac{200 + 100}{10} = 30.00$$

Aksjekursen er ikke påvirket av tilbakekjøpet i seg selv, dvs. de samme prisene gjelder etter tilbakekjøpet som før. Vi ser at ved kurs 70.00 kjøper CAM tilbake $100m/70.00 = 1,43m$ aksjer og sitter tilbake med 8,57m aksjer. Kursen på disse aksjene er

$$P_{1H} = \frac{600}{8,57} = 70.00.$$

Det samme gjelder for tilfellet da selskapsverdien faller til 200. Kursen blir 30.00.

Legg merke til forskjellen mellom aksjekursene i 7.2 og 7.3. Dette skyldes at kontantbeholdningen demper volatiliteten i aksjen i denne underoppgaven (7.3) i forhold til kursen i underoppgave 7.2.

7.4

Venter ledelsen i CAM at det er gode nyheter som fremkommer, vil de foreta tilbakekjøpet først. Dermed vil kursen stige til 75.00 og ikke (bare) 70.00. Venter man i stedet at dårlige nyheter publiseres, vil man vente til etter nyheten er klar, slik at kursen blir 30.00 i stedet for 25.00. Generelt er det slik at tilbakekjøp gjerne foretas når man mener at aksjen er undervurdert, dvs. når ledelsen mener de har informasjon om aksjen som ikke er fullt ut reflektert i dagens pris.

7.5

Ut fra 7.4 vil vi vente at ledelsen i CAM kjøper tilbake før gode nyheter fremkommer og etter dårlige nyheter. Investorene vil anta at ledelsen har bedre informasjon om selskapets verdi enn utenforstående. Når man så observerer et tilbakekjøp uten at nyheter om selskaper er gjort kjent, vil investorene gå ut fra at nyhetene vil være gode. De vil

etterspørre selskapets aksjer, og kursen vil gå opp.

Referanser

Fischer Black. The dividend puzzle. *Journal of Portfolio Management*, 2:5–8, 1976.

Merton H. Miller and Franco Modigliani. Dividend policy, growth, and the valuation of shares. *Journal of Business*, 34:411–433, 1961.

Kap 17: Oppgaver

1

Den 13. oktober 2011 sendte Orkla ut en melding om "Innkalling til ekstraordinær generalforsamling vedrørende utbytte". Her heter det:

> Det vil bli avholdt ekstraordinær generalforsamling i Orkla den 3. november 2011 kl 15.00 i selskapets lokaler i Karenslyst allé 6, Oslo, hvor eneste sak på agendaen er behandling av styrets forslag til ekstraordinært utbytte. Frist for påmelding er 31. oktober 2011 kl. 15.00.
>
> Aksjen vil bli notert eksklusive utbytte den 4. november 2011. På grunnlag av generalforsamlingens beslutning om aksjeutbytte, vil utbytte bli utbetalt den 15. november 2011 til aksjeeiere pr. generalforsamlingsdato.
>
> Innkalling til Orklas ekstraordinære generalforsamling følger vedlagt. Trykt utgave av innkallingen sendes aksjeeierne i dag.

Aksjekursene like før og like etter kunngjøringen var slik som i tabell 1.

Tabell 1 Kursutviklingen i Orkla rundt ex-dividendedatoen. Kilde: Oslo Børs

Dato	Kurs	Kursendring
31.10.11	48.50	-0.28
01.11.11	48.15	-0.35
02.11.11	48.29	0.14
03.11.11	49.30	1.01
04.11.11	43.50	-5.80
07.11.11	43.59	0.09
08.11.11	42.75	-0.84
09.11.11	41.60	-1.15
10.11.11	40.95	-0.65

1. Hvilken dato er registreringsdato og hvilken er ex-dividendedatoen?
2. Hva er prisen på aksjen med utbytte og aksjekurs uten utbytte?
3. Er prisendringen overraskende?

Forslaget om utbetaling av ekstraordinært utbytte på kroner 5 pr. aksje, eksklusive aksjer i konsernets eie, ble vedtatt.

Aksjen vil bli notert eksklusive utbytte den 4. november 2011. Utbytte vil bli utbetalt den 15. november 2011 til aksjeeiere pr. generalforsamlingsdato

2

Markedsverdien til firmaet HEJ er 1 milliard fordelt på 20 millioner utestående aksjer. Nå har det planer om å dele ut 100 millioner til eierne gjennom tilbakekjøp i det åpne markedet. Forutsett perfekte kapitalmarkeder.

1. Hva er prisen på aksjen like før tilbakekjøp?
2. Hvor mange aksjer kjøpes tilbake?
3. Hva er prisen på aksjen like etter tilbakekjøp?

3

Foretaket NHN vil betale et konstant utbytte på 2 pr. aksje hvert år i overskuelig fremtid. Anta at investorene betaler 20% skatt på dividende og ikke noe skatt på verdistigning. Anta videre at andre investeringer med ekvivalent risiko som NHN-aksjen har en avkastning på 12% etter skatt.

1. Hva er aksjekursen?
2. Anta at NHN's ledelse kunngjør overraskende at firmaet ikke lenger vil betale utbytte men vil heller bruke kontantene til å kjøpe tilbake aksjer i stedet. Hva er aksjekursen etter kunngjøringen?

4

Du kjøpte aksjer i Vekst AS for ett år siden til kurs 40 og planlegger å selge nå til kursen 50. Selskapet har informert markedet om at det vil betale ut et ekstrautbytte på 10. Spørsmålet er om du bør selge nå eller vente til etter at du har mottatt ekstrautbyttet.

1. Anta at de norske skattereglene for bedrifter gjelder for deg mht. skatt på utbytte og skatt på verdistigning. Bør du selge nå eller vente?
2. Anta i stedet at du eier aksjene personlig. Bør du selge nå eller vente?

3. Anta (enda en gang) at skatt på verdistigning er 20% og på utbytte 40%. Hvordan påvirker det beslutningen din?

5

Anta at kapitalmarkedene er perfekte. BryggeGruppen (BG) har for tiden 100 millioner investert i statsobligasjoner som gir 7% i avkastning. Rentene på obligasjonene deles hvert år ut som kontantdividende. Styret vurderer å selge statsobligasjonene og dele ut salgssummen som en ekstraordinær dividende.

1. Hva skjer med aksjekursen til BG hvis styret gjennomfører denne planen?
2. Hva er prisen på aksjen på ex-dividende-dagen for denne ekstraordinære dividenden?
3. Gitt disse prisreaksjonene, vil du si at beslutningen tjener eierne?

6

Gjør 5 om igjen, men forutsett denne gangen:

1. Investorene betaler 15% skatt på utbytte men ingen skatt på verdistigning eller på renteinntekter, og videre at BG ikke betaler bedriftsskatt.
2. Investorene betaler 15% skatt på utbytte og på verdistigning, 35% på renteinntekter, mens BG på sin side betaler bedriftsskatt med en sats på 35%.

7

Selskapsverdien ("enterprise value") til Cam AS er 400 millioner og det har 100 millioner i ledige kontanter. Selskapet har 10 millioner utestående aksjer og ikke noe gjeld. Anta at Cam bruker overflødige kontanter til å kjøpe tilbake aksjer. Etter tilbakekjøpet kommer nyheter som forandrer Cam's selskapsverdi til enten 600 millioner eller 200 millioner.

1. Hva er aksjekursen forut for tilbakekjøpet av aksjer?
2. Hva er aksjekursen etter tilbakekjøpet hvis dets selskapsverdi går opp? Hva er kursen dersom selskapsverdien går ned?
3. Anta at Cam venter til etter at nyhetene er offentliggjort med å kjøpe tilbake aksjer. Hva er aksjekursen etter tilbakekjøpet hvis dets selskapsverdi går opp? Hva er kursen dersom selskapsverdien går ned?

4. Anta at Cam's ledelse forventer at det er gode nyhetene som blir kjent. Ta utgangspunkt i svarene dine på delspørsmålene 2 og 3. Forutsett at ledelsen ønsker å maksimere selskapets aksjekurs på lang sikt. Vil ledelsen da foreta tilbakekjøp før eller etter at nyhetene blir offentlige? Når vil de kjøpe tilbake aksjer hvis de derimot venter at nyhetene er negative?
5. Ta utgangspunkt i svaret ditt på delspørsmål 4. Hvilken virkning forventer du at en kunngjøring om tilbakekjøp har på aksjekursen? Hvorfor?

Kap. 18: Oppgaver

1 LT

1.1 Veid gjennomsnittlig kapitalkostnad

Vi bruker

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + (1-\tau_c) \frac{D}{E+D} r_D \tag{1}$$

Innsetting gir kapitalkostnaden i prosent:

$$r_{wacc} = \frac{10.8}{14.4} 10 + \frac{14.4-10.8}{14.4} 6.1(1-0.25) = \underline{8.64}$$

Vi legger for øvrig merke til at EK-andelen $E/V = 0.75$ og gjeldsandelen selvsagt $D/V = 0.25$.

1.2 Prosjektverdi

Prosjektverdien år 0 er følgende idet vi bruker kapitalkostnaden fra deloppgave 1.1:

$$V_{L,0} = \frac{50}{1.0864} + \frac{100}{1.0864^2} + \frac{70}{1.0864^3} = \underline{185.33}$$

Investeringskostnaden er 100, slik at prosjektets netto nåverdi er $NNV = 185.33 - 150.00 = 35.33$. $NNV > 0$ og prosjektet bør gjennomføres.

1.3 Gjeldskapasitet

Gjeldsandelen i LT er $D/V = (14.4 - 10.8)/14.4 = 0.25$. Når denne holdes fast, har vi fra

$$D_t = d \cdot V_{L,t} \tag{2}$$

der

d Målsatt gjeldsandel: selskapets målsetting om gjeldsandel.

$V_{L,t}$ Prosjektets gjenværende verdi, eller prosjektets salgsverdi

Den neddiskonterte verdien i hver periode er:

$$V_{L,t} = \frac{K_{t+1} + V_{L,t+1}}{1 + r_{wacc}} \tag{3}$$

Dette gir gjeldskapasiteten i de enkelte år, når det forutsettes at den målsatte gjeldsandelen fast på 25%.

		0	1	2	3
Kontantstrøm	K_t	-150	50	100	70
Selskapsverdi	$V_{L,t}$	185.33	151.35	64.43	0.00
Gjeldskapasitet	D_t	46.33	37.84	16.11	0.00

1.4 Kapitalkostnad uten gjeld

LT er uten gjeld. Kapitalkostnaden i dette tilfellet er jo EK-kostnaden som er den samme både i tilfellet med skatt og uten. Vi kan nå finne kapitalkostnaden i LT fordi vi vet at r_{wacc} uten skatteleddet er konstant for alle gjeldsnivåer. Vi finner da kapitalkostnaden idet vi vet at $E/V = 0.75$ og $D/V = 0.25$:

$$r_{wacc} = 0.75 \cdot 10 + 0.25 \cdot 6.1 = 9.025.$$

Selskapets verdi er nå:

$$V_{U,0} = \frac{50}{1.09025} + \frac{100}{1.09025^2} + \frac{70}{1.09025^3} = \underline{184.01}$$

1.5 Renteskattefordel

		0	1	2	3
Kontantstrøm	K_t	-150	50	100	70
Selskapsverdi	$V_{L,t}$	185.33	151.35	64.43	0.00
Gjeldskapasitet	D_t	46.33	37.84	16.11	0.00
Renter	$r_D D$		2.83	2.31	0.98
Renteskattefordel	$(r_D D)\,\tau_c$		0.71	0.58	0.25

Nåverdien av renteskattefordelen er nå:

$$NV(RSF) = \frac{0.70}{1.0864} + \frac{0.57}{1.0864^2} + \frac{0.24}{1.0864^3} = \underline{1.33}$$

1.6 Justert nåverdi

Den justerte nåverdien er jo

$$V_{L,0} = V_{U,0} + NV(RSF) \tag{4}$$

hvis bare renteskattefordelen kommer med som justering av selskapsverdi før skatt. Vi har altså at

$$V_{L,0} = 184.01 + 1.33 = \underline{185.34}$$

som i praksis er det samme vi fant i deloppgave 1.2.

1.7 Egenkapitalmetoden

Kontantstrømmen er oppgitt i oppgaven. Vi kjenner dessuten LTs gjeldskapasitet for hvert år. Da trenger vi bare å justere kontantstrømmen for hvert år med økningen i gjeld i året og renteutgifter etter skatt. Vi trenger å finne fri kontantstrøm til eierne K_E, dvs.:

$$K_E = K - (1 - \tau_c)\, r_D D_t + (D_t - D_{t-1}) \tag{5}$$

Beregningen blir som følger:

		0	1	2	3
Gjeldskapasitet	D_t	46.33	37.84	16.11	0.00
Kontantstrøm	K_t	-150.00	50.00	100.00	70.00
Renteutgifter etter skatt			-2.12	-1.73	-0.74
Endring lån	$D_t - D_{t-1}$	46.33	-8.50	-21.73	-16.11
Fri kontantstrøm til eierne	K_E	-103.67	39.39	76.54	53.16

Eiernes frie kontantstrøm må diskonteres med eiernes kapitalkostnad, $r_E = 0.10$. Dette gir:

$$NNV\,(K_E) = -103.67 + \frac{39.39}{1.11} + \frac{76.54}{1.1^2} + \frac{53.16}{1.1^3} = \underline{35.33}$$

Sammen med investeringen på 150 gir denne netto nåverdien det samme som prosjektverdien vi fant allerede i avsnitt 1.2, nemlig 185.33.

2

2.1 Kapitalkostnad

Vi er på jakt etter r_{wacc}, men kan ikke beregne denne direkte fordi vi ikke kjenner EK-kostnaden. Imidlertid kan vi finne den gjennomsnittlige kapitalkostnaden ut fra opplysningene i oppgaven.

Vi starter med å finne GIs foretaksverdi $V = E + D$. Markedsverdien av egenkapitalen er $E = 20.00 \cdot 1,000' = 20,0mill$. Gjelden er obligasjonsgjeld. Vi må finne dens nåverdi. Kupongbetalingen hvert år er $K = 0.05 \cdot 10mill = 500'$. Vi har at:

$$D = \frac{500,000}{1.06} + \frac{500,000}{1.06^2} + \frac{500,000}{1.06^3} + \frac{500,000 + 10,000,000}{1.06^4} = 11,320,755$$

Da har vi foretaksverdien:

$$V_L = 20,000,000 + 11,320,755 = 31,320,755$$

Det heter i oppgaven at foretaket ikke ventes å vokse mer. Vi kan derfor gå ut fra at verdien er konstant i overskuelig fremtid. Videre trenger vi den årlige kontantstrømmen. Denne er gitt av

$$K = EBIT\,(1 - \tau_c) + \text{Avskr} - \text{Invest} - \text{Endr. AK} \tag{6}$$

Fra opplysningene i oppgaven ser vi at de tre siste leddene faller bort. Dermed er beregningen

$$K = 5,22m \cdot 0.75 = 3,915,000.$$

Vi har nå foretaksverdi og den årlige kontantstrømmen. Da har vi sammenhengen:

$$V_L = 31,320,755 = \frac{3,915,000}{r_{wacc}}$$

siden vi har en evig kontantstrøm. Dermed har vi r_{wacc}:

$$r_{wacc} = \frac{3,915,000}{31,320,755} = \underline{0.125}.$$

Den gjennomsnittlige kapitalkostnaden er 12.5%.

2.2 EK-kostnad

Vi kjenner nå r_{wacc}. Kapitalkostnaden er gitt av

$$r_{wacc} = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D \left(1 - \tau_c\right) \tag{7}$$

La oss sette inn de opplysningene vi har:

$$12.50 = \frac{20,000,000}{31,320,755} r_E + \frac{11,320,755}{31,320,755} 6.00(1 - 0.25)$$

som reduseres til

$$12.50 = 0.64 \cdot r_E + 1.63$$

og som til slutt gir at

$$r_E = \frac{10.87}{0.64} = \underline{17.02}$$

Egenkapitalkostnaden er 17.02%.

3 DU

3.1 Produktlinjens netto nåverdi

Først trenger vi en verdi på kapitalkostnaden. Vi bruker (1) og kan sette direkte inn fra opplysninger i oppgaven.

$$r_{wacc} = 0.60 \cdot 13.3 + 0.40 \cdot 5.0 \cdot (1 - 0.25) = 9.48$$

Vi har prosjektverdien:

$$V_L = \frac{1,125,000}{0.0948 - 0.025} = 16,117,479$$

Da har vi netto nåverdi:

$$NNV = -15,000,000 + 16,117,479 = \underline{1,117,479}.$$

3.2 Lånekapasitet

DU kan låne 40% av prosjektverdien, dvs.

$$\text{Lånekapasitet} = 0.4 \cdot 16,117,479 = \underline{6,446,992}.$$

3.3 Renteskattefordelen

Renteskattefordelen er jo definert som

$$RSF = r_D \cdot D = V_L - V_U \tag{8}$$

V_L er allerede gitt. Vi kan finne V_U ved først å finne r_U. r_U finner vi fra r_{wacc} uten skattejustering. $r_U = r_E$ når selskapet ikke har gjeld. Ifølge Miller og Modigliani sitt første teorem er r_{wacc} konstant for alle gjeldsnivåer. Da har vi r_U:

$$r_{wacc} = 0.60 \cdot r_E + 0.40 \cdot 5.0 = 9.48$$

Vi kan nå isolere r_E

$$r_E = \frac{9.48 - 0.40 \cdot 5.0}{0.60} = 12.47$$

Dermed er V_U gitt som:

$$V_U = \frac{1,125,000}{0.098 - 0.025} = 15,040,107$$

4 Inventa

Beregningene i oppgaven er ikke riktige. Her skal vi få frem effektene av renteskattefordelen når gjeldsandelen endres over prosjektets levetid. Metoden Justert Nåverdi håndterer slike situasjoner.

4.1 Renteskattefordelen

Skattesatsen er 25%. Renteskattefordelen (RSF) i hvert år er $RSF = \tau_c \times r_D D$.

	0	1	2	3	4
Renter (5%)	0.00	-5.00	-5.00	-4.00	-2.50
Renteskattefordel (RSF)	0.00	1.25	1.25	1.00	0.63
$NV(RSF)$	3.70				

Renteskattefordelen for prosjektet er <u>3.70</u>.

4.2 Fri kontantstrøm

Den frie kontantstrøm blir som vist nedenfor.

EBIT		16.00	16.00	16.00	16.00
$EBIT\,(1-\tau_c)$		12.00	12.00	12.00	12.00
Avskrivning		37.50	37.50	37.50	37.50
Investering	-150.00				
Endring arbeidskapital	-25.00				25.00
Netto nye lån	100.00	0.00	-20.00	-30.00	-50.00
Fri kontantstrøm:	-75.00	49.50	29.50	19.50	24.50

4.3 Prosjektverdi

Vi bruker JNV-fremgangsmåten fra (4). Vi skal finne prosjektverdien før skatt og så legge til renteskattefordelen. Prosjektverdien er på sin side bestemt av

$$V_{U,0} = \frac{EBIT\,(1-\tau_c)}{r_E} \tag{9}$$

Her må r_E beregnes på nytt. Vi vet at i en økonomi uten skatt er $r_E = r_{wacc}$ når selskapet er uten gjeld. Dette kan vi utnytte. Vi kan skrive r_{wacc} på denne måten

$$r_{wacc} = \frac{1}{1+\frac{D}{E}} r_E + \frac{\frac{D}{E}}{1+\frac{D}{E}} r_D \tag{10}$$

når vi deler alle elementer i EK- og gjeldsandelene med E. Vi har:

$$r_{wacc} = \frac{1}{1+0.25} 12.5 + \frac{0.25}{1+0.25} 5.0 = 11.0$$

Da har vi V_U

$$V_U = -75.00 + \frac{49.50}{1.11} + \frac{29.50}{1.11^2} + \frac{19.50}{1.11^3} + \frac{24.50}{1.11^4} = 23.93$$

Samlet prosjektverdi er nå

$$V_L = 23.93 + 3.70 = \underline{27.64}$$

Kap. 18: Oppgaver

1 LT

Anta at kapitalkostnaden for egenkapitalen i selskapet Lysende Teknologi (LT) er 10%, at markedsverdien er 10,8 milliarder og at selskapsverdien er 14,4 milliarder. Anta videre at LTs lånekostnad er 6.1%, og at skattesatsen er 25%.

1. Hva er LTs veide, gjennomsnittlige kapitalkostnad?
2. LT har et prosjekt med frie kontantstrømmer fra år 0 på $(-150, 50, 100, 70)$. Hva er verdien av prosjektet, hvis LT beholder en konstant gjeldsgrad?
3. Hva er gjeldskapasiteten i prosjektet hvis gjeldsgraden holdes konstant?
4. Finn også hva selskapets kapitalkostnad og prosjektets verdi vil være hvis LT er uten gjeld.
5. Hvor stor renteskattefordel gir prosjektet opphav til?
6. Vis at prosjektets JNV tilsvarer den verdien du får om totalkapitalmetoden brukes.
7. Bruk egenkapitalmetoden og se om dette gir sammenlignbare resultater.

2

Aksjene i Gaus Industrier (GI) er fordelt på 1 millioner aksjer hver med en en pris for tiden på 20.00. Selskapet har også langsiktig gjeld. Gjelden er risikofri og har fire år til forfall med årlig kupongrente på 5% og pålydende 10 millioner. Første kupongbetaling forfaller om akkurat ett år. Den risikofrie lånerenten for alle forfallsterminer er 6.00%. GI har en $EBIT$ på 5,22 millioner, og selskapet forventer at denne holder seg konstant i de kommende år. Investeringer er nøyaktig like store som avskrivningene og tilsvarer 13 millioner i året. Arbeidskapitalen ventes å holde seg på samme nivå i overskuelig fremtid. Selskapets skattesats er 25%. GI har som siktemål å holde gjeldsgraden konstant i fremtiden, enten ved å utstede nye obligasjoner eller

kjøpe tilbake gamle.

- Beregn GIs veide, gjennomsnittlige kapitalkostnad på grunnlag av denne informasjonen.
- Hva er GIs EK-kostnad?

3

Som konsulent er du hyret for å vurdere en ny produktlinje for DU-gruppen. Prosjektet krever en investering til å begynne med på 15 millioner. Produktet vil skape en fri kontantstrøm på 1,125,000 etter skatt i det første året. Kontantstrømmen forventes å vokse med 2.5% i året. DU har en egenkapitalkostnad på 13.3%, en lånerente på 5% og en skattesats på 25%. DU opprettholder en gjeldsandel på 0.40.

1. Hva er netto nåverdi for den nye produktlinjen inkludert renteskattefordel?
2. Hvor stort lån vil ME ta opp i starten på prosjektet som en følge av at prosjektet settes ut i livet?
3. Hvor mye av produktlinjens verdi kan henføres til nåverdien av renteskattefordelen?

4

Selskapet Inventa har et nytt prosjekt som du er bedt om å presentere for ledelsen. Et prosjektsammendrag er gitt nedenfor.

	0	1	2	3	4
EBIT		16.00	16.00	16.00	16.00
Renter (5%)		-5.00	-5.00	-4.00	-2.50
Driftsresultat før skatt		11.00	11.00	12.00	13.50
Skatt		-2.75	-2.75	-3.00	-3.38
Avskrivning		37.50	37.50	37.50	37.50
Investeringer	-150.00				
Endring i arbeidskapital	-25.00				25.00
Netto nye lån	100.00	0.00	-20.00	-30.00	-50.00
Fri kontantstrøm	-75.00	45.75	25.75	16.50	22.63
NNV	11.73				

Kontantstrømmene er riktig beregnet, men de endelige beregningene er gjort

etter egenkapitalmetoden med en EK-kostnad på 12.5%. Men prosjektets gjeldsgrad er svært annerledes enn selskapets historiske gjeldsgrad på 0.25. For dette prosjektet vil altså selskapet låne 100 millioner i investeringsperioden og så betale tilbake i årene 2 til 4, slik det vises i sammendraget. *Prosjektets* gjeldsandel er derfor annerledes enn selskapets, og det skifter over tid. Dermed kan ikke beregningene i sammendraget være riktige. Skattesatsen er 25%.

Egenkapitalmetoden er tydeligvis ikke den beste metoden for dette prosjektet. Jobben er nå å finne en mer dekkende metode.

1. Hva er nåverdien av renteskattefordelen som prosjektet skaper?
2. Hva er prosjektet frie kontantstrøm?
3. Hva er det beste estimatet på prosjektet verdi ut fra den informasjon som er gitt?