Kalkulus og lineær algebra

Løsninger

Arne Hole

Versjon oppdatert 25.10.2025

Universitetsforlaget

FORORD

Denne samlingen innholder fasit til oppgaver i *Kalkulus og lineær algebra*, 2. utgave 2025, bind I og II (Universitetsforlaget) og heftet *Utfyllende stoff* . Fasit er gitt for alle oppgaver som har et entydig svar. For oppgaver der svaret ikke er entydig, er fasit som hovedregel ikke inkludert. Figurer er heller ikke vist. Til en del oppgaver er det gitt hint eller løsningsforslag.

Med forbehold om trykkfeil og regnefeil. Finner du noe som bør rettes, er det svært velkomment hvis du melder fra til meg på arne.tlf@gmail.com.

Oslo, april 2025
Arne H.

Bind I

Seksjon 1.2

1

a) Sant

b) Sant

c) Usant

d) Sant

e) Usant

f) Sant

g) Sant

h) Sant

i) Usant (den tomme mengden er et objekt, og dette objektet ikke et element i A)

2

a) $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

b) $\{1, 3, 4, 6, 7\}$

3 $R \cap S = \{3, 5, 7\}$, $R \cup S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $R \setminus S = \{1\}$, $S \setminus R = \{9\}$.

Seksjon 1.3

1

a) $(2, 5]$

b) $(-\infty, 10]$

2 $\inf U = 3$,
$\sup U = 12$

3 Hint: Anta at x er en øvre begrensning for U. Forklar hvorfor x da også er en øvre begrensning for $U \cap V$.

4

a) U er en omegn om 2, men ikke om 10.

b) $U^* = (0, 9) \cup (10, 12)$, $\mathbb{R} \setminus U = (-\infty, 0) \cup [9, 10] \cup [12, \infty)$, $\partial U = \{0, 9, 10, 12\}$, $\overline{U} = [0, 9] \cup [10, 12]$. U er hverken åpen eller lukket.

5 $U = (0, 1)$ har 0 som opphopningspunkt. Mengden $\{0\} \cup (1, 2)$ har 0 som isolert punkt.

Seksjon 1.4

$\boxed{1}$

a) $517/16 = 32.3125$

b) $125/36$

$\boxed{2}$

a) $\dfrac{x^3 - x^2}{2 + x}$

b) $\dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 2}$

c) $x^4 - y$

d) x

e) $\dfrac{x + 1}{x^2}$

f) $\dfrac{5x - 8}{x}$

g) $\dfrac{1}{x}$

h) $\dfrac{a - b}{a}$

$\boxed{3}$

a) $\dfrac{x^2 + xy}{1 + x}$

b) x

c) $\dfrac{1}{x(x - 1)}$

d) Kan ikke forenkles vesentlig

e) x

f) $\dfrac{a}{gie}$

g) -27

h) $\dfrac{\mathrm{Dt^2e - r - g^2entli}}{\mathrm{bar - slud^2r}}$

$\boxed{4}$

a) $\dfrac{1 + x^4}{x^4}$

b) $x^2 + ax^2$

c) $x^2 + x^3 + 5x$

d) $-18a - 8$

e) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

f) $\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

$\boxed{5}$

a) x

b) x^4

c) 1

d) 16^{-8}

$\boxed{6}$

a) $x^2 + 8x + 15$

b) $2x^3 + 3x^2 - 10x - 15$

c) $y^2 - 9$

d) $x^3 - x + 2x^2 - 2$

$\boxed{7}$ Svaret blir $\frac{1}{2}(2x+8) - x = 4$

$\boxed{8}$

a) 2,3,4,3,3,3

b) $6 \cdot 10^2$

c) $6.0 \cdot 10^2$

$\boxed{8}$ 189

$\boxed{9}$ 16 m^2

$\boxed{10}$ $8.7 \cdot 10^2$ med to gjeldende, $9 \cdot 10^3$ med ett

$\boxed{11}$ 120 000 kg

$\boxed{13}$ La $a \in \mathbb{R}$. Ved (4) har vi $a + 0 = a$ og $a \cdot 1 = a$. Videre har vi $1 + 0 = 1$ ved (4), så

$$a + 0 = a = a \cdot 1 = a \cdot (1+0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0$$

ved (4) og (3). Forkortningsloven for addisjon (teorem 2) kombinert med (1) gir nå $0 = a \cdot 0$.

$\boxed{14}$ La $a \in \mathbb{R}$ være gitt. Ved (5) fins et tall $b \in \mathbb{R}$ slik at $a + b = 0$. Vi må vise at det fins kun ett unikt tall med denne egenskapen. Anta at $c \in \mathbb{R}$ er slik at $a + c = 0$. Vi har da

$$a + b = a + c, \qquad \text{som ved (1) gir} \qquad b + a = c + a$$

Forkortningsloven for addisjon (teorem 2) gir nå $b = c$, så unikheten er vist.

15 Merk først at (4) sier det fins *to* elementer 0 og 1 i mengden $\mathbb{R}$. Altså vet vi at $1 \neq 0$. La $a \neq 0$ være gitt, og anta at $b, c \in \mathbb{R}$ er slik at

$$ab = 1 \quad \text{og} \quad ac = 1$$

Vi må vise at $b = c$. Ved (1) har vi $ca = ba$, og ved (6) fins d slik at $ad = 1$. Dette kombinert med (2) gir

$$\begin{aligned}(ca)d &= (ba)d \\ c(ad) &= b(ad) \\ c \cdot 1 &= b \cdot 1 \\ c &= b\end{aligned}$$

16 Ved oppgave 14 vet vi at det fins et unikt tall $-(-a)$ slik at

$$(-a) + (-(-a)) = 0$$

For å vise $-(-a) = a$ holder det derfor å vise at

$$(-a) + a = 0$$

Men dette følger direkte, fordi $(-a) + a = a + (-a) = 0$ ved (1) og (5).

17 Igjen holder det ved oppgave 14 å vise

$$ab + (-a)b = 0$$

Ved (2), (3) og oppgave 13 i siste overgang har vi

$$ab + (-a)b = ba + b(-a) = b(a + (-a)) = b \cdot 0 = 0$$

18 Bruk av (2), oppgave 17, (5) og (4) gir

$$\begin{aligned}ab &= (-a) \cdot 0 + ab = (-a) \cdot (b + (-b)) + ab \\ &= (-a)b + (-a)(-b) + ab \\ &= 0 + (-a)(-b) = (-a)(-b)\end{aligned}$$

19 Dette kalles forkortningsloven for multiplikasjon. Vi bruker samme metode som i beviset for forkortningsloven for addisjon (teorem 2). Anta at $ac = bc$. Ved (6) fins d slik at $cd = 1$. Da gir (2) og (4)

$$\begin{aligned}(ac)d &= (bc)d \\ a(cd) &= b(cd) \\ a \cdot 1 &= b \cdot 1 \\ a &= b\end{aligned}$$

$\boxed{20}$ Anta at $ab = 0$ og $a \neq 0$. Da er $ba = 0$ ved (1), og ved (6) fins c slik at $ac = 1$. Ved (2) får vi

$$\begin{aligned}(ba)c &= 0 \cdot c \\ b(ac) &= 0 \\ b \cdot 1 &= 0\end{aligned}$$

som medfører $b = 0$ ved (4).

$\boxed{21}$ Ved oppgave 15 fins et unikt tall b slik at $a^{-1}b = 1$. Derfor er det nok å vise at $a^{-1}a = 1$. Men dette følger direkte fra (6) kombinert med (1), fordi $(a^{-1})a = a(a^{-1}) = 1$.

$\boxed{22}$ Ved unikhetsegenskapen i oppgave 15 er det igjen nok å vise at

$$(ab) \cdot (a^{-1}b^{-1}) = 1$$

Bruk av (1) og (2) gir

$$(ab) \cdot (a^{-1}b^{-1}) = (a(bb^{-1}))a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$$

$\boxed{23}$

a) Bruk av (3) i andre overgang, oppgave 17 i tredje overgang og definisjonen av subtraksjon i første og fjerde overgang gir

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$$

b) Merk først at ved (1) og (2) er

$$((-b) + (-c)) + (b + c) = ((-b) + b)) + ((-c) + c)) = 0 + 0 = 0$$

Ved unikhet av additiv invers (oppgave 14) følger at

$$(-b) + (-c) = -(b + c)$$

Vi får nå ved (2)

$$a - (b + c) = a + (-(b + c)) = a + ((-b) + (-c)) = (a + (-b)) + (-c) = (a - b) + (-c) = (a - b) - c = a - b - c$$

c) Ved b) i andre overgang, definisjonen av subtraksjon i første og tredje overgang og oppgave 16 i siste overgang får vi

$$a - (b - c) = a - (b + (-c)) = a - b - (-c) = a - b + (-(-c)) = a - b + c$$

$\boxed{24}$

a) Ved definisjonen av divisjon har vi

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = (ac^{-1})(bd^{-1})$$

og ved oppgave 22
$$\frac{ab}{cd} = (ab)\cdot(cd)^{-1} = (ab)(c^{-1}d^{-1})$$
Ved bruk av (1) og (2) følger at de to høyresidene her er like.

b) På samme måte gir (1), (2) og oppgave 22
$$\frac{ad}{cd} = (ad)(cd)^{-1} = (ad)(c^{-1}d^{-1}) = (a\cdot c^{-1})\cdot(d\cdot d^{-1}) = a\cdot c^{-1} = \frac{a}{c}$$

25

a) Definisjonen av divisjon kombinert med (1) og (3) gir
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = ac^{-1} + bc^{-1} = (a+b)c^{-1} = \frac{a+b}{c}$$

b) Definisjonen av divisjon kombinert med oppgave 23a), (1) og (3) gir
$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = ac^{-1} - bc^{-1} = (a-b)c^{-1} = \frac{a-b}{c}$$

26 Først en kommentar. Trekantulikheten for reelle tall tilsvarer spesialtilfellet dimensjon $n = 1$ i trekantulikheten (8) fra teorem 4.1.1, som gjelder generelt for vektorer i $\mathbb{R}^n$. Tilfellet $n = 2$ i dette teoremet dekker vektorer i planet, og dermed også trekantulikheten for komplekse tall, se kapittel 8. Beviset for teorem 4.1.1 representerer på en måte den naturlige metoden for å bevise trekantulikheten, men dette beviset bruker masse teori som man i prinsippet ikke trenger for å vise ulikheten for tilfellet $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Et direkte bevis for $\mathbb{R}$ basert på aksiomene (1)–(11), slik denne oppgaven spør om, er imidlertid mer kronglete enn man kanskje skulle tro. Vi skal her se på en variant som ser på en mengde ulike tilfeller hver for seg. Dette er ikke det korteste beviset man kan gi, men det er til gjengjeld relativt oversiktlig. Vi bruker det vi har vist i de foregående oppgavene, for oversiktens skyld her uten referanse.

Vi deler i fire tilfeller: (i) $a = 0$, (ii) $a > 0$ og $b > 0$, (iii) $a < 0$, $b < 0$ og (iv) $a > 0$, $b < 0$. Ved omdøping og bruk av (1) dekker dette alle muligheter.

Tilfelle (i): $a = 0$. Ulikheten sier da
$$|b| \le |0| + |b| = 0 + |b| = |b|$$

Tilfelle (ii): $a > 0$ og $b > 0$. Her er hovedpoenget at siden $a > 0$, gir (9) med $c = b$ at
$$a + b > 0 + b = b$$

Siden vi altså har $a + b > b$ og $b > 0$, gir (7) at $a + b > 0$. Ved definisjonen av absoluttverdi er da $|a + b| = a + b$, $|a| = a$ og $|b| = b$. Ulikheten sier altså
$$a + b \le a + b$$

som holder fordi $a + b = a + b$.

Tilfelle (iii): $a < 0$ og $b < 0$. Ved vår regning for tilfelle (ii) har vi

$$(-a) + (-b) > 0$$

Ved (9) med $c = a + b$ gir dette $(-a) + (-b) + a + b > 0 + a + b$, som forenkler seg til $0 > a + b$. Ved definisjonen av absoluttverdi får vi da

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|,$$

siste overgang fordi $-a > 0$ og $-b > 0$.

Tilfelle (iv): $a > 0$ og $b < 0$. Her deler vi i tre undertilfeller: (iv-a) $a + b = 0$, (iv-b) $a + b > 0$ og (iv-c) $a + b < 0$.

Vi starter med (iv-a), altså $a+b = 0$. Addisjon av $-b$ på begge sider av ulikheten $b < 0$ ved (9) gir $(-b)+b < 0+(-b)$, altså $0 < -b$. Addisjon av $(-b)$ på begge sider av ulikheten $0 < a$ gir ved (9) at $0+(-b) < a+(-b)$, altså $-b < a+(-b)$ Kombinasjon av $0 < -b$ med $-b < a + (-b)$ gir ved (7) at $0 < a + (-b)$. Dette er akkurat det trekantulikheten sier i vårt tilfelle. Når $a + b = 0$, $a > 0$ og $b < 0$, sier den nemlig

$$|0| \leq |a| + |b| = a + (-b), \qquad \text{altså} \qquad 0 < a + (-b)$$

Vi går så videre til tilfelle (iv-b), altså $a > 0$, $b < 0$ og $a + b > 0$. Da er $|a + b| = a + b$, $|a| = a$ og $|b| = -b$. Kombinasjon av $-b > 0$ med $0 > b$ gir ved (7) at $-b > b$. Ved (9) gir dette $a + (-b) > a + b$. Vi får nå

$$|a + b| = a + b < a + (-b) = |a| + |b|$$

Til slutt tar vi tilfelle (iv-c), altså $a > 0$, $b < 0$ og $a + b < 0$. Siden $a > 0$, følger ved (9) at $a + (-a) > 0 + (-a)$, så $0 > -a$. Ved (7) brukt på ulikhetene $a > 0$ og $0 > -a$ følger $a > -a$. Ved (9) gir dette $a + (-b) > (-a) + (-b)$. Vi får nå (andre overgang: se løsning til oppgave 23b))

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) < a + (-b) = |a| + |b|$$

Seksjon 1.5

$\boxed{1}$

a) Usant

b) Sant

c) Usant

d) Usant

e) Sant

f) Sant

Seksjon 1.6

$\boxed{1}$ $12/7 = 1.714285714...$

$\boxed{2}$ $23222/9900$

$\boxed{3}$

a) $408/99$

b) $a = -77993434/999900$

$\boxed{6}$ La $c = a + b$, da har vi $b = c - a$. Anta at c er rasjonalt. Siden både c og a nå er rasjonale, blir b også rasjonalt. (Tenk vanlig brøkaddisjon ved felles nevner.) Dette strider mot antakelsen om at b er irrasjonalt.

$\boxed{7}$ Samme triks som på forrige oppgave. Hvis for eksempel $c = ab$ og $a \neq 0$, får vi $b = c/a$, som blir rasjonalt hvis a og c er rasjonale (brudden brøk, gjør om til vanlig brøk)

$\boxed{9}$

a) $\mathbb{N}$ lister seg selv. For $\mathbb{Z}$ kan vi lage listen $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

b) Vi grupper brøkene etter summen av absoluttverdiene til teller og nevner. Først lister vi opp alle brøkene med sum 1, så de med sum 2, og så videre. Liste: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}$, osv.

c) Hint: Anta at du har en liste over alle reelle tall. Konstruer et tall d ved å velge desimal nummer n i d ulikt desimal nummer n i tall nummer n på listen. Tallet d kan ikke være det første tallet på listen, fordi første desimal ikke stemmer. Men d kan heller ikke være tall nummer to på listen, fordi andre desimal ikke stemmer. Og så videre.

Seksjon 1.7

$\boxed{1}$

a) 8 og -8

b) 10

c) 5

d) -5

$\boxed{2}$ $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\sqrt[3]{10} \approx 2.1544$

$\boxed{4}$ 0

Seksjon 1.8

$\boxed{1}$

a) $x^2 + 2$

b) $x^2 - x + 1$

c) $x^2 + 3$

$\boxed{2}$ $x^3 + 2x + 1$, vi får $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 9x + 4 = (x^3 + 2x + 1) \cdot (x + 4)$

$\boxed{3}$ $x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 3$

$\boxed{4}$

a) Går ikke opp, $(x^2 - 2x + 1)/(x + 1) = x - 3 + 4/(x + 1)$

b) $x - 3$

c) Går ikke opp, $(x^7 + x^6 - 1)/(x + 1) = x^6 - 1/(x + 1)$

d) Går ikke opp, $(2x^3 + 4x)/(x^2 + 1) = 2x + 2x/(x^2 + 1)$

Seksjon 1.9

$\boxed{1}$

a) $x = 4$

b) $x = -15/4$

c) $x = 3, x = 2$

d) Ingen løsning

e) $x = 0, x = 5$

f) $x = 7$

g) $x = t, x = -1$

h) $x = (-a - t^2)/(kt)$

i) $x = 5, x = -1$

j) $x = 10$

$\boxed{2}$ $x = 1, x = 4, x = -5$

$\boxed{2}$

e) Formelen holder opplagt for $n = 1$. Hvis vi antar at $(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, får vi

$$\begin{aligned}
[(1 + 2 + \cdots + n) + (n + 1)]^2 &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + 2(n + 1)(1 + 2 + \cdots + n) + (n + 1)^2 \\
&= (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 2(n + 1)\frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)^2 \\
&= (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + (n + 1)^2 \cdot \left(\frac{2n}{2} + 1\right) \\
&= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n + 1)^3
\end{aligned}$$

Her brukte vi underveis formelen fra eksempel 2.

Seksjon 1.11

$\boxed{1}$

a) 364

b) 10

c) 142

d) -2

$\boxed{2}$ $2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5$

$\boxed{3}$ $\sum_{i=3}^{6} 4^i$

$\boxed{6}$ $\sum_{k=2}^{8} 4(k-2)^2,\ \sum_{k=2}^{11} 1,\ \sum_{k=2}^{5}(5(k-1)^2-2)$ og $\sum_{k=2}^{3} 2(k-3)$

Seksjon 1.12

$\boxed{1}$ 84

$\boxed{2}$ 24

$\boxed{3}$ 720

$\boxed{4}$ 12271512

$\boxed{5}$ 504

$\boxed{6}$ 2598960

Seksjon 1.13

$\boxed{1}$ $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$\boxed{2}$ $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

$\boxed{3}$ $(3y-4)^5 = 243y^5 - 1620y^4 + 4320y^3 - 5760y^2 + 3840y - 1024$, og $(1+\sqrt{7})^7 = 4264 + 1624\sqrt{7}$

$\boxed{4}$ 1184040

$\boxed{6}$ Antall delmengder er 2^n. Tolkning: Antall delmengder med i elementer er $\binom{n}{i}$

Seksjon 1.14

$\boxed{1}$

a) ≈ 272988

b) $2^{31} - 1$

c) $\frac{2}{3}(1 - (1/2)^{10}) \approx 0.6660156$

$\boxed{2}$

a) $t^5(1 - t^{2k+2})/(1 - t^2)$

b) $2^{n+1} - 1$

Seksjon 1.15

$\boxed{2}$ $y = x + 1$

$\boxed{3}$ $y = x + 5$

$\boxed{4}$ Vinkelrett

$\boxed{5}$ Avstand $\sqrt{170}$, nærmest origo $(5, 6)$

$\boxed{6}$ $x \approx 281$ meter

$\boxed{7}$ $\sqrt{84}$

$\boxed{8}$

a) 45°

b) 120°

c) $\approx 57.3^\circ$

$\boxed{9}$ $x^2 + (y + 4)^2 = 4$

$\boxed{10}$ To og en halv omdreining

$\boxed{11}$

a) $-\pi/6$

b) $-3\pi/4$

c) 4π

d) ≈ 0.175

e) ≈ 0.0175

f) ≈ 0.055

Seksjon 1.16

1

a) Lukket

b) Åpen

c) Åpen

2 -28

3

a) $660 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

e) Hint: Anta at $2, 3, 5, \ldots, P$ er de eneste primtallene. La $T = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots P) + 1$. Kan da T skrives som et produkt av primtall?

Seksjon 2.1

2 Grafen hopper opp og ned mellom 0 og 1, men hoppene ligger uendelig tett. Dermed vil grafen for vårt øye se ut som de to horisontale linjene $y = 0$ og $y = 1$

4 $(f \circ f)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$

5 x

6

a) Hvis $f(x) = f(y)$ får vi $3 + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{y}$, som gir $x = y$. Vi har $V_f = (3, \infty)$

b) $f^{-1}(x) = 1/(x-3)$, $D_{f^{-1}} = V_f = (3, \infty)$, $V_{f^{-1}} = D_f = (0, \infty)$

Seksjon 2.2

1

a) $x = \log(4/5)$

b) $x = \log 4/log 5$

c) $x = \frac{\log 2 - \log 5}{3 \log 7}$

d) $x = 995/2$

2

a) $C(1.25) \approx 2.862$ (kg)

b) Omtrent 14 år.

Seksjon 2.3

1

a) $\sqrt{3}/2$ og $1/2$

b) $\sin 30^\circ = 1/2$ og $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$

2

a) $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

b) $\cos(\pi/3) = 1/2$, og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

c) $\cos(5\pi/4) = -1/\sqrt{2} = \sin(5\pi/4)$

3 $\sin 13^\circ \approx 0.225$, $\cos 78^\circ \approx 0.208$

4 $\approx 70.53^\circ$.

5 Vinklene er 45°, 45° og 90°. Katetene har lengde $d = 5/\sqrt{2}$.

6 $\theta = \arctan(2/3) \approx 33.69^\circ$

7 $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

8

a) $\pi/4$

b) $\pi/6$

c) $2\pi/3$

d) $-\pi/6$

9 Areal $15/4$. Siste side blir $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$

11 ≈ 25.7 meter

Seksjon 2.4

1

a) $r = 2, \theta = 0$

b) $r = 4, \theta = \pi/2$

c) $r = 1, \theta = 3\pi/2$

d) $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$

e) $r = 2, \theta = \pi/3$

f) $r = 5$, $\theta = \arccos(-3/5) \approx 2.2$

$\boxed{2}$

a) $(-1, 0)$

b) $(-1, -1)$

$\boxed{3}$

a) $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi)$

b) $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$

c) $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $r > 1/\cos\theta$. Forklaring: De mulige verdiene for θ er intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$. Når du har valgt en θ i dette intervallet, må du så velge $r > 1/\cos\theta$ for at punktet ditt skal havne innenfor området.

d) $\theta \in [0, \pi/4]$, $r \in [0, 2]$

$\boxed{4}$ Vi får $r^2 = \sin\theta$, så $x^2 + y^2 = y/r = y\sqrt{x^2 + y^2}$. Altså $(x^2 + y^2)^{3/2} = y$.

Seksjon 2.5

$\boxed{1}$

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 8$

$\boxed{2}$ De andre vinklene er tilnærmet 50.5° og 89.5°. Den siste siden er tilnærmet 7.8.

$\boxed{3}$ Må ha $3 = 2.5 \tan \mathbf{v}$, der v er takvinkelen. Kalkulator gir $v = \arctan(3/2.5) \approx 50.2^\circ$

Seksjon 3.1

$\boxed{1}$

a) $x = 3$, $y = 7$

b) $x = 17$, $y = -13$

$\boxed{2}$

a) $x = 3$, $y = -6$, $z = 0$

b) $x = y = 1/5$, $z = -1$

$\boxed{3}$ $x = 1$, $y = 2$

$\boxed{4}$ Løsningene er alle punkter (x, y) slik at $x = 2y$

$\boxed{5}$ Systemet har ingen løsninger

Seksjon 3.2

$\boxed{1}$

a) Generell løsning $(x, y, z) = (-2, -1, 2)$. Dimensjon: 0

b) Gen. løsning $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t, -5t, 1-4t, t)$. Dimensjon: 1. Kommentar: En annen måte å skrive løsningen på er

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t, -5t, 1-4t, t) = (2, 0, 1, 0) + t \cdot (-3, -5, -4, 1)$$

Tilsvarende for oppgavene nedenfor. Dette vil bli aktuelt senere, når vi diskuterer nullrommet til matriser og kjernen til linæravbildninger. Se seksjon 12.3.

c) Generell løsning $(x, y, z) = (-\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t, t)$. Dimensjon: 1

$\boxed{2}$

a) Generell løsning $(x, y) = (5, 1)$. Dimensjon 0

b) Generell løsning $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2 - 15r + 3s - \frac{25}{2}t, -1 - 6r + s - \frac{11}{2}t, r, s, t)$. Dimensjon: 3

c) Gen. løsn. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - 5s + t, s, t, -1, 2)$. Dimensjon: 2

d) Ingen løsning

e) Gen. løsning $(x, y, z) = (3 - 2t, -2t, t)$. Dimensjon: 1

Seksjon 3.3

$\boxed{1}$

a) 23

b) -3

$\boxed{2}$

a) -27

b) 46

$\boxed{3}$ 34

$\boxed{4}$

a) Inhomogent

b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -2 & -17 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \; D = -184$

c) En entydig løsning

$\boxed{5}$

a) Entydig løsning

b) Uendelig mange løsninger

6 Entydig løsning

7

a) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$, $D = a^4 + a$

b) $a = 1$ og $a = -2$

c) Uendelig mange løsninger hvis $a = 1$ eller $a = -2$, entydig løsning ellers.

2 Ved suksessiv oppløsning etter første rad får vi at dersom en kvadratisk matrise M er såkalt *øvre triangulær*, dvs. at den har bare nuller under diagonalen (nedover fra øvre venstre hjørne til nedre høyre hjørne), så er det M lik produktet av elementene M_{ii} langs diagonalen. Dette gjelder forøvrig også hvis M er *nedre triangulær*, dvs. at M har kun nuller over diagonalen.

Seksjon 3.5

1

a) A er 3×3, B er 3×1 og C er 2×3

b) BA, AC og BC er ikke definert. Vi har $AB = \begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}$, $CA = \begin{bmatrix} 8 & 16 & -12 \\ 6 & 0 & -13 \end{bmatrix}$, $CB = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $M = \begin{bmatrix} 9 & 39 & -16 \\ 21 & 11 & -48 \\ 6 & 18 & -4 \end{bmatrix}$

2

a) $AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -26 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$

3

a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Ved å prøve deg frem kan du se at resultatet ser ut til å være $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Du kan så bevise dette ved induksjon ved å bruke at

$$\begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3+3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

5

a) $AI = IA = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$

6 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$ (dette er en (2×1)-matrise)

Seksjon 3.6

1

a) På disse oppgavene er det enklest å bruke den eksplisitte formelen for inverse av (2×2)-matriser, selv metoden i teorem 2 naturligvis også fungerer. Vi får at den inverse er

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Matrisen er sin egen invers

c) Ikke inverterbar, fordi determinanten er 0

3 $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4 De transponerte av matrisene fra oppgave 1 er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

De transponerte fra oppgaven i forrige seksjon er

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ Hvis vi antar at A og B har inverser A^{-1} og B^{-1}, får vi ved vanlige regneregler for matriser

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

En tilsvarende regning viser at $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Altså $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

a) Siden $A \cdot A^{-1} = I$, får vi $\det(A^{-1}A) = \det I$. Altså $\det(A^{-1}A) = 1$. Produktregelen for determinanter gir så at $\det(A^{-1}A) = (\det A^{-1}) \cdot (\det A) = 1$. Divider med $(\det A)$ på begge sider av den siste likheten. Husk at $\det A$ bare er et tall, slik at $(\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Merk at siden A er inverterbar, vet vi også at vi ikke deler på 0 her.

b) Produktregelen for determinanter kombinert ved induksjon. Induksjonstrinnet: For $n \geq 1$ har vi

$$\det(A^{n+1}) = \det(A^n \cdot A) = \det(A^n) \cdot (\det A) = (\det A)^n \cdot (\det A) = (\det A)^{n+1}$$

Her brukte vi produktregelen for determinanter i andre overgang.

$\boxed{7}$ Hvis mamma, Stine og Trine er x, y og z, så har vi $x = y+z$, $x-21 = 4(y-21)+4(z-21)$ og $(x-18)+(y-18) = 10(z-18)$ Omskriving gir at dette systemet har matrisen M som koeffisientmatrise. Vi får $x = 49$, $y = 27$ og $z = 22$.

$\boxed{8}$ Determinanten er $84 - 31\lambda + \lambda^2$. Verdier av λ: 28 og 3

Seksjon 3.7

$\boxed{1}$ Egenverdien er 3

$\boxed{2}$

a) $\lambda_1 = 9$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} -3B_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A_2 \\ 2A_2 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 2$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} -7B_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 3$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A_1 \\ (5/2)A_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$

d) $\lambda = 2$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (alle vektorer er egenvektorer)

$\boxed{3}$

a) $\lambda_1 = 1$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ A_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = -1$ med $\begin{bmatrix} A_3 \\ -A_3 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1$ med $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \\ A_2 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = -5$ med $\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$

d) $\lambda_1 = -5$ med $\begin{bmatrix} -6B_1 \\ B_1 \\ -(5/3)B_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{bmatrix}$

4 $\lambda_1 = -6$ med $\begin{bmatrix} -2C_1 \\ -3C_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -2$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ -A_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 2$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ B_3 \\ -B_3 \end{bmatrix}$

5

a) $\lambda_1 = 0$ med $\begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ med $\begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\lambda = 0$ med $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (alle vektorer er egenvektorer)

Seksjon 3.8

1

a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) Neste dag: $\begin{bmatrix} 0 \\ 300 \end{bmatrix}$. Dagen etter det igjen: $\begin{bmatrix} 150 \\ 150 \end{bmatrix}$

c) $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Dagen før: $\begin{bmatrix} 130 \\ 170 \end{bmatrix}$. To dager før: $\begin{bmatrix} 40 \\ 260 \end{bmatrix}$

d) $A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

e) Tilstanden ved tid $t = n$ blir $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 200(-1/2)^n \\ 200 - 200(-1/2)^n \end{bmatrix}$

2

a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Nei. Generell løsning $(x, y, z) = (20, 6, t)$, der t er en fri parameter

c) Nei. Usikkerheten knytter seg til antall gamle ifjor. Denne usikkerheten tilsvarer den frie parameteren i ligningssystemet fra forrige punkt

d) $\lambda = 2$ med egenvektorer $(4C_1, 2C_1, C_1)$, $\lambda_2 = -2$ med egenvektorer $(4C_2, -2C_2, C_2)$, $\lambda_3 = 0$ med egenvektorer $(0, 0, C_3)$. At tilstandsvektoren er en egenvektor med egenverdi 0, er ensbetydende med at bestanden vil være utryddet neste år. I vårt eksempel vil dette være tilfelle når vi bare har gamle katter

e) $(x_n, y_n, z_n) = (8 \cdot 2^n + 4 \cdot (-2)^n, 4 \cdot 2^n - 2 \cdot (-2)^n, 2 \cdot 2^n + (-2)^n)$ for $n > 0$. Vi har $(x_8, y_8, z_8) = (3072, 512, 768)$

3 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1/2) \end{bmatrix}$. Merk at P ikke er entydig bestemt.

Seksjon 3.9

1 Ja

2 Determinanten er 0 for $a = -4$, $a = 1$ og $a = 4$. Ligningssystemet er garantert ikke selvmotsigende når $a \notin \{-4, 1, 4\}$. (Velg $x_4 = 0$.)

3

a) $x = 10/3$, $y = -10/3$

b) $x = 5$, $y = 0$

4 $x = -3$, $y = 1$, $z = 2$

5

a) -1

b) 0

8

a) En entydig løsning

b) En entydig løsning

9 La N være matrisen som fås fra M ved å trekke fra λ langs diagonalen. Fra teorem teksten vet vi at det $N = \det(N^{\mathrm{T}})$. Vi finner egenverdiene til M ved å sette det $N = 0$. Videre finner vi egenverdiene til M^{T} ved å sette det $N^{\mathrm{T}} = 0$, fordi transponering ikke endrer diagonalen i en matrise. Altså må egenverdiene til M og M^{T} bli de samme.

10 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ med egenverdi 0, men den er ikke en egenvektor for M^{T}

11 Vi får $(AB)C = C$, som gir $A(BC) = C$. Innsatt $BC = I$ gir dette $A = C$. Så $BA = I$.

Seksjon 4.1

1

a) $(3, 4)$

b) $(10, 2)$

c) $(6, -9)$

d) $\sqrt{13}$

e) -7

f) $\sqrt{650}$

$\boxed{3}$ $\theta = \arccos(34/\sqrt{1750}) \approx 0.622$

$\boxed{4}$ Ikke vinkelrett

$\boxed{5}$

a) $(5, 3, 0)$

b) $(-11, -22, 6)$

c) $(-9, -12, 6)$

d) $\sqrt{29}$

e) -2

f) 15

Seksjon 4.2

$\boxed{1}$

a) $(-2, 1, -4)$

b) $(-3, 2, 1)$

c) $\mathbf{0}$

$\boxed{2}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Figuren bør vise en pil fra origo til punktet $(1, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^3$

$\boxed{3}$ 19

$\boxed{4}$ 21

$\boxed{5}$ 21

$\boxed{6}$ 51/2

$\boxed{7}$ Vi har

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ad - bc)$$

Så

$$|(a, b, 0) \times (c, d, 0)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (ad - bc)^2} = |ad - bc| = \left|\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right|$$

Fra teorem 3 følger nå at

$$\left|\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right|$$

er arealet av parallellogrammet utspent av vektorene (a, b) og (c, d) i planet.

8 Vi regner ut venstre side i lov 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \Big(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \Big) \\
&= \Big(a_2b_3 + a_2c_3 - a_3b_2 - a_3c_2, a_3b_1 + a_3c_1 - a_1b_3 - a_1c_3, a_1b_2 + a_1c_2 - a_2b_1 - a_2c_1 \Big)
\end{aligned}$$

Utregning av høyre side i lov 2, altså $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, gir samme svar. Dermed er lov 2 vist. Tilsvarende med lov 3 og 4.

9 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (-1, 0, 0)$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (0, 1, -1)$

Seksjon 4.3

1 $x + 2y - z = 0$

2 $x + y + z = 3$

3

a) $(1, 1, -3)$

b) $(1, -1, -1)$

4

a) $\mathbf{N} = (2, 2, 0)$

b) $x + y = 0$

5 Den generelle løsningen av ligningen $2x + 11y - 5z = 0$ kan skrives $x = -\frac{11}{2}y + \frac{5}{2}z$, med Y og z som frie parametre. Setter vi $y = s$ og $z = t$, kan løsningen skrives $(x, y, z) = s \cdot (-\frac{11}{2}, 1, 0) + t \cdot (\frac{5}{2}, 0, 1)$. Med andre ord utgjør de to vektorene $(-\frac{11}{2}, 1, 0)$ og $(\frac{5}{2}, 0, 1)$ en basis for U. Et penere svar får vi ved å gange dem med 2. Basisen vår blir da $\{(-11, 2, 0), (5, 0, 2)\}$.

6

a) Normalvektor $(1, 1, 1)$

b) Normalvektor $(1, 1, 0)$

c) Normalvektor $(-1, 1, 1)$

d) Normalvektor $(1, 0, 1)$

$\boxed{7}$ Ingen punkter felles

$\boxed{9}$

b) $\arccos(7/\sqrt{126}) \approx 0.897$

Seksjon 4.4

$\boxed{1}$ 9

$\boxed{2}$ 105

$\boxed{3}$ 6

$\boxed{4}$

a) Vektoren $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ må stå vinkelrett på $\mathbf{a}$

b) Sett $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, regn ut de to vektorene $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ og $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, og se de er like etter at du har ganget ut alle parentesene. Dette blir en del regning, men det trener nøyaktighet og konsentrasjon. Et glimrende alternativ til meditasjon.

Seksjon 4.5

$\boxed{1}$

a) $(10, 3, 1)$

b) $(-8, -8, -12)$

$\boxed{2}$

a) Lineært uavhengige

b) Lineært avhengige

$\boxed{3}$

a) Lineært avhengige

b) Lineært uavhengige

$\boxed{4}$

a) 2

b) $\mathbf{x}$ ligger ikke i underrommet

$\boxed{6}$

a) $\{(-2, 4, 19), (1, 2, -1/2)\}$. Dimensjon 2

b) $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$. Dimensjon 2

c) $\{(3, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 0, 1)\}$. Dimensjon 3

7 De to vektorene $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ og $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$ har begge prikkprodukt 0 med $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$. La U være underrommet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Siden $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, er dimensjonen til U lik 2. At alle vektorer i U har prikkprodukt 0 med $\mathbf{n}$, følger fordi enhver lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ har prikkprodukt 0 med $\mathbf{n}$:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + (b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

Siden $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 2 \neq 0$, er $\mathbf{n}$ selv ikke i U. Altså er U ikke tredimensjonalt, og det følger at U er underrommet bestående av alle vektorer som har prikkprodukt 0 med $\mathbf{n}$.

8 $\{(1, -1, 1, -1), (2, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

Seksjon 4.6

1

a) $A(\mathbf{e}_1) = (-1, 1, 0)$, $A(\mathbf{e}_2) = (0, 0, 1)$

b) Basis: $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Rang: 2

2

a) $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Basis: $\{(-1, 1)\}$. Rang: 1

b) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Basis: $\{(-1, 1)\}$. Rang: 1

c) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Basis: $\{((1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$. Rang: 2

d) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Basis: $\{(2, 1, 0), (5, 1, 0), (2, -2, 1)\}$. Rang: 3

3 Gauss-eliminasjon (eller Matlab, eller hva du måtte ønske) gir at den reduserte trappeformen til A er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra metoden for å finne *rangen og en basis for bildet til en matrise* (se denne seksjonen) vet vi at søylevektorene i A som tilsvarer pivoter i den reduserte trappeformen, utgjør en basis for bildet til A, altså Col A. Altså er $\{(1, 0, -2, 1), (2, 3, 1, 0)\}$ en basis. Basisen har to elementer, så bildet er todimesjonalt og rangen til A er 2.

Seksjon 4.7

$\boxed{1}$ $9/\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ $x = 0$

$\boxed{3}$ $x + 7y = 12$

$\boxed{4}$ Nei

$\boxed{5}$

a) $\arccos(34/\sqrt{1325}) \approx 0.365$

b) $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 0.955$

c) $\arccos(1/2) = \pi/3$

$\boxed{6}$

a) $(-1, -5, -6)$

b) $(3, 5, 24)$

c) $(0, 0, 1)$

d) $\sqrt{98}$

e) 12

f) 70

$\boxed{7}$

a) $(0, -2, -2)$

b) $(4, -8, 4)$

$\boxed{8}$ 4

$\boxed{9}$ 2

$\boxed{10}$ $-x + 2y + z = 3$

$\boxed{13}$ Basis: $\{(2, -1, 1), (9, 1, 2), (0, 6, -3)\}$,
$\mathbf{x} = (2 - 34t, 1 + 4t, -3 - 11t, t)$, der $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{14}$

a) Vi har

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan se fra dette at de to første søylevektorene i M, altså $(0, 1, 0)$ og $(4, 0, 1)$, utgjør en basis for bildet til M. Så bildet er et todimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$, altså et plan gjennom origo. Vi har

$$(0, 1, 0) \times (4, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -4),$$

så planet har $(a, b, c) = (1, 0, -4)$ som normalvektor. Siden planet også går gjennom $x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, blir ligningen $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = x + 0 - 4z = 0$ Ligningen for P er altså $x - 4z = 0$. Biologisk tolkning: Det må være 4 ganger så mange unge som gamle. (Tenk over hvorfor.)

b) $L \cap P = \{(20, 6, 5)\}$. Biologisk tolkning: Snittet representerer den tilstanden vi må ha hatt ifjor dersom utviklingen av kolonien har vært styrt av matrisemodellen i mer enn ett år.

15 Anta at $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Da får vi

$$(aM)\mathbf{x} = a(M\mathbf{x}) = a(\lambda\mathbf{x}) = (a\lambda)\mathbf{x}$$

Her brukte vi antakelsen vår i andre overgang og vanlige regler for matriseregning i første og tredje overgang. Altså er $\mathbf{x}$ en egenvektor for matrisen aM med egenverdi $a\lambda$.

17

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

18

d) Hvis $\mathbf{x}$, $y \in \operatorname{Nul} A$ og $a \in \mathbb{R}$, har vi

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{og} \quad A(a\mathbf{x}) = (aA)\mathbf{x} = a(A\mathbf{x}) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Altså er $\operatorname{Nul} A$ et underrom av $\mathbb{R}^n$

19 Radreduksjon (Gauss-eliminasjon) gir at A er radekvivalent med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

som er på redusert trappeform. Siden de tre første søylene her er pivot-søyler, følger at de tre første søylevektorene i A er en basis for bildet $\operatorname{Col} A$ til matrisen. Altså er

$$\{(1, 0, 2, 1), (0, 6, 9, 6), (3, 7, 15, 6)\}$$

en basis for Col A. For å finne en basis for nullrommet Nul A (definisjon i forrige oppgave), kan vi løse det homogene ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dette gjøres ved den samme Gauss-eliminasjonen, og resultatet blir

$$\mathbf{x} = (2t, (1/3)t, -t, t) = t(2, 1/3, -1, 1)$$

der $x_4 = t$ er fri parameter. Dette betyr at vektoren $(2, 1/3, -1, 1)$ alene utgjør en basis for Nul A. (Dimensjonen til Nul A er altså 1.)

20

a) Den skifter fortegn

b) De vil være nøyaktig like.

c) Underdeterminantene dannes ved å stryke raden og søylen hvert tall er med i, og fortegnet veksler $- + - + \cdots$ (minus først).

d) Fortegnet veksler her igjen $+ - + - \cdots$

e) Fortegnet veksler $+ - + - \cdots$ hvis linjenummeret er odde, og omvendt hvis linjenummeret er partall. Som oppsummering kan vi si at fortegnene fordeler seg som rutene på et sjekkbrett, med positiv (hvit) rute øverst til venstre.

f) Fortegneregelen blir akkurat som for oppløsning etter n-te rad (sjakkbrett).

Seksjon 5.1

1 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ Følgen konvergerer mot 0

3

a) Konvergerer mot 0. For å vise dette kan du for eksempel bruke at $\frac{\sin x}{x} \to 1$ når $x \to 0$. Dette er en grense som er kjent fra videregående skoles matematikk. Hvis du setter $x = 1/n$, tilsvarer $n \to \infty$ at $x \to 0^+$, og uttrykket for det n-te tallet i følgen kan skrives

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x$$

Når $x \to 0^+$, går her første faktor mot 1 og siste faktor mot 0. Så produktet går mot 0.

b) Konvergerer mot 2

c) Divergerer

d) Konvergerer mot 0

4

d) -5

5

c) $\{\frac{m}{m+1}\}_{m=1}^{\infty}$ og $\{\frac{-m}{m+1}\}_{m=1}^{\infty}$

Seksjon 5.2

1

a) $f(0.1) = 10$, $f(0.001) = 1000$,
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

b) $f(10) = 0.1$, $f(100) = 0.01$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

4

a) $x = 10002$

b) $x = B^2 + 2$

c) $A = B^2 + 2$

6

a) For hvert tall $\varepsilon > 0$ fins et tall A slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $x < A$ medfører $|f(x) - L| < \varepsilon$.

b) For hvert tall B fins et tall A slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $x > A$ medfører $f(x) < B$.

c) For hvert tall B fins et tall A slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $x < A$ medfører $f(x) < B$.

d) For hvert tall B fins et tall $\delta > 0$ slik at vi for alle $x \in D_f$ har at $|x - a| < \delta$ medfører $f(x) < B$.

Seksjon 5.3

1

a) -11

b) 5

c) -1

d) $-\infty$

e) 1

f) 5

g) $-\infty$

h) ∞

2

a) Begge grensene er 1

b) Ja

3

a) Vertikal asymptote $x = 5$, horisontal asymptote $y = 3$.

b) Vertikal asymptote $x = 0$, horisontal asymptote $y = 0$.

$\boxed{4}$ a) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{1}{5}\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ g) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ h) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\boxed{5}$

a) $(k - x_0)/(m_0^2 + 1)^3$

b) $-t^2$

$\boxed{6}$ $\lim_{t\to\infty} g(t) = 2.5$

$\boxed{1}$ Funksjonen $f(x) = x^5+x^4+x^3+x-1$ er kontinuerlig på $[-1, 1]$, og vi har $f(-1) = -1+1-1-1-1 = -3 < 0$, $f(1) = 1+1+1+1-1 = 3 > 0$. Ved skjæringssetningen følger at f har et nullpunkt x i intervallet $(-1, 1)$, og dette blir da en løsning av den oppgitte ligningen.

$\boxed{2}$ Merk: Her menes det at $D_f = [1, 2]$. Resultatet følger da fra ekstremalverdisetningen, fordi f er kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$.

$\boxed{3}$ For en polynomfunksjon med grad større enn 0 har vi alltid

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \pm\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} P(x) = \pm\infty$$

Grunnen er at leddet med høyest eksponent dominerer. Hvis graden er et oddetall, er grensen når $x \to \infty$ lik $+\infty$ hvis og bare hvis grensen når $x \to \infty$ er $-\infty$. Dette gjør at for en polynomfunksjon $P(x)$ av odde grad vil det alltid finnes punkter $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $P(a) < 0$ og $P(b) > 0$. Siden $P(x)$ er kontinuerlig på det lukkede intervallet mellom a og b, følger ved skjæringssetningen at $P(x)$ har et nullpunkt mellom a og b på tallinjen.

Seksjon 5.5

$\boxed{1}$

a) Du trenger ikke *finne* f^{-1}. Resultatet følger fordi alle leddene i $f(x)$ er enten konstante eler strengt voksende. Kontinuitet følger fra teoremet i denne seksjonen.

Seksjon 5.6

$\boxed{1}$

a) Bruk skjæringssetningen

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Kun ett nullpunkt.

Seksjon 6.1

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = 89x^{88}$

b) $f'(x) = 5$

c) $f'(x) = -10/x^3$

d) $f'(x) = 3x^2 - 2x^{-3}$

e) $f'(x) = (2x(x^3+1) - x^2 \cdot 3x^2)/(x^3+1)^2$

f) $f'(x) = -2(x-1)^{-2}$

$\boxed{2}$

a) $f'(x) = (2x+1)(1+x^3+x^6) + (x^2+x+1)(3x^2+6x^5)$

b) $f'(x) = (7x^6+x^{-2})(x^7+x^3+2) + (x^7+x^{-1})(7x^6+3x^2)$

c) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

d) Her kan vi skrive $f(x) = x(e^x \sin x)$ og bruke svaret fra forrgie delpunkt. Produktregelen gir da

$$f'(x) = 1 \cdot e^x \sin x + xe^x(\sin x + \cos x)$$

$\boxed{3}$ a) $u(x) = 1+2x$, $u'(x) = 2$ b) $g(u) = u^9$ c) $g'(u) = 9u^8$, $g'(u(x)) = 9(1+2x)^8$ d) $f'(x) = 18(1+2x)^8$

$\boxed{4}$ a) $u(x) = x^2+5x+3$, $u'(x) = 2x+5$ $g(u) = u^7$ c) $g'(u) = 7u^6$, $g'(u(x)) = 7(x^2+5x+3)^6$ d) $f'(x) = 7(x^2+5x+3)^6 \cdot (2x+5)$

$\boxed{5}$ a) $u(x) = x^2+1$, $u'(x) = 2x$ b) $g(u) = u^{70}$ c) $g'(u) = 70u^{69}$, $g'(u(x)) = 70(x^2+1)^{69}$ d) $f'(x) = 140x(x^2+1)^{69}$

$\boxed{6}$ $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$ b) $g(u) = u^5$ $g'(u) = 5u^4$, $g'(u(x)) = 5(\sin x)^4$ d) $f'(x) = 5(\sin x)^4 = 5\sin^4 x$

$\boxed{7}$

a) $f'(x) = \cos(2x^2) \cdot 4x$

b) $f'(x) = 10(\cos x)^9(-\sin x)$

c) $f'(x) = -1/(\sin^2 x)$

d) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$\boxed{8}$

a) $f'(x) = 3(\ln|x|)^2 \cdot \frac{1}{x}$

b) $f'(x) = (x+2)^{12} + 12(x+1)(x+2)^{11} - 2/x^2$

c) $f'(x) = (x^2+1)^9 + 18x^2(x^2+1)^8$

d) $g'(x) = [8x^7(x^2+x^3) - (x^8-2)(2x+3x^2)]/(x^2+x^3)^2 - (1+4x^3)/(x+x^4)^2$

e) $h'(x) = 8[(x^2+1)^{11} + x^4]^7 \cdot [22x(x^2+1)^{10} + 4x^3]$

$\boxed{9}$

a) $f'(x) = -x^{-2}(1-(1/x)^2)^{-1/2}$

b) $f'(x) = 2x/(1+(x^2)^2)$

$\boxed{10}$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(7(x+h)+13)-7x+13}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{7h}{h} = 7$

$\boxed{12}$

a) $f'(x) = 5e^{5x}$

b) $f'(x) = (4x^3+2x)/(x^4+x^2)$

c) $f'(x) = e^{x^2+2x}(2x+2)$

d) $f'(x) = e^{(\ln 10)x} \cdot (\ln 10) = 10^x \ln 10$

e) $f'(x) = 1/(x \ln 5)$

f) $f'(x) = e^x \ln((x+1)/(x^2+1)) + e^x(x^2+1)(-x^2-2x+1)(x+1)^{-1}(x^2+1)^{-2}$

$\boxed{13}$

a) $f'(x) = \tan x + x/(\cos^2 x)$

b) $f'(x) = 2x/(\cos^2(x^2))$

$\boxed{14}$ $e^x + \ln|x| + C$

$\boxed{16}$

a) $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

b) Samme triks som på a), bruk at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$\boxed{17}$ Vi bruker den vanlige produktregelen to ganger:

$$(uvw)' = (u(vw))' = u'(vw) + u(vw)' = u'(vw) + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$$

Seksjon 6.2

$\boxed{1}$

a) $2x$

b) $9(5t+t^3)^8(5+3t^2)$

c) $2at + 3t^2$

d) t^2

e) $2ay + xk$

f) gt

g) $6a_0(a_0x+\phi)^5$

h) $4x$

$\boxed{2}$ $2xyzta + tvp^2$ og $2tvxp$

$\boxed{3}$

a) $12x^2(x^3+2)^3$

b) $12(x^4+4x)^{11}(4x^3+4)$

c) $(x^{-1}+3)x^{-2}$

d) $10(ax^2+bx+c)^9(2ax+b)$

Seksjon 6.3

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

b) Nullpunkter: $x = 2$ og $x = -1$. Får $f'(x) = (6x+6)(x-2)$.

c) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[2, \infty)$, avtar på $[-1, 2]$.

d) Lokalt maksimumspunkt $x = -1$, lokalt minimumspunkt $x = 2$. Har $f(-1) = 7$, og $f(2) = -20$.

$\boxed{2}$

a) $x = 0$

b) Vokser på $(-\infty, 1]$, avtar på $[1, \infty)$. Makspunkt $x = 1$

c) Konkav på $(-\infty, 2]$, konveks på $[2, \infty)$. Vendepunkt $x = 2$.

$\boxed{3}$ a) $x = 0$ b) Avtar på $(-1, -1/5]$ og vokser på $[-1/5, 1/5]$. Globalt minimumspunkt $x = -1/5$. Minimumsverdi: $f(-1/5) = -e^2/5$. Globalt maksimumspunkt $x = 1/5$. Maksimumsverdi $f(1/5) = (e^4)/5$ c) Konkav på $(-1, -2/5]$, konveks på $[-2/5, 1/5]$. Vendepunkt $x = -2/5$

$\boxed{4}$ a) $x = 0$ b) Avtar på $(-1, -1/a]$ og vokser på $[-1/a, 1/a]$. Globalt minimumspunkt $x = -1/a$. Minimumsverdi: $f(-1/a) = -e^2/a$. Globalt maksimumspunkt $x = 1/a$. Maksimumsverdi $f(1/a) = e^4/a$ c) Konkav på $(-1, -2/a]$, konveks på $[-2/a, 1/a]$. Vendepunkt $x = -2/a$

$\boxed{5}$

a) Bruk Rolles teorem på funksjonen $g(x) = f(x) - f(0)$, eller middelverdisetningen.

b) Middelverdisetningen med $b = 1$, $a = 0$.

$\boxed{6}$ Skrue bør velge bredden $x \approx 126,5$ m.

$\boxed{7}$

a) Kall lengden av innhegningen for y. Da får vi målene på figuren. Siden vi totalt har 40 meter gjerde, blir $y = 40 - x - (x - 4) = 44 - 2x$. Arealet av $A = xy$ av innhegningen som funksjon av x blir dermed $A(x) = xy = x(44 - 2x) = 44x - 2x^2$.

b) Vi deriverer for å finne maksimum: $A'(x) = 44 - 4x$. Ligningen $A'(x) = 0$ gir $x = 11$, og vi ser at $A'(x) < 0$ for $x < 11$ og $A'(x) > 0$ for $x > 11$. Altså: Arealet blir størst når $x = 11$ (m).

$\boxed{8}$ Lengde 20 meter, bredde 10 meter.

$\boxed{9}$ Kun $x = 0$. For hvis $f(x) = 2x - \arctan x$, har vi $f(0) = 0$ og $f'(x) \geq 1$ for alle x

$\boxed{10}$ Hint: Tenk kjerneregelen baklengs. Svaret blir $(m_0/k)\arcsin(kx) + C$

$\boxed{11}$

a) Nullpunkt $x = 0$. Asymptote $y = \pi/2$

b) Voksende på hele intervallet $[-1, \infty)$.

$\boxed{12}$

a) Vi får

$$f'(x) = \frac{1 - 2x\arctan x}{(1 + x^2)^2}$$

Innsetting gir at $f'(-1) < 0$, $f'(0) > 0$ og $f'(1) < 0$. Ved ekstremalverdisetningen har f et globalt maksimum og et globalt minimum hvis vi erstattter D_f med intervallet $[-1, 1]$. Vi ser at $f(x) = -f(-x)$, og at $f(x) > 0$ for $x > 0$. Det følger at når vi tar $D_f = [-1, 1]$ ligger det globale maksimumspunktet for f i intervallet $(0, 1)$, og det globale minimumspunktet ligger i $(-1, 0)$. For å se at disse to er globalt maks og min for f også når $D_f = \mathbb{R}$, observer at $x \geq 1$ gir

$$1 - 2x\arctan x \leq 1 - 2\cdot 1\cdot \arctan 1 = 1 - 2\cdot(\pi/4) < 0$$

Her brukte vi at $\arctan x$ er strengt voksende for $x \geq 0$. Det følger at $f'(x) < 0$ for $x \geq 1$, så maksimumspunktet på $[-1, 1]$ er også globalt maksimum for f på hele $\mathbb{R}$. Tilsvarende fås at minimumspunktet på $[-1, 1]$ er globalt minimum for f på $\mathbb{R}$.

Ved skjæringssetningen følger at det det fins $a \in (-1, 0)$ og $b \in (0, 1)$ slik at $f'(a) = f'(b) = 0$.

b) $y = 0$ er horisontal asymptote (tosidig)

$\boxed{13}$

a) Regneregler for ln gir

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= \ln x^{3/2} + \ln(1 + x)^{5/2} + \ln(1 + x^2)^{7/2}\\ &= \frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{2}\ln(1 + x) + \frac{7}{2}\ln(1 + x^2)\end{aligned}$$

Dette gir $f'(x) = f(x)\cdot[\ln f(x)]' = f(x)\cdot[3/(2x) + 5/(2 + 2x) + 14x/(2 + 2x^2)]$.

b) Her har vi

$$\ln\sqrt{x^2\sqrt{x^2\sin x}} = \ln[x^{3/2}\cdot(\sin x)^{1/4}] = \frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{4}\ln(\sin x)$$

Dette gir $f'(x) = f(x)\cdot[\ln f(x)]' = f(x)\cdot[3/(2x) + \cos x/(4\sin x)]$.

Seksjon 6.4

$\boxed{1}$ a) 0 b) Avtar på $(-\infty, 0]$, vokser på $[0, \infty)$. Globalt minimum $x = 0$. Minimumsverdi $f(0) = 0$. c) Konveks på hele $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ a) 2 og -2 b) Avtar på $[-3, 0]$, vokser på $[0, 2]$. Globalt maksimum $x = -3$. Maksimumsverdi $f(-3) = 5$. Globalt minimum $x = 0$. Minimumsverdi $f(0) = -4$. Lokalt maksimum $x = 2$. Lokal maksimumsverdi $f(2) = 0$ c) Konveks på hele $[-3, 2]$.

$\boxed{3}$ a) 0 b) Voksende på hele $\mathbb{R}$ c) Konkav på $(-\infty, 0]$, konveks på $[0, \infty)$. Vendepunkt $x = 0$.

$\boxed{4}$ a) 0 b) Avtar på $[-2, 0]$, vokser på $[0, 2)$. Globalt maksimum $x = -2$. Maksimumsverdi $f(-2) = 16$. Globalt minimum $x = 0$. Minimumsverdi $f(0) = 0$. c) Konveks på hele $[-2, 2)$.

$\boxed{5}$ a) 0 og 6 b) Avtar på $(-\infty, 3]$, vokser på $[3, \infty)$. Globalt minimum $x = 3$. Minimumsverdi $f(3) = -9$ c) Konveks på hele $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ a) 0 b) Vokser på $(-\infty, 2]$ og $[4, \infty)$, avtar på $[2, 4]$. Lokalt maksimum $x = 2$. Lokal maksimumsverdi $f(2) = 20$. Lokalt minimum $x = 4$. Lokal minimumsverdi $f(4) = 16$ c) Konkav på $(-\infty, 3]$, konveks på $[3, \infty)$. Vendepunkt $x = 3$.

$\boxed{7}$ a) 1 b) Avtar på $(-\infty, 1]$, vokser på $[1, \infty)$. Globalt minimum $x = 1$. Global minimumsverdi $f(1) = 0$

$\boxed{8}$ a) 0 og -1 b) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[-\frac{1}{2}, \infty)$, avtar på $[-1, -\frac{1}{2}]$. Lokalt maksimum $x = -1$. Lokal maksimumsverdi $f(-1) = 0$. Lokalt minimum $x = -\frac{1}{2}$. Lokal minimumsverdi $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ c) Konkav på $(-\infty, -1]$, konveks på $[-1, \infty)$. Vendepunkt $x = -1$.

Seksjon 6.5

$\boxed{1}$

a) $s(1) = 4.9$, $s(2) = 19.6$ (m/s), dvs. har falt 4.9 m etter 1 sekund, og 19.6 m etter 2 sekunder

b) $v(t) = s'(t) = gt$. Farten er 9.8 m/s etter 1 sekund, og 19.6 m/s etter 2 sekunder

c) $a(t) = s''(t) = g$

d) Tid: ≈ 1 sek. Fart: ≈ 10 m/s

e) 14 m/s

Seksjon 6.6

$\boxed{1}$ $4/\sqrt{3}$ m/s ≈ 2.3 m/s

$\boxed{2}$ $3\sqrt{3}$ m/s

Seksjon 6.7

1

a) $1/2$

b) $1/2$

c) $+\infty$

d) 0

e) 0

f) 3

g) $-1/6$

h) 0

i) 1

j) 1

k) e

l) 1

2

a) 0

b) 0

c) 0

d) $+\infty$

3

a) 0

b) 0

Seksjon 6.8

1

a) Vi har

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2}$$

To ganger l'Hopital gir nå at $f'(0) = 0$.

2

a) $K = 1/2$

b) Vi har

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\arctan h}{\sin 2h} - \frac{1}{2}}{h} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h^2}\cdot \sin 2h - \arctan h \cdot 2\cos 2h}{1} = \frac{1\cdot 0 - 0\cdot 2}{1} = 0$$

$\boxed{5}$

a) For $x > 0$ har vi

$$f'(x) = \frac{(-2)}{x^3}\cdot e^{-1/x^2}$$

Så for $x \in (0,1)$ har vi

$$|f'(x)| < 2e^{-1/x^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{når } x \to 0^+.$$

Altså $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, og det er opplagt at $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ også. Altså $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, og siden f er kontinuerlig i $x = 0$ følger at

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

b) Metoden er den samme som i punkt a). Ved gjentatt derivasjon følger (induksjon) at for $x > 0$ har vi

$$f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^m}\cdot e^{-1/x^2}$$

der $P(x)$ er et polynom og $m > 0$ er et helt tall. Så for $x \in (0,1)$ har vi

$$|f^{(n)}(x)| < |P(x)\cdot e^{-1/x^2}| \longrightarrow |P(0)\cdot 0| = 0 \qquad \text{når } x \to 0^+.$$

Altså $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$, og det er opplagt at $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$ også. Altså $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, og siden $f^{(n-1)}(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ (induksjon) følger at

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

Seksjon 6.9

$\boxed{1}$ a) Vokser på $(-\infty, 0)$ og $[3, \infty)$, avtar på $(0, 3]$. Nullpunkt $x = 0$ b) $x = 0$ vertikal asymptote. Vi sjekker skråasymptote:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{3/x} = e^0 = 1$$

og så

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} [xe^{3/x} - x] = \lim_{x\to\infty} x(e^{3/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3/x} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3/x}\cdot(\frac{-3}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 3$$

Altså er $y = ax + b = x + 3$ en skråasymptote.

$\boxed{2}$ a) Vokser på $(-\infty, 0]$ og $[6, \infty)$, avtar på $[0, 3)$ og $(3, 6]$ b) $x = 3$, $y = x + 3$

$\boxed{3}$ a) Vokser på $(-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{3}]$ og $[\frac{1}{2}\sqrt{3}, \infty)$, avtar på $[-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1)$ og $(-1, 1)$ og $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$. Nullpunkt $x = 0$ b) $x = \pm 1$, $y = x$

$\boxed{4}$

a) Her gir metoden $a = 1$, men grensen for b blir $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$. Altså ingen skråasymptote.

b) Ingen

c) Her får du $a = 1$, og så $b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = 0$. Så $y = x$ er en skråasymptote.

d) $y = x$

e) $y = 2x + 5/2$

Seksjon 6.10

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = 2 \cosh x \sinh x = \sinh 2x$

b) $f'(x) = \tanh x + x/(\cosh^2 x)$

c) $g'(x) = \frac{1}{2} \sinh x (\cosh x)^{-1/2}$

d) $h'(x) = 5 \cosh(5x)$

$\boxed{5}$

a) Fasiten gis av figuren i boken

b) Fasiten gis av figuren i boken

c) Fasiten gis av figuren i boken

d) Fasiten gis av figuren i boken

Seksjon 6.11

$\boxed{1}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-1/2}$

b) $\psi'(t) = 3(\operatorname{artanh} t)^2/(1 - t^2)$

$\boxed{7}$

a) $x = \ln(\sqrt{5} - 2)$ og $x = \ln(3 + \sqrt{10})$

b) $x = \pm\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Seksjon 6.12

1 1.80219

2 −0.56714

Seksjon 6.13

1 a) Ingen b) $x = 0$, $y = 0$ c) Avtar på $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$ d) Konkav på $(-\infty, 0)$, konveks på $(0, \infty)$

2 a) Ingen b) $x = 5$, $y = 0$ c) Avtar på $(-\infty, 5)$ og $(5, \infty)$ d) Konkav på $(-\infty, 5)$, konveks på $(5, \infty)$

3 a) 0 b) $x = -7$, $y = 1$ c) Vokser på $(-\infty, -7)$ og $(-7, \infty)$ d) Konveks på $(-\infty, -7)$, konkav på $(-7, \infty)$

4 a) 0 b) $x = 3$, $y = 1$, $y = -1$ c) Vokser på $(-\infty, 0]$, avtar på $[0, 3)$ og $(3, \infty)$. Lokalt maksimumspunkt $x = 0$. Lokal maksimumsverdi $f(0) = 0$ d) Konveks på $(-\infty, 0]$ og $(3, \infty)$, konkav på $[0, 3)$. Vendepunkt $x = 0$.

5 25

6 $k^2/4$

7 Høyde 10 cm, lengde og bredde 20 cm

8 $f(1) = 6$, og $(f^{-1})'(6) = 1/12$

9

a) $x = 1$

b) Avtar på $(1, 4/3]$, vokser på $[4/3, \infty)$. Globalt minimumspunkt $x = 4/3$. Global minimumsverdi $f(4/3) = 1 + (16/9)\sqrt{3} \approx 4.08$

10

a) 0 er eneste nullpunkt, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

b) Vokser på $(-\infty, -2)$ og $(-2, 0]$, avtar på $[0, 2)$ og $(2, \infty)$. Lokalt maksimum $x = 0$. Lokal maksimumsverdi $f(0) = 0$

c) Konveks på $(-\infty, -2)$ og $(2, \infty)$, konkav på $(-2, 2)$

11

a) 0 er eneste nullpunkt, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

b) Vokser på $(-\infty, -a)$ og $(-a, 0]$, avtar på $[0, a)$ og (a, ∞). Lokal maksimumsverdi $f(0) = 0$

c) Konveks på $(-\infty, -a)$ og (a, ∞), konkav på $(-a, a)$

12 Den måler hvordan krumningen til grafen endrer seg som funksjon av x.

$\boxed{13}$

a) Nullpunktene er $x = 1$ og $x = -11$

b) $\phi'(t) = 3t^2 + 18t - 21$. Vokser på $(-\infty, -7]$ og $[1, \infty)$, avtar på $[-7, 1]$. Lokalt maksimumspunkt $x = -7$. Lokal maksimumsverdi $f(-7) = 256$. Lokalt minimumspunkt $x = 1$. Lokal minimumsverdi $f(1) = 0$

c) Konkav på $(-\infty, -3]$, konveks på $[-3, \infty)$. Vendepunkt $x = -3$

$\boxed{14}$ 25 cm

$\boxed{15}$ ≈ 49.5 meter

$\boxed{16}$ Her fins det et triks, nemlig å speile kioskens posisjon om den øvre elvebredden. Den korteste veien fra A til speilbildet av kiosken er en rett linje, og speilbildet tilbake av den turen, som knekker ved elvebredden, må da bli den korteste veien fra A til kiosken. Tegn figur som viser speilbildet av kiosken og den rette linjen. Formlike trekanter gir

$$\frac{x}{90} = \frac{200 - x}{60}$$

som løst med hensyn på x gir $x = 120$. Alternativt: Pytagoras gir at krypelengden $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 90^2} + \sqrt{(200 - x)^2 + 60^2}$$

Finn $f'(x)$ og sett $f'(x) = 0$, det gir $x = 120$. Bør altså velge $x = 120$ meter.

$\boxed{17}$

a) La h være avstanden fra veien til krysset, og la $x = b - h$. Da er

$$\frac{(a/2)}{x} = \tan\theta, \qquad \text{som gir} \qquad x = \frac{a\cos\theta}{2\sin\theta}$$

Hvis vi lar y være avstanden fra krysset til et av husene, blir y hypotenusen i en trekant med kateter x og $a/2$. Pytagoras gir

$$y = \sqrt{x^2 + a^2/4}$$

Dette gir (husk at $\theta \in (0, \pi/2)$)

$$\begin{aligned} L(\theta) &= h + 2y = (b - x) + 2y \\ &= b - x + 2\sqrt{\frac{a^2\cos^2\theta}{4\sin^2\theta} + \frac{a^2}{4}} = b - x + 2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 1} \\ &= b - x + a\cdot\frac{1}{\sin\theta} = b - \frac{a\cos\theta}{2\sin\theta} + \frac{a}{\sin\theta} \end{aligned}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned} L'(\theta) &= \frac{a}{2}\frac{1}{\sin^2\theta} - a(\sin\theta)^{-2}\cos\theta \\ &= \frac{a}{2}\frac{1}{\sin^2\theta} - a\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{a}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right) \end{aligned}$$

Så $L'(\theta) = 0$ gir $\cos\theta = \frac{1}{2}$, der $L'(\theta)$ skifter fra negativ til positiv. Altså gir $\theta = 60^\circ$ minst total veilengde. Kryssløsningen er best hvis $L(60^\circ) < 2b$. Innsetting gir at $L(60^\circ) = b + (\frac{1}{2}\sqrt{3})a$. Så kryssløsningen er best når $b > (\frac{1}{2}\sqrt{3})a$.

$\boxed{18}$

a) $\arctan x + \frac{x}{1+x^2}$

b) $-\pi/2$ og $\pi/2$

d) $A_b = 2\arctan b$, og $\lim_{b\to\infty} A_b = \pi$

$\boxed{19}$

a) 0, $\frac{1}{4}(3+\sqrt{57})$, $\frac{1}{4}(3-\sqrt{57})$

b) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[2, \infty)$, avtar på $[-1, 2]$. Lokalt makspunkt $x = -1$, $f(-1) = 7$. Lokalt minpunkt $x = 2$, $f(2) = -20$

c) Konkav på $(-\infty, 1/2]$, konveks på $[1/2, \infty)$. Vendepunkt $x = 1/2$.

$\boxed{20}$

a) 0 og -1

b) Vokser på $(-\infty, -1]$ og $[-1/2, \infty)$, avtar på $[-1, -1/2]$. Lokalt maksimum $x = -1$, $f(-1) = 0$. Lokalt minimum $x = -1/2$, $f(-1/2) = -1/4$

c) Konkav på $(-\infty, -1]$, konveks på $[-1, \infty)$. Vendepunkt $x = -1$.

$\boxed{21}$ a) 0 og $-a$ b) Vokser på $(-\infty, -a]$ og $[-a/2, \infty)$, avtar på $[-a, -a/2]$. Lokalt maksimum $x = -a$, $f(-a) = 0$. Lokalt minimum $x = -a/2$, $f(-a/2) = -a^2/4$ c) Konkav på $(-\infty, -a]$, konveks på $[-a, \infty)$. Vendepunkt $x = -a$.

$\boxed{22}$

a) Nullpunkter $x = 0$ og $x = 8$. Vokser på $(-\infty, 6]$, avtar på $[6, \infty)$

b) Konkav på $(-\infty, 8]$ og $[12, \infty)$, konveks på $[8, 12]$

$\boxed{23}$

a) Nullpunkter $x = 0$, $x = 1$. Vokser på $(-\infty, -2/11]$ og $[0, \infty)$. Avtar på $[-2/11, 0]$

b) Konkav på $(-\infty, -1]$, $[c_1, 0]$ og $[0, c_2]$, der $c_1 \approx -0.395$ og $c_2 \approx 0.05$. Konveks på $[-1, c_1]$

$\boxed{24}$ $x = \sqrt{2}$. Arealet er 2

$\boxed{25}$ $x = (3\sqrt{3})/4$

$\boxed{26}$ $\sinh a$

$\boxed{27}$ $\theta = 60^\circ$

$\boxed{28}$ Hvis $c_1 \le c_2$, velg $x = 200$. Ellers, velg x som det minste av tallene 200 og $100c_2(c_1^2 - c_2^2)^{-1/2}$

$\boxed{29}$ $\approx 70.5^\circ$

$\boxed{30}$ $y = 1 + 4(x - \pi/4)$

$\boxed{31}$ $x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$

$\boxed{32}$ $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

$\boxed{33}$ Makspunkter $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, der er et k helt tall. Minpunkter $x = \pi/2 + 2k\pi$, der er et k helt tall.

$\boxed{38}$

a) $F(x) = 2 - x$

b) $F(x) = 3x + 2$

c) $F(x) = \sqrt{x_0} + (x - x_0)/(2\sqrt{x_0})$

Seksjon 7.1

$\boxed{1}$

a) $3x^2 + C$

b) $x^2 + 5x + C$

c) $x^5 + C$

d) $\frac{1}{5}x^5 + C$

$\boxed{2}$

a) $-(1/x) + C$

b) $-(2/x) + (3/2x^2) + C$

c) $\frac{1}{4}(x + 1)^4 + C$

d) $\frac{1}{2}ax^2 + bx + c$

e) $\frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{5}t^5 + C$

f) $-(r_0/x) + (kx^2/2) + C$

$\boxed{3}$

a) $s''(t) = -g$, så $s'(t) = -gt + C$. Kravet $s'(0) = v_0$ gir da $s'(t) = v_0 - gt$. Dermed $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C$. Kravet $s(0) = 0$ gir $C = 0$, så svaret er $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

b) Kulen er høyest ved $t = v_0/g$. Høyde da: $s(v_0/g) = v_0^2/(2g)$. Total tid fra kulen skytes opp til den treffer bakken: $2v_0/g$

c) Høyde $\approx$ 510 meter, total svevetid $\approx$ 20.4 sek.

Seksjon 7.2

1 0.36

2

b) 2

3 1/3

Seksjon 7.3

1

a) $2/3$

b) $\frac{1}{2}kb^2 + hb$

c) 4

d) $x + x^2/2 + x^3/3$

2 Arealet er $\int_0^2 x^3\,dx = 4$

3

a) $f'(x) = 1/\sqrt{1 + \sin^2 x}$

b) $f'(x) = \sqrt{1 + x^{12}} \cdot 2x$ ved kjerneregelen

4 36

4 Omtrent 3.4 meter

5 Arealet er $\int_{-2}^{-1}(1/x^2)dx = 1/2$

6 Siden $\int_{-1}^{1}(x^4 - 1)dx = -8/5$, er arealet 8/5

7 Arealet er $\int_{-1}^{2}(x + 2)dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx = 9/2$

Seksjon 7.4

1

a) $\frac{1}{28}(x^2 + 9)^{14} + C$

b) $\frac{-1}{112}(7x^4 - 5)^{-4} + C$

c) $\frac{1}{48}(6x + 5)^8 + C$

d) $\frac{1}{8a}(ax + b)^8 + C$

e) 34.1

f) $(k_p/\omega)[(kx-\omega t_0)^{-1}-(kx-\omega)^{-1}]$

g) $\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3+C$

h) $\frac{1}{3}(\sqrt{t^2+1})^3+C$

i) $2\sqrt{2}-2$

j) $-\frac{8}{3}\sqrt{8-y^3}+C$

$\boxed{2}$

a) $\frac{1}{12}(\sqrt{8x+3})^3+C$

b) $\frac{2}{3a_0}(\sqrt{a_0x+r})^3+C$

c) $\sqrt{x^2+1}+C$

d) $\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C$

e) $(\frac{2}{3}x-10)\sqrt{x}+C$

f) $\frac{1}{6}(\sqrt{1+t^4})^3+C$

$\boxed{3}$

a) $\frac{n}{n+1}(\sqrt[n]{x})^{n+1}+C$

b) $\frac{n}{n-1}(\sqrt[n]{x})^{n-1}+C$

$\boxed{4}$ $\frac{1}{8(n+1)}[5^{n+1}-4^{n+1}]$

$\boxed{5}$

c) Poenget her er at

$$\frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x}=\frac{1-x}{1-x}=1$$

Setter vi da $C_2=C_1+1$, blir de to svarene like. Å legge til et konstant tall i uttrykket for et ubestemt integral (som er en generell formel for den antideriverte av funksjonen vi integrerer), endrer ingenting. Vi får fortsatt nøyaktig den samme mengden antideriverte funksjoner.

Seksjon 7.5

$\boxed{1}$

a) $x\sin x+\cos x+C$

b) $-xe^{-x}-e^{-x}+C$

c) $-x\cos x+\sin x+C$

d) $-(1/2)te^{-4t}-(1/8)e^{-4t}+C$

e) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

f) $\frac{1}{25}(1 + 4e^5)$

g) $1 - 2e^{-1}$

h) $\frac{1}{3}(x^3 e^{x^3} - e^{x^3}) + C$

i) $\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$

j) $t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6t e^t - 6e^t + C$

k) $x \ln x - x + C$

l) $(x \ln x - x)/(\ln 10) + C = x \log x - x/(\ln 10) + C$

2

c) $(1/2)e^x \sin x - (1/2)e^x \cos x + C$

3

a) $(1/2)e^x \sin x + (1/2)e^x \cos x + C$

b) $-(1/5)e^{2t} \cos 4t + (1/10)e^{2t} \sin 4t + C$

4 $(1/4)e^{2x} + (1/2)x + C$

5

b) $x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24e^x + C$

6 $x(\ln x)^4 - 4x(\ln x)^3 + 12x(\ln x)^2 - 24x \ln x + 24x + C$

Seksjon 7.7

1

a) $(1/8)x - (1/32) \sin 4x + C$

b) $-2/(\cos x) + 1/(3\cos^3 x) - \cos x + C$

c) $\cos x - \operatorname{artanh}(\cos x) + C$

d) $(1/7)\cos^7 x - (1/5)\cos^5 x + C$

2

a) $(2/3)\sin^{3/2} x - (4/7)\sin^{7/2} x$
$+(2/11)\sin^{11/2} x + C$

b) $-2(\sin x)^{-1/2} - \frac{4}{3}(\sin x)^{3/2} + \frac{2}{7}(\sin x)^{7/2} + C$

3

a) $1/(2\sin x) - 3\sin x - (1/3)\sin^3 x - (1/5)\sin^5 x + C$

b) $-(\cos^4 x)/4 + C$

4 $(1/16)x - (1/64)\sin(4x) - (1/48)\sin^3 2x + C$

5

b) $-(1/6)\cos 3x - (1/22)\cos 11x + C$

c) $(1/8)\sin 4x - (1/28)\sin 14x + C$

d) $(1/10)\sin 5x - (1/38)\sin 19x + C$

Seksjon 7.8

1

a) $\arcsin(x/4) + C$

b) $(1/2)\arctan x + x/(2+2x^2) + C$

c) $\sqrt{x^2-25}/(25x) + C$

2 $(1/3)(a^2-x^2)^{3/2} - a^2\sqrt{a^2-x^2} + C$

3

a) $x/\sqrt{1+x^2} + C$

b) $(1/8)(2x^2-9)\sqrt{9-x^2}$
$+ (81/8)\arcsin(x/3) + C$

c) $(x/8)(20-2x^2)\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin(x/2) + C$

d) $-\sqrt{1-x^2}/x - \arcsin x + C$

Seksjon 7.9

$\boxed{1}$ $-1/(2x^2+2x+2)+(2\sqrt{3}/3)[\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))+\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})/(1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)]+C$

$\boxed{2}$

a) $-1/(x+3)+C$

b) $(1/\sqrt{14})\arctan((x+3)/\sqrt{14})+C$

c) $-2/(x^2-2x+10)+(15/162)[\arctan((x-1)/3)+\frac{1}{3}(x-1)/(1+\frac{1}{9}(x-1)^2)]+C$

d) $\operatorname{arsinh}((x+1)/2)+C$

e) $(1/2)\arcsin(x-1)+(1/2)(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+C$

Seksjon 7.10

$\boxed{1}$

a) $4\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C$

b) $(1/3)x^3-(1/2)x^2+x-\ln|x+1|+C$

c) $(11/3)\ln|x-1|+2/(x-1)+(1/3)\ln|x+2|+C$

d) $\ln|x|+\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$

e) $\ln|x+1|+\arctan x+C$

f) $\ln|x-1|-2\ln|x+2|+6/(x+2)+C$

g) $\ln|x-1|+(1/2)\arctan x+x/(2x^2+2)+C$

Seksjon 7.11

$\boxed{1}$

a) 1

b) 1/3

c) 2

d) Divergerer

e) 3/2

f) Divergerer

$\boxed{2}$

a) Konv

b) Konv

c) Div

d) Konv

e) Konv

f) Div

Seksjon 7.12

1

a) Trapesmetoden gir ≈ 0.506. Eksakt: 0.5

b) Trapesmetoden gir 3.87. Eksakt: 3.75

Seksjon 7.13

1 Bredde $(16/27)[(\sqrt{13/4})^3 - 1]$

2

a) $\sqrt{5}$

b) $(8/27)[(\sqrt{22/4})^3 - (\sqrt{13/4})^3]$

c) $13/12$

d) ≈ 1.16024

Seksjon 7.14

1

a) $127\pi/7$

b) 8π

c) $(\pi/7)[1 - 2^{-7}]$

2

a) $64\pi/3$

b) $(2\pi/3)[(\sqrt{5})^3 - (\sqrt{2})^3]$

c) $2\pi(k - 1)$

3 $124\pi/45$

4 $s^2h/3$

5 $1/4$

6 $1/12$

7 $V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2 dy$

8 $\pi[r^2a - \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}r^3]$

9 $4r^3/3$

Seksjon 7.15

1 $V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$

2 $(\pi/6)[(\sqrt{5})^3 - 1]$

3 $11\pi/4$

4

b) Volumet er π

Seksjon 7.16

1

a) $f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

c) $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2 + 5)^{-1/2} \cdot 4x$

e) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$

f) $f(x) = e^{x \ln x}$ gir at $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$

Seksjon 7.17

1 $6[(\sqrt{19})^3 - (\sqrt{2})^3]$

2

a) $458\pi/15$

b) $101\pi/6$

3

a) $\pi/(2n+1)$

b) $2\pi/(n+2)$

4 $2[(\sqrt[n]{2})^{-1} - \frac{2}{n+1}(\sqrt[n]{2})^{-n-1}]$

6 $28\pi/3$

7 $V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$

9 Kulens gjennomsnittshøyde er tilnærmet 3.4 meter

Seksjon 8.1

2

b) $\sqrt{2}$ på begge

c) $3\pi/4$ og $5\pi/4$

d) $z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4)}$, $w = \sqrt{2}e^{i(5\pi/4)}$

3

b) $\mathrm{Re}\, z = -1$, $\mathrm{Im}\, z = -\sqrt{3}$, $z = (-1) + (-\sqrt{3})i$

4 $e^{i(\pi/4)} = (1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i$, $e^{i(\pi/3)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{i(2\pi/3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{i\pi} = -1$, $\frac{1}{2}e^{i(3\pi/2)} = -\frac{1}{2}i$, $2e^{i(\pi/3)} = 1 + \sqrt{3}i$

5 $z + w = 9 + i$, $zw = 26 + 22i$

6 $2e^{i(-\pi/3)} = 1 - \sqrt{3}i$, $5e^{i\cdot 1} = 5\cos 1 + (5\sin 1)i \approx 2.7 + (4.2)i$

7 $-2 + (-2)i = \sqrt{8}e^{i(5\pi/4)}$, og $3 + 4i = 5e^{i\theta}$, der $\theta = \arccos(3/5) \approx 0.927$

Seksjon 8.2

1

a) $6 - 2i$

b) $-3 - 4i$

c) $1 + 3i$

d) $3+8i$

e) $4+12i$

f) $2+4i$

g) 2

h) $-19-13i$

i) $\frac{11}{10}-\frac{1}{5}i$

j) $-i$

k) $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$

l) $-5i$

m) $-2+2i$

n) i

o) $-1-i$

p) $-(7/625)-(24/625)i$

q) $1+4i$

2

a) $6e^{i(3\pi/4)}$

b) $2e^{i(\pi/6)}$

3

a) $\overline{4+3i}=4-3i$, $\overline{-2-2i}=-2+2i$

b) $z=re^{i\theta}$ gir $\overline{z}=re^{i(-\theta)}=re^{-i\theta}$. Så konjugasjon gir speiling om den reelle aksen.

Seksjon 8.3

1 Den andre kvadratroten er $-2-3i$

2

a) $2e^{i(2\pi/3)}$

b) $e^{i(\pi/8)}$

c) $\sqrt{5}e^{i(5\pi/4)}$

d) e^{2i}

3

a) $(1/\sqrt{2}) + \sqrt{\frac{3}{2}}i$

b) $-1/2 + (\sqrt{3}/2)i$

c) $2^{1/4}\cos(\pi/8) + 2^{1/4}\sin(\pi/8)i \approx 1.1 + 0.5i$

d) $2^{1/4}\cos(7\pi/8) + 2^{1/4}\sin(7\pi/8)i \approx -1.1 + (0.455)i$

4

a) $z = \pm(-\sqrt{(3/2)} + (1/\sqrt{2})i)$

b) $z = \pm(-(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i)$

5

a) $3i$

b) i

c) $4i$

d) $i/2$

e) $(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i$

f) $8^{1/4}\cos(\pi/8) + 8^{1/4}\sin(\pi/8) \approx 1.55 + (0.64)i$

6

a) z har 4 fjerderøtter

b) $1, -1, i$ og $-i$

Seksjon 8.4

1

a) $w_0 = 2^{1/6}e^{i(\pi/12)}$, $w_1 = 2^{1/6}e^{i(3\pi/4)}$, $w_2 = 2^{1/6}e^{i(17\pi/12)}$

b) $w_0 = 2e^{i(\pi/3)}$, $w_1 = -2$, $w_2 = 2e^{i(5\pi/3)}$

c) $w_0 = e^{i(\pi/6)}$, $w_1 = e^{i(5\pi/6)}$, $w_2 = e^{i(3\pi/2)}$

2 $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$

3 $z_1 = (\sqrt{3}/2) + (1/2)i$, $z_2 = -(\sqrt{3}/2) + (1/2)i$, $z_3 = -i$

4 $z = -1$ eneste løsning

5 $p \pm qi$

Seksjon 8.5

$\boxed{1}$

a) $z = \pm(-\sqrt{(3/2)} + (1/\sqrt{2})i)$

b) $z = \pm(-(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i)$

$\boxed{2}$

a) $5 \pm 3i$

b) $\pm 2i$

c) $-1 \pm 7i$

d) $3 \pm i$

e) 9 og -3

f) $-7 \pm 2i$

$\boxed{3}$

a) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $-\frac{1}{2}i \pm \frac{3}{2}$

c) 0 og $-2 \pm 2i$

d) $\pm 1, \pm i, \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i), \pm(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$\boxed{4}$

$(\sqrt{2} - 2) + (\sqrt{2} - 2)i$ og $(-\sqrt{2} - 2) + (-\sqrt{2} - 2)i$

Seksjon 8.6

$\boxed{1}$ $P(z) = (z-3)^2(z-i)(z+i) = (z-3)^2(z^2+1)$

$\boxed{2}$

b) $x = 1 - 2i, x = -1, x = -2$

Seksjon 8.7

$\boxed{1}$ $x_n = 5 \cdot 2^n + 4 \cdot (-3)^n - n - 3/4$

$\boxed{2}$

a) (i) $x_n^h = C(-3)^n + Dn(-3)^n$
(ii) $x_n^s = \frac{1}{8}$

(iii) $x_n = C(-3)^n + Dn(-3)^n + \frac{1}{8}$
(iv) $x_n = \frac{7}{8}(-3)^n - \frac{7}{6}n(-3)^n + \frac{1}{8}$

b) (i) $x_n^h = C + D(-1)^n$
(ii) $x_n^s = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$
(iii) $x_n = C + D(-1)^n + \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$
(iv) $x_n = 1 + \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$

c) (i) $x_n^h = 6^{n/2}[C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2}]$
(ii) $x_n^s = -\frac{10}{7} + (\frac{1}{e^2+6}\cdot n - \frac{2e^2}{(e^2+6)^2})e^n$
(iii) $x_n = 6^{n/2}[C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2}] - \frac{10}{7} + (\frac{1}{e^2+6}\cdot n - \frac{2e^2}{(e^2+6)^2})e^n$
(iv) Som (iii), med $C = \frac{17}{7} - \frac{2e^2}{(e^2+6)^2}$ og $D = 6^{-1/2}(\frac{17}{7} + \frac{2e^3}{(e^2+6)^2} - \frac{1}{e^2+6})$

d) (i) $x_n^h = C\cdot 0^n + D(-1)^n$. Merk at vi her bruker konvensjonen $0^0 = 1$. Vi har altså $x_0^h = C + D$, og $x_n^h = D(-1)^n$ for $n \geq 0$.
(ii) $x_n^s = \frac{1}{6}$
(iii)$x_n = C\cdot 0^n + D(-1)^n + \frac{1}{6}$
(iv) $x_n = \frac{5}{3}0^n - \frac{5}{6}(-1)^n + \frac{1}{6}$

e) (i) $x_n^h = C + D(-1)^n$
(ii) Her kan vi gjette på $x_n^s = A\cos n + B\sin n$. Innsetting gir følgende lineære ligningssystem for A og B:

$$(-1+\cos 2)A + (\sin 2)B = 1$$
$$(-\sin 2)A + (-1+\cos 2)B = 0$$

Dette systemet har en entydig løsning som kan finnes f.eks. ved innsettingsmetoden.
(iii) $x_n = C + D(-1)^n + A\cos n + B\sin n$ med A og B fra (ii) innsatt
(iv) $C = \frac{1}{2}(A(1+\cos 1) + B\sin 1)$ og $D = \frac{1}{2}(A(1-\cos 1) - B\sin 1)$ innsatt i (iii)

f) (i) $x_n^h = C + D(-1)^n$
(ii) Her kan vi ta x_n^s til å være summen av x_n^s-ene fra b) og e), altså $x_n^s = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) + A\cos n + B\sin n$, der A og B er som under e)
(iii) $x_n = C + D(-1)^n + \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) + A\cos n + B\sin n$ med A og B som før
(iv) Siden $\frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) = 0$ for $n = 0$ og $n = 1$, blir verdiene for C og D de samme som i punkt e).

3

c) $L = (\sqrt{5}+1)/2$, altså det såkalte «gyldne snitt»

4

a) 5

b) $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$

c) Dette blir Fibonaccitall nummer 101.

5

a) Hint: Sett inn løsningen i differensligningens venstre side og regn i vei. Det holder å se på ett av leddene, altså sette inn $x_n = Cr_1^n$. Tenk over hvorfor.

b) Hint: Å vise at $x_n = r^n$ er en løsning, går på samme måte som under a). Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har én rot r, må uttrykket under rottegnet i abc-formelen være 0. Da oppfyller løsningen r også $r = -b/2a$, dvs. vi har $2ar + b = 0$. Dette får du bruk for hvis du setter inn $x_n = nr^n$ i differensligningen og skal vise at den er en løsning.

c) Hint: Her kan du bruke oppgave 8.8.3 til å uttrykke $\cos(n\theta)$ og $\sin(n\theta)$ ved ledd av typen $e^{i(n\theta}$ og $e^{-i(n\theta)}$. Dermed vil dette koke ned til å vise at løsninger på formen $x_n = \rho^n e^{i(n\theta)}$ og $x_n = \rho^n e^{-i(n\theta)}$ passer i differensligningen. Dette går på liknende måte som a) og b), ved regninger som

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= \rho^{n+2} e^{i(n+2)\theta} = \rho^{n+2} e^{i(n\theta)+2\theta} = \rho^n \rho^2 e^{i(n\theta)} e^{2\theta} \\
&= \rho^n e^{i(n\theta)} \rho^2 e^{2\theta} = \rho^n (e^{i\theta})^n \rho^2 (e^{i\theta})^2 \\
= (\rho e^{i\theta})^n \cdot (\rho e^{i\theta})^2
\end{aligned}
$$

Seksjon 8.8

4 Hint: Skriv det komplekse tallet $e^{i\pi}$ på rektangulær form.

6 $z = \frac{23}{5} - \frac{1}{5}i$

7 $x = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}i,\ y = 1 - \frac{1}{2}i$

9

b) Siden differensligningen bestemmer hvert nytt ledd ved hjelp av de to foregående, vil verdier for x_0 og x_1 bestemme løsningsfølgen entydig. Resultatet følger nå fra a).

Seksjon 9.1

2

a) Nei

b) Ja

3 $f(x) = \sin x$

Seksjon 9.2

1 a) $y(t) = Ce^{2t} + 7$ b) $y(t) = 7 - 2e^{4t}$

2 a) $y(t) = (1/5)t - (1/25) + Ce^{-5t}$ b) $y(t) = (1/5)t - (1/25) + (26/25)e^{-5t}$

3 a) $y(t) = Ce^{3t} + 1$ b) $y(t) = 1 - e^{3t}$

4 a) $y(x) = Ce^{p_0 x} - w_0 q/p_0$ b) $y(x) = (y_0 + w_0 q/p_0)e^{p_0 x} - w_0 q/p_0$

5 a) $y(t) = Ce^{(t^2/4)+2t}$ b) $y(t) = -2e^{(t^2/4)+2t}$

6 a) $y(t) = \arctan t/\sqrt{t^2+1} + C/\sqrt{t^2+1}$ b) $y(t) = \arctan t/\sqrt{t^2+1} + 1/\sqrt{t^2+1}$

7 a) $y(t) = (1/2)t(\ln t)^2 + Ct$ b) $y(t) = (1/2)t(\ln t)^2 + t$

8 a) $y(t) = (qt/k) - (q/k^2) + (r/k) + Ce^{-kt}$ b) Sett $C = q/k^2 - r/k$ i løsningen fra a

9 a) $I(t) = (E/R) + Ce^{-(R/L)t}$ b) $I(t) = (E/R)(1 - e^{-(R/L)t})$

10

a) $dg/dt = k - 0.05g$, $g(t) = 20k(1 - e^{-0.05t})$. Giftmengden stabiliserer seg på $20k$. Utslippsrate for maksimal forurensning: $k = 10$ kg pr. døgn

b) $dg/dt = -0.05g$. Utslippsrate: $k = 10e^{0.5} \approx 16.5$ kg pr. døgn

Seksjon 9.3

1 a) $y(t) = \sqrt[3]{(3/2)t^2 + C}$ b) $y(t) = \sqrt[3]{(3/2)(t^2 - 1)}$

2 a) $y(t) = (C - \frac{3}{2}t^2)^{-1/3}$ samt $y = 0$ b) $y(t) = (8 - \frac{3}{2}t^2)^{-1/3}$

3 a) $y(t) = -1 + 2/(1 + ke^{2t})$ samt $y(t) = -1$ b) $y(t) = -1$

4 a) $y(t) = Ct$ b) $y(t) = t$

5 a) $y(t) = Ce^{(3/2)t} + 8/3$
b) $y(t) = -(11/3)e^{(3/2)t} + 8/3$

6 a) $y(t) = 10/(1 + ke^{-(6.4)t})$ samt $y(t) = 0$ b) $y(t) = 10/(1 + e^{-(6.4)t})$

7 a) $y(t) = 1/(1 + ke^{t})$ samt $y(t) = 0$ b) $y(t) = 1/(1 - \frac{1}{2}e^{t})$

8 $y(x) = \tan(x + \frac{1}{4}x^4 + C)$

9 $y(x) = 1 + Ce^{t}$

10

a) Ingen av delene

b) Lineær, $y(t) = t^2 - 2t + 2 + Ce^{-t}$

c) Separabel, $y(t) = \tan(t + C)$

d) Separabel, $y(t) = [\ln|2 + t| + C]^{-1}$

11 25 år

Seksjon 9.4

1

a) Generell løsning $y(t) = Ce^t$

b) Generell løsning $y(t) = \arctan(t + C)$

c) Generell løsning $y(t) = t^2 - 2t + 2 + Ce^{-t}$

d) Generell løsning $y(t) = (1/3)t^3 + C$

e) Generell løsning $y(t) = 1/(1 + ke^t)$ samt $y(t) = 0$

Seksjon 9.5

1 a) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-4t}$ b) $y(t) = (1/6)e^{2t} - (1/6)e^{-4t}$

2 a) $y(t) = Ae^{(\sqrt{2}-1)t} + Be^{(-\sqrt{2}-1)t}$ b) $y(t) = (\sqrt{2}/2)e^{(\sqrt{2}-1)t} - (\sqrt{2}/2)e^{(-\sqrt{2}-1)t}$

3 a) $y(t) = Ae^{2t}\cos 3t + Be^{2t}\sin 3t$ b) $y(t) = e^{2t}\cos 3t - (2/3)e^{2t}\sin 3t$

4 a) $y(t) = Ae^{3t} + Be^{-2t}$ b) $y(t) = (4/5)e^{3t} + (6/5)e^{-2t}$

5 a) $y(t) = Ae^{-(1/2)t}\cos(\sqrt{3}t/2)$
$+ Be^{-(1/2)t}\sin(\sqrt{3}t/2)$ b) $y(t) = 0$

6 a) $y(t) = Ae^{-7t} + Bte^{-7t}$ b) $y(t) = e^{-7t} + 9te^{-7t}$

7 a) $y(t) = A + Be^{-t}$ b) $y(t) = 8 - 8e^{-t}$

8 a) $y_s(t) = 2/9$ b) $y(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t} + 2/9$ c) $y(t) = (7/9)e^{-3t} + (10/3)te^{-3t} + (2/9)$

9 a) $y_s(t) = -(1/2)t - (1/12)$ b) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} - (1/2)t - (1/12)$ c) $y(t) = e^{2t} + (1/12)e^{-3t} - (1/2)t - (1/12)$

10 a) $y_s(t) = (1/9)t^2 - (4/27)t + (2/27)$ b) $y(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t} + (1/9)t^2 - (4/27)t + (2/27)$

11 a) $y_s(t) = -1/6$ b) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} - 1/6$

12 a) $y_s(t) = -(1/2)t - 1/4$ b) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} - (1/2)t - 1/4$

13 $y(t) = Ae^{8t} + Bte^{8t} + 1/64$

14

a) $y_h(t) = Ae^{4t} + Be^{-5t}$

b) $y_s(t) = -(1/20)t - 1/400$

15 To reelle røtter r_1 og r_2: $W = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t}$. En reell rot r: $W = e^{2rt}$. Komplekse røtter $u \pm iv$: $W = ve^{2ut}$

Seksjon 9.6

$\boxed{1}$

a) $(1/y)y' = 2 - t$, løsning $y(t) = e^{2t-(1/2)t^2}$

b) Vokser på $(-\infty, 2]$, avtar på $[2, \infty)$

$\boxed{2}$

a) $y' = g(t) \cdot (25 - y)$, løsning $y(t) = 25 - 23e^{-kt}$. Får $k = (1/100)\ln(23/5)$

b) $y(t) = 25 - 23e^{(r/2)t^2 - 100rt}$, får $r = (1/5000)\ln(23/5)$

c) $G = \ln(23/5)$

$\boxed{3}$

a) $v(t) = (g/k)(1 - e^{-kt})$

b) Stabiliserer seg på $v = g/k$ Med $k = 0.08$ s$^-1$ stabilisering på $v \approx 122.5$ m/s

c) g/k

$\boxed{5}$

a) Stigningstall 4

d) Generell løsning $y(t) = Ce^{3t-(1/2)t^2}$

e) Vokser på $(-\infty, 3]$ avtar på $[3, \infty)$.

$\boxed{7}$ Hvis $x_1 \neq x_2$ gir abc-formelen, uansett om rottegnet blir et reelt tall eller et rent imaginært tall

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Hvis rottegnet er 0, slik at vi kun har én løsning r, gir abc-formelen direkte $r = -b/2a$.

$\boxed{8}$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (e^{ut} cos vt + ie^{ut}\sin vt)' = (e^{ut} cos vt)' + i(e^{ut}\sin vt)' \\ &= ue^{ut}\cos vt - ve^{ut}\sin vt + i(ue^{ut}\sin vt + ve^{ut}\cos vt) \\ &= u(e^{ut}\cos vt + ie^{ut}\sin vt) + iv(e^{ut}\cos vt + ie^{ut}\sin vt) = (u + iv)e^{(u+iv)t} \end{aligned}$$

$\boxed{9}$

a) Med $y(t) = te^{rt}$ får vi $y'(t) = e^{rt} + rte^{rt}$ og

$$y''(t) = re^{rt} + re^{rt} + r^2te^{rt} = 2re^{rt} + r^2e^{rt}$$

Så

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 2are^{rt} + ar^2te^{rt} + be^{rt} + brte^{rt} + cte^{rt} \\ &= (2ar + b)e^{rt} + (ar^2 + br + c)te^{rt} \end{aligned}$$

Her er første parentes 0 ved hintet, og andre parentes er 0 fordi r løser den karakteristiske ligningen.

b) Med $y(t) = e^{kt}$ der $k = u + iv$ får vi ved forrige oppgave $y'(t) = ke^{kt}$ og $y''(t) = k^2e^{kt}$. Dette gir nøyaktig samme regning som i det reelle tilfellet:

$$ay'' + by' + cy = ak^2e^{kt} + bke^{kt} + ce^{kt} = (ak^2 + bk + c)e^{kt}$$

Siden ved antakelsen $k = u + iv$ løser den karakteristiske ligningen, er parentesen her 0. Altså $ay'' + by' + cy = 0$. Tilsvarende for $k = u - iv$.

c) Vi får $y' = h'e^{rt} + rhe^{rt}$ og $y'' = h''e^{rt} + 2ru'e^{rt} + r^2ue^{rt}$. Altså

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= ah''e^{rt} + 2arh'e^{rt} + ar^2he^{rt} + bh'e^{rt} + brhe^{rt} + che^{rt} \\ &= he^{rt}(ar^2 + br + c) + e^{rt}(ah'' + (2ar + b)h') \end{aligned}$$

Antakelsen om at r løser den karakteristiske ligningen gir at første parentes her er 0. Antakelsen om at $y(t)$ løser (1) gir da at andre parentes også må være 0. Altså $ah'' + (2ar + b)h' = 0$. Del så på a, husk at $a \neq 0$.

d) Likningen (2) for h' er en første ordens lineær diffligning. Standard løsningsmetode gir

$$h'(t) = Ae^{-(2r+(b/a))t}$$

der A er en konstant. Antiderivasjon gir

$$h(t) = Ce^{-(2r+(b/a))t} + D$$

der $C = -A/(2r + (b/a))$. Altså

$$y(t) = h(t)e^{rt} = Ce^{-(2r+(b/a))t}e^{rt} + De^{rt} = Ce^{(-r-(b/a))t} + De^{rt}$$

Hvis vi nå døper $r = r_1$, så er $-r - \frac{b}{a} = -r_1 - \frac{b}{a} = r_2$ ved oppgave 9.6.7.

e) Oppgave 9.6.7 gir nå $r = -b/2a$, så parentesen i (2) er 0. Altså $h'' = 0$. To gangers antiderivasjon gir $h(t) = Ct + D$, der C og D er konstanter. Altså

$$y(t) = h(t)e^{rt} = (Ct + D)e^{rt} = Cte^{rt} + De^{rt}$$

f) I det komplekse tilfellet $r = u + iv$ får vi $y(t) = Ce^{-(u+iv+(b/a))t} + De^{(u+iv)t}$. Innsetting av $u = -b/2a$ gir

$$y(t) = Ce^{-(u-iv)t} + De^{(u+iv)t}$$

Seksjon 10.1

1

a) Konvergerer, sum 5

b) Konvergerer, sum 1/6

c) Divergerer

d) Konvergerer, sum $7/10$

e) Konvergerer, sum $1/3$

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$

$\boxed{3}$ $17/12$

$\boxed{4}$ $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot (0.977)^n = c/0.023 \approx (43.5)c$

Seksjon 10.2

$\boxed{1}$

a) Div

b) Konv

c) Div

d) Div

e) Konv

f) Konv

g) Konv

h) Konv

$\boxed{2}$

a) Div

b) Konv

c) Konv

d) Konv

e) Konv

f) Konv

g) Div

h) Konv

$\boxed{3}$

a) Divergerer

b) Konvergerer betinget

$\boxed{4}$

a) Div

b) Div

c) Konv

d) Div

e) Div

f) Konv

5 $1 - 2^{-2} + 3^{-2} - 4^{-2} + 5^{-2} - 6^{-2} + 7^{-2} - 8^{-2} + 9^{-2} - 10^{-2} \approx 0.818$

6

a) Konv

b) Div

c) Konv

d) Konv

e) Konv

f) Konv

g) Div

h) Konv

i) Konv

j) Konv

k) Div

l) Konv

m) Konv

n) Div

7 Konvergerer for $p > 1$, divergerer for $p \leq 1$.

Seksjon 10.3

1

a) Taylorrekken: $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - \cdots$ $T_3(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3$

b) $1/(2x+1)$

2 $T_3(x) = 3 - 7x + x^2 + 5x^3$. Taylorrekkene: Begge blir $3 - 7x + x^2 + 5x^3 + 2x^4$

3

a) $T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (4/3)x^3 + (2/3)x^4$

$\boxed{4}$

b) $\ln(1.2) \approx 137/750$

Seksjon 10.4

$\boxed{1}$

a) Konvergerer for $x \in (-7, 13)$

b) Konvergerer for $x = 0$

c) Konvergerer for $x \in (1, 3]$

d) Konvergerer for $x \in [-6, 4]$

$\boxed{2}$

a) $R = 1$

b) $R = e$

$\boxed{3}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/(n^2 + 2n)$. Konvergerer for $x \in [-1, 1]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n/(n^2 + 2n)$. Konvergerer for $x \in [-1, 1]$

$\boxed{4}$

a) Til f: $x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \cdots$. Til g: $1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \cdots$

Seksjon 10.5

$\boxed{1}$ $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}/(n^n(n+1))$

$\boxed{2}$

a) $1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + x^8/9! - \cdots$

b) $-1 + x/2! - x^2/3! + x^3/4! - x^4/5! + \cdots$

c) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 - \frac{1}{4\cdot 5}x^5 + \cdots$

d) $2 + (2\cdot 3)x + (3\cdot 4)x^2 + (4\cdot 5)x^3 + \cdots$

e) $\frac{1}{8} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{128}x^4 - \cdots$

$\boxed{3}$

b) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}/(2n+1)!$

c) $F(x) = x \sin x$

d) $f(x) = \sin x + x \cos x$

e) 1

Seksjon 10.6

1

a) (i) $x \in (-1, 1)$ (ii) $x/(1-x)^2$

b) (i) $x \in (2, 4)$ (ii) $(x-3)/(4-x)^2$

c) (i) $x \in (2/3, 4/3)$ (ii) $1/(4-3x)$

d) (i) $x \in [-1, 1)$ (ii) $-\ln(1-x)/x$ for $x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$. For $x = 0$ er summen 0.

2 2

3 $(5/4) - 3\ln 3 - 3\ln 2$

Seksjon 10.7

1

a) $n = 11$ holder. $T_{11}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - x^{11}/11!$

b) $n = 27$

2

a) $T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

3 $1/3 - 1/42 + 1/1320$

5 Integralet er tilnærmet lik $13/42$

6

a) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$

b) $1 + 2x^2 - 2x^4 + \cdots$

c) $1 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^8 + \cdots$

d) $1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \cdots$

7 $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - \cdots$

8

b) $\arctan 1 = \pi/4$

9 Konvergerer

10

a) Konvergerer

b) Divergerer

11 $(-6, 2]$

12 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}x^{2n+2}$

13 $T_3(x) = -1 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{64}(x-1)^2 - \frac{1}{512}(x-1)^3$

14

d) $T_2(v) = (1/2)m_0v^2$

17

a) $T_0 = 80/9$, $S_1 = 80/9$

b) $T_1 = 80/(9^2)$, $S_2 = 80/(9^2)$

c) $T_2 = 80/(9^3)$, $S_3 = 80/(9^3)$

d) 10 sekunder

Bind II

Seksjon 1.1

$\boxed{1}$

a) Området der $xy \leq 1$. Dette er området «mellom» de to grenene på hyperbelen $y = 1/x$

b) Hele $\mathbb{R}^2$ unntatt linjen $y = -x$

c) Området der $y > 2x$, dvs. området over linjen $y = 2x$

d) Hele $\mathbb{R}^2$

$\boxed{2}$ $D_f = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$, dvs. den åpne kulen med radius 2 og sentrum origo

$\boxed{3}$

$\boxed{4}$ a) $f(x, y) = e^{-r^2}$ b) $f(x, y) = r^2 \cos 2\theta$ c) $f(x, y) = 4r^2 + 5r^2 \sin^2\theta$ d) $f(x, y) = 2r\cos\theta - 4r\sin\theta$

$\boxed{5}$ Nivåflatene er sfærer (kuleskall)

$\boxed{6}$ Hvis vi setter $x = r\cos theta$ og $y = r\sin\theta$, er $f(x, y, z) = z/r$. Nivåflatene er kjegler

Seksjon 1.2

$\boxed{3}$

a) Lukket, ikke kompakt

b) Åpen

c) Ingen av delene

d) Kompakt

Seksjon 1.3

$\boxed{1}$

a) $21/11$

b) $e/2$

c) Fins ikke

d) 0

e) Fins ikke

f) 0

g) 0

h) Fins ikke

i) 1

Seksjon 1.4

$\boxed{1}$ $(0, 0)$

$\boxed{2}$ Punktene på de parallelle, rette linjene $x + y = n\pi + \pi/2$, der $n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{7}$ $(x, y) = (2, 0)$

Seksjon 1.5

$\boxed{1}$

a) $\partial f/\partial x = 4$, $\partial f/\partial y = 5$

b) $\partial f/\partial x = 16xy + 2$, $\partial f/\partial y = 8x^2 - 5$

c) $\partial f/\partial x = [y(x^2 + y^2)\cos xy - 2x \sin xy]/(x^2 + y^2)^2$, $\partial f/\partial y = [x(x^2 + y^2)\cos xy - 2y \sin xy]/(x^2 + y^2)^2$

d) $\partial f/\partial x = y \ln(xyz) + y + 5y^2$, $\partial f/\partial y = x \ln(xyz) + x + 10xy$, $\partial f/\partial z = xy/z$

e) $\partial f/\partial x = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$, $\partial f/\partial y = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\partial f/\partial z = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$

f) $\partial f/\partial x_i = 2x_i e^{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ for $i = 1, \ldots, n$

$\boxed{2}$ $\partial f/\partial x = 5y^2$, $\partial f/\partial y = 10xy$

$\boxed{3}$

a) $\partial^2 f/\partial x^2 = 42x^5y^3$, $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x = 21x^6y^2$,
$\partial^2 f/\partial y^2 = 6x^7y$

b) $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x = 2ye^{-z}$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 2xe^{-z}$,
$\partial^2 f/\partial z^2 = xy^2e^{-z}$, $\partial^2 f/\partial x\partial z = \partial^2 f/\partial z\partial x = -y^2e^{-z}$, $\partial^2 f/\partial y\partial z = \partial^2 f/\partial z\partial y = -2xye^{-z}$

$\boxed{4}$

a) $(1, 2)$

b) $(1, -1)$

c) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$

d) $(0, 0, 0)$, samt alle punkter (x, y, z) slik at $x, y, z \in \{-1, 1\}$

e) $(1/2, 3/2, 0)$

$\boxed{5}$ $x = y = z = 20$ m

$\boxed{6}$ Maksverdi 2925, minverdi -1575

$\boxed{7}$ $128/27$ og 0

$\boxed{8}$

b) $x = 5$m, $y = 10$m, $z = 10$m

$\boxed{9}$

a) $\partial A/\partial x = 28 - 4x - 3y$, $\partial A/\partial y = 28 - 4y - 3x$. De partielle deriverte er 0 i $(4, 4)$

b) Maksimumsverdi $A(4, 4) = 112$. Bør velge $x = y = 4$ meter

$\boxed{10}$ 8000

$\boxed{11}$ Fins ingen største verdi

$\boxed{12}$ $15/4$ cm

Seksjon 1.6

$\boxed{1}$

a) $(x, y) = (1, 2)$ er et sadelpunkt

b) $(1, 0)$ er et sadelpunkt, og $(0, -1)$ er et lokalt minimum. For å se at $(-1, 0)$ også er et sadelpunkt, merk at $f(-1, 0) = 0$ og at fortegnsskifte på y gir fortegnsskifte på $f(x, y)$

c) $(x, y) = (0, 0)$ er et globalt minimumspunkt

d) $(x, y) = (0, 0)$ er et globalt minimumspunkt

$\boxed{3}$ Stasjonært punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Dette er et (globalt) makimumspunkt

$\boxed{4}$ Stasjonært punkt $(x, y, z) = (-2/3, -1/3, 0)$. Siden egenverdiene til Hessematrisen er 6, 2 og -2, er dette et sadelpunkt

Seksjon 1.7

$\boxed{1}$ $y = ax + b$ der $a \approx -0.69$ og $b \approx 7.06$

Seksjon 2.1

$\boxed{1}$ $\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ 8z^2 & 2 & 16xz \end{bmatrix}$, $F(x, y, z) = (-6, 76) + \begin{bmatrix} -12 & -3 & 2 \\ 72 & 2 & -48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+3 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $L(x, y) = \sqrt{2} + (1/\sqrt{2})(x-2) + \sqrt{2}(y - \pi/4)$. Ligning for tangentplanet: $z = \sqrt{2} + (1/\sqrt{2})(x-2) + \sqrt{2}(y-\pi/4)$

$\boxed{3}$

a) $L(x, y, z) = -210 - 300(x-2) + 200(y+1) - 82(z-5)$

b) $L(x, y, z) = 1$

8 Trekantulikheten gir $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| \leq |\mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})| + |\mathbf{E}(\mathbf{x})|$. Bruk så at det ved oppgave 7 fins $M > 0$ slik at $|\mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})| \leq M \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{a}|$, og til slutt at $|\mathbf{E}(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}-\mathbf{a}|$ når $\mathbf{x}$ er tilstrekkelig nær $\mathbf{a}$.

Seksjon 2.2

1

a) 5

b) 1/5

c) $\frac{1}{\sqrt{41}}(5, 4)$

2 $D_{\mathbf{u}}g = 4$, $D_{\mathbf{v}}g = 24/\sqrt{14}$. Vokser raskest i retningen $(1, 1, 1)$

3

a) $\nabla f = (2xy + 1/x, x^2 + 1/y)$

b) $\nabla f = (2xyz, x^2z, x^2y)$

4 Rett oppover: Retning $(-1, -2)$. Rett nedover: $(1, 2)$

Seksjon 2.3

1

a) $\mathbf{U}'(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{G}'(\mathbf{U}(1, 1, 1)) = \mathbf{G}'(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{F}'(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 18 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

3

b) 400

Seksjon 2.4

1

a) $T_2(\mathbf{x}) = 1 + x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 + 2y_1^2$

$\boxed{2}$

a) $T_2^g(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

b) $T_2^g(x_1 - 2x_2)$ blir lik Taylorpolynomet $T_2(\mathbf{x})$ for fuksjonen $f(\mathbf{x}) = e^{x_1 - 2x_2}$

$\boxed{3}$

a) $P_3(\mathbf{x}) = -2(x_1 - \frac{pi}{3}) - (x_2 - \frac{pi}{3}) + \frac{4}{3}(x_1 - \frac{pi}{3})^3 + 2(x_1 - \frac{pi}{3})^2(x_2 - \frac{pi}{3}) + (x_1 - \frac{pi}{3})(x_2 - \frac{pi}{3})^2 + \frac{1}{6}(x_2 - \frac{pi}{3})^3$

b) Ingen av de 16 fjerdederiverte i restleddet $R_3(\mathbf{x})$ kan ha absoluttverdi større enn $2^4 = 16$, fordi hver derivasjon høyst bidrar med en faktor 2 på absoluttverdien og $|\sin t| \leq 1$ for alle t. Altså

$$|R_3(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{4!} \cdot 16 \cdot 16 \cdot 1 \cdot (1/10)^4 \approx 0.01$$

d) Siden fakultet dominerer potens, går $2^n/n!$ mot 0 når $n \to \infty$. Altså $|R_n(\mathbf{x})| \to 0$ når $n \to \infty$.

$\boxed{2}$ For eksempel $\mathbf{F}$ gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (0, 0)$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Seksjon 2.6

$\boxed{1}$ $df/dx = [\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x) - 2xy^3]/(3x^2y^2)$,
$f'(1) = -2/3$. Tangentlinjen: $y - 1 = (-2/3)(x - 1)$

$\boxed{2}$

b) 0

$\boxed{3}$

a) $\nabla f = (3x^2yz^3, x^3z^3, 3x^3yz^2 + 5z^4)$

b) $\partial f/\partial x = -3x^2yz/(3x^3y + 5z^2)$, $\partial f/\partial y = -x^3z/(3x^3y + 5z^2)$

c) I motsatt retning av gradienten, dvs. i retning $(3, 7)$

$\boxed{1}$

a) Delvis løsning: Etter å ha brukt middelverdisetningen kan du bruke at

$$\begin{aligned}\left|\nabla \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{c})\right| &= \left|\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_1 \partial x_j}(\mathbf{c}), \ldots, \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_m \partial x_j}(\mathbf{c})\right)\right| \\ &\leq \sqrt{m^2 + \cdots + m^2} = \sqrt{m \cdot m^2} = \sqrt{m^3} = m^{3/2}\end{aligned}$$

b) Delvis løsning: Dette følger fra definisjonen av normen til en matrise M.

c) Delvis løsning: Vi får

$$||\mathbf{F}'(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'(\mathbf{y})|| \leq m^2 \cdot (m^{3/2})^2 \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = m^5 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$$

Ta så kvadratroten på begge sider.

Seksjon 2.9

1 Maksimum: $f(4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = \sqrt{5}$. Minimum: $f(-4/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

2 $f(1/\sqrt{21}, -2/\sqrt{21}, 4/\sqrt{21}) = 2\sqrt{21}$ er maksimum,
$f(-1/\sqrt{21}, 2/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21}) = -2\sqrt{21}$ er minimum

3 $(\pm 2^{1/4}, 2^{-1/4}, 2^{-1/4})$,
$(\pm 2^{1/4}, -2^{-1/4}, -2^{-1/4})$

4 Nærmest $(1/\sqrt{18}, 1/\sqrt{18})$ og
$(-1/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18})$.
Lengst fra: $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ og $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Minste avstand: $1/3$. Største avstand: 1

5 $R^2 \cdot 3\sqrt{3}/4$

6 $(1/6, 2/3, 7/6)$

7 Høyeste $(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}, \sqrt{5} - 4)$,
laveste $(-\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\sqrt{5} - 4)$

12 $4/(3\sqrt{3})$

Seksjon 2.10

2

2 $(0, 0)$ eneste stasjonære punkt

4

a) $f(13/21, 19/21, -11/21) \approx 1.5$

b) $(x, y, z) = (-5t - 2, 4t + 3, t)$ for $t \in \mathbb{R}$

c) De to bibetingelsene definerer til sammen en rett linje i $\mathbb{R}^3$, og svaret på b) gir en parameterfremstilling for denne linjen. Siden $f(x, y, z)$ er kvadratet av avstanden fra (x, y, z) til origo, er minimumspunktet for f det punktet på linjen som ligger nærmest origo.

5

a) Maksimum $f(1, 0, 5) = 5$, minimum $f(-1, 0, 3) = 3$

b) $x - z + 4 = 0$ er ligningen for et plan, og den kan skrives $z = x + 4$. Vi er så ute etter å finne høyeste og laveste skjeæringspunkt mellom dette planet og sylinderen $x^2 + y^2 = 1$, når z-aksen peker oppover. Da ser vi at maksimum vil komme for $x = 1$, og minimum for $x = -1$. I begge tilfeller har vi $y = 0$.

Seksjon 3.1

1

a) Hyperbel

b) Ellipse

c) Ellipse

d) Parabel

2

a) Hyperbel

b) Parabel

c) Ellipse

3

a) $2(x+3)^2 - 19$

b) $-(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$

c) $(y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

d) $(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$

4

a) Ellipse

b) Hyperbel

c) Parabel

Seksjon 3.2

1 $x - 3 = \frac{1}{4}(y-1)^2$

2 $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-5)^2$

3

a) Brennpunkt $(0, 1/4)$, styrelinje $y = -1/4$

b) Brennpunkt $(1/4, 0)$, styrelinje $x = -1/4$

c) Brennpunkt $(2, -1/16)$, styrelinje $y = 1/16$

4 $(2, \sqrt{5})$ og $(2, -\sqrt{5})$

5 $3x^2 + 4y^2 - 18x - 8y = 17$

6 $(0, \sqrt{2})$ og $(0, -\sqrt{2})$

Seksjon 3.3

1 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3)$

2 $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1 - t^2)$, for $t \in [-1, 1]$

3 $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 2 \sin t)$

4 $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$

5 $\mathbf{r}(t) = (-2, 0) + t(3, 6) = (-2 + 3t, 6t)$

6 $\mathbf{r}(t) = (-1, 0, 5) + t(1, 2, -5) = (-1 + t, 2t, 5 - 5t)$

7 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$

8 $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$, for $t \in D_f$

9 Gen. løsning: $(x, y, z) = (24 + 27t, -9 - 11t, t)$. Dette er også en parametrisering av skjæringslinjen

10

a) Kurven har ligning $y = 4x^2$, for $x \geq 0$

b) Kurven har ligning $y = 6(x - 2)$

c) Kurven har ligning $y = x^2$, for $x \in [-1, 1]$

d) Kurven har ligning $y^2 - x^2 = 1$, for $y \geq 0$

11 Fart: $\sqrt{2}$. Tangent: $\mathbf{L}(t) = (1, 0, 2\pi) + (0, 1, 1) \cdot (t - 2\pi)$. Enh.tangent: $(1/\sqrt{2})(0, 1, 1)$

14 $\mathbf{r}(s) = (1/\sqrt{13})(s, 2s, 3s)$ for $s \in [0, 5\sqrt{13}]$

15

b) $\mathbf{r}'(4\pi/3) = (3/2, -\sqrt{3}/2)$, fart: $|\mathbf{r}'(4\pi/3)| = \sqrt{3}$. Tangentlinjen: $\mathbf{L}(t) = (\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (t - \frac{4\pi}{3})$. Glatt overalt unntatt i punktene $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

Seksjon 3.4

1 $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$

4 $(x/4)^2 + y^2 + (z/3)^2 = 1$

5 $(x - 2)^2/4 + y^2 + z^2/4 = 1$

6 (i) $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$ (ii) $(x/3)^2 + z^2 = 1$ (iii) $(y/2)^2 + z^2 = 1$ (iv) $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 3/4$ (v) $(x/3)^2 + z^2 = 3/4$ (vi) $(y/2)^2 + z^2 = 5/9$. Alle snittkurvene blir ellipser.

Seksjon 3.5

$\boxed{1}$

a) $r = 1, \theta = \pi/2, z = 2$

b) $r = \sqrt{8}, \theta = \pi/4, z = 1$

c) $r = 2, \theta = 7\pi/6, z = 2$

$\boxed{2}$

a) $(-2, 0, 2)$

b) $(0, -2, 0)$

$\boxed{3}$

a) $z = 4 - r^2$

b) $r^2 = 4$

c) $r^2 \sin^2 \theta + z^2 = 1$

d) $z = r^2 \cos 2\theta$

e) $\cos \theta = -\sin \theta$

f) $r \cos \theta + r \sin \theta + z = 0$

$\boxed{4}$

a) $\rho = 2, \theta = \pi/2, \phi = \pi/2$

b) $\rho = \sqrt{8}, \theta = \pi/2, \phi = \pi/4$

c) $\rho = \sqrt{8}, \theta = 0, \phi = 3\pi/4$

d) $\rho = 5, \phi = \pi$, θ hva som helst

e) $\rho = 4, \phi = 0$, θ hva som helst

f) $\rho = 2, \theta = 3\pi/2, \phi = \pi/6$

$\boxed{5}$ $r^2 + z^2 = 4$

$\boxed{6}$

a) $(-3, 0, 0)$

b) $(0, 0, -1)$

$\boxed{7}$

a) $\rho^2 = 4$

b) $\phi = \pi/4$

c) $\rho = \cos \phi / \sin^2 \phi$ for $\phi \in (0, \pi/2]$

d) $\rho(\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 2\sin\phi\cos\theta$

$\boxed{8}$ $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$

Seksjon 3.6

$\boxed{1}$ $x = u$, $y = v$, $z = 1-u^2-v^2$, dvs. $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 1-u^2-v^2)$. Parameterområde: $u^2+v^2 \le 1$. Alternativ, mer elegant løsning: $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$\boxed{2}$ $\mathbf{r} = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$, parameterområde $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$

$\boxed{3}$ $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, \frac{1}{5}(u+3v-1))$, parameterområde $u^2+v^2 \le 4$

$\boxed{4}$ $\mathbf{r}(u,v) = (u, 2+u^2+v^2, v)$, p.område $u^2+v^2 \le 1$

$\boxed{5}$ $\mathbf{r}(u,v) = (\cos u, v, (1/2)\sin u)$, parameterområde $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [-1, 1]$

$\boxed{6}$ $\mathbf{r}(u,v) = (\sqrt{u^2+v^2}, u, v)$, parameterområde $u \in [-1,1]$, $v \in [-1,1]$

$\boxed{7}$ $\mathbf{r}(\theta,u) = (\cos\theta, 1+\sin\theta, u)$, parameterområde $\theta \in [0, 2\pi)$, $u \in [-1, 0]$

$\boxed{8}$ $\mathbf{N} = (\cos u, \sin u, 0)$. Tangentplanet kan f.eks. parametriseres ved
$\mathbf{L}(u,v) = (1, u, v)$

$\boxed{9}$ $\mathbf{N} = (-\partial f/\partial u(a,b), -\partial f/\partial v(a,b), 1)$

$\boxed{12}$

c) $\partial\mathbf{r}/\partial u(\pi/4, 2) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$,
$\partial\mathbf{r}/\partial v(\pi/4, 2) = (0, 0, 1)$. Vi ser at
$\partial\mathbf{r}/\partial u(\pi/4, 2) = s'(\pi/4)$ og $\partial\mathbf{r}/\partial v(\pi/4, 2) = h'(2)$.

Seksjon 3.7

$\boxed{1}$

a) $r \in [0, 1)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

b) $r \in (4, \infty)$, $\theta \in [-3\pi/4, \pi/4]$

$\boxed{2}$

a) Kulekoordinater: $\rho \in [1, 4]$, $\phi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi)$

b) Sylinderkoordinater: $r \in [0, 1]$, $z \in (-\infty, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

c) Sylinderkoordinater: $r \in [0, 3]$, $z \in [0, 9-r^2]$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$\boxed{3}$ Koordinatsystem: $x = 3 + r\cos\theta$, $y = 2 + r\sin\theta$. Beskrivelse: $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$\boxed{4}$ $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \theta]$

$\boxed{5}$ $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $r \in [0, 2\cos\theta]$

$\boxed{6}$

a) Koordinatsystem: $x = 1 + \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = 2 + \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = 1 + \rho \cos\phi$. Beskrivelse: $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$

b) Koordinatsystem: $x = r\cos\theta$, $y = y$, $z = r\sin\theta$. Beskrivelse: $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $y \in \mathbb{R}$

c) Koordinatsystem: $x = x$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$. Beskrivelse: $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $x \in [0, 5]$

$\boxed{7}$ $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, 1 - \cos\theta]$

$\boxed{9}$ $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$, $\rho \in [0, 4\sin\phi]$

Seksjon 3.8

$\boxed{1}$

b) $e_1 = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$, $e_2 = \sqrt{15}/4 \approx 0.968$, $e_3 = 0$

c) $\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ Jorden: $a/b \approx 1.00014$, Pluto: $a/b \approx 1.0325$, Kohoutek: $a/b \approx 84.5$

Seksjon 4.1

$\boxed{1}$

a) Ikke innhold 0

b) Innhold 0

$\boxed{5}$

a) $\frac{1}{2}$ for alle i, j.

b) 3

c) 3

d) Her er det lurt å tegne en figur. Området under grafen til f er som et hus med et skrått tak. Leddene i riemannsummen representerer «klosser» som til sammen stikker like mye over taket som de ligger under det.

Seksjon 4.2

$\boxed{1}$

a) 8

b) 8

c) Hvis alle grensene er konstante, kan integralet oppfattes både som type I og som type II.

2 $32/3$

3 $212/21$

4 $4/5$

5 a) Standardkoordinater: $x \in [0,1]$, $y \in [0,2x]$ b) $8/15$

6 a) Standardkoordinater: $x \in [-2,2]$, $y \in [x^2-4,0]$ b) $128/7$

7 a) Standardkoordinater: $y \in [-4,1]$, $x \in [3y, 4-y^2]$ b) $1125/8$

Seksjon 4.3

1 a) Polarkoordinater: $r \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi)$ b) 4π

2 a) Polarkoordinater: $\theta \in [0,\pi/4]$, $r \in [0, 2-\cos\theta]$ b) $5\pi/8 + 1/8 - \sqrt{2}$

3 a) Standardkoordinater: $y \in [-1,1]$, $x \in [1-y^2, 2-2y^2]$ b) $8/105$

4 πR^2

5 π

6 πab

7 $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$

8 $2000\pi k/3$

9 $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

10 $11/12$

11 $128/15$

12 $\pi/2$

13 $2\pi(8/3-\sqrt{3})$

Seksjon 4.4

1 $9/8$

2 0

3 $3/20$

4 a) Standardkoordinater: $z \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, x]$ b) $1/16$

5 a) Standardkoordinater: $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $y \in [x^2, 4 - x^2]$, $z \in [0, y]$ b) $2752\sqrt{2}/105$

6 a) Sylinderkoordinater: $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$, $z \in [0, 1 - r^2]$ b) $\pi/6$

7 $\pi/2$

8 Sylinderkoordinater: $\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{1-r^2}^{\sqrt{1-r^2}} r dz) d\theta) dr = \pi/6$

9 Sylinderkooridnater: $\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{r\cos\theta + r\sin\theta + 5} r dz) d\theta) dr = 20\pi$

10 Kulekoordinater: $\int_1^2 (\int_0^{\pi/4} (\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi d\theta) d\phi) d\rho = \frac{14\pi}{3}(1 - 1/\sqrt{2})$

11 $51\pi/2$

12 Sylinderkoordinater: $2\int_0^{\pi/2} (\int_0^{2\cos\theta} (\int_0^r r dz) dr) d\theta = 40/(9\sqrt{2})$

13 $(4/3)\pi abc$

14 $\pi k R^4$

Seksjon 4.5

1 $1/48$

2

a) Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, så er volumet absoluttverdien av determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Seksjon 4.6

1 $16\sqrt{5}/3$

2 $5\sin 2$

3 4

4 0

5 $\frac{5}{2}\sqrt{14}$

6 $4\sqrt{6}$

7 0

8 a) $\mathbf{r}(t) = (t, 2t^2+1, 2t^2+1),\ t \in [0,1]$ b) $(33^{3/2}-1)/96$

9 a) $\mathbf{r} = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t),\ t \in [0, 2\pi)$ b) 45π

10 a) C_1: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ t \in [0,\pi]$. C_2: $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0),\ t \in [-1, 1]$ b) 2

11 $2\pi R$

12 $2\sqrt{2}\pi$

15 3π

Seksjon 4.7

1 $16/\sqrt{6}$

2 $\frac{1}{12}(6^{3/2} - 2^{3/2})$

3 $(\pi/240)(100\sqrt{5}+4)$

4 $(31\pi/4)\sqrt{26}$

5 0

6 $10/3$

7 $\pi\sqrt{14}$

8 $4\pi r^2$

9 $\sqrt{2}\pi$

10 πabh

Seksjon 4.8

3 $\pi[\ln(1+\sqrt{2})+1]$

8 $2\pi(\ln 2 + 23/32)$

10 $2\pi(15/16 + \ln 2)$

13 a) $140/3$ b) $(405/112, 0, 0)$

14 a) $32/3$, b) $(0, 47/32)$

15 a) $2\pi/3$, b) $(0, 0, 3/8)$

16 a) $2\sqrt{2}\pi^2$, b) $(0, 0, \frac{4}{3}\pi)$

17 a) $\frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)$, b) $\left(0, 0, \frac{5}{4} - \frac{3(5^{5/2} - 1)}{20(5^{3/2} - 1)}\right)$

18 a) $\pi/2$, b) $(0, 0, 2/3)$

19 Ved å sammenlikne med halvkulen vi regnet på for fire oppgaver siden, ser vi at massen må være $1/4$ av massen i den oppgaven, og at $\overline{z}$ ved symmetri må være den samme. Videre gir symmetri at $\overline{x} = \overline{y}$. Vi trenger dermed bare regne ut en av dem, og faktum er at vi kan se ved symmetri at $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z}$. Svarene blir: a) $\pi/6$, b) $(3/8, 3/8, 3/8)$

20

c) $4\pi/3$

22

b) Hint: Du kan sette hele x-integralet utenfor y-integralet, siden det bare er et konstant tall sett fra variabelen y sitt synspunkt. Skift så variabelnevn til x i y-integralet.

23

b) De er forskjøvet i forhold til hverandre, men de har samme form.

c) Noe av grunnen er at man vil unngå kanselleringseffekter av den typen vi ser i oppgave a). Siden den eneste forskjellen mellom grafene til f og g er en forskyvning, virker det urimelig å bruke en integraldefinisjon som gjør at integralet av f over $\mathbb{R}^2$ er 0, mens integralet av g over $\mathbb{R}^2$ divergerer.

Seksjon 5.1

3

a) $\nabla f = (2xy + 5, x^2)$

b) $\nabla f = (-1, 2, 3)$

5 a) Ikke konservativt b) Fins ingen

6 a) Konservativt b) $f(x, y) = x^2y^2$

7 a) Konservativt b) $f(x, y) = \sin x + \sin y$

8 a) Konservativt b) $f(x, y) = -\frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-1}$

9 a) Konservativt b) $f(x, y, z) = \sin(xy) + z^2y$

10 a) Ikke konservativt b) Fins ingen

11 a) Konservativt b) $f(x, y, z) = xy^4 + xz + 5y$

Seksjon 5.2

$\boxed{1}$ 66/35

$\boxed{2}$ π

$\boxed{3}$ 5/6

$\boxed{4}$ $2\pi + 2\pi^2$

$\boxed{5}$ 0

$\boxed{6}$ 0

$\boxed{7}$ $\mathbf{F} = (2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z)$

$\boxed{8}$

a) $f(x, y) = x^3 + y^2$ er en potensialfunksjon for **F**

b) -2

Seksjon 5.3

$\boxed{1}$ 0

$\boxed{2}$ -10

$\boxed{3}$ $3\pi/4$

$\boxed{4}$ 0

$\boxed{5}$ 224/15

$\boxed{7}$

a) Området R kan deles opp i to standardområder ved å kutte langs y-aksen, for $y \in [1, 2]$

b) 0

$\boxed{8}$

b) $3\pi/8$

$\boxed{9}$ πR^2

$\boxed{10}$ 1

$\boxed{11}$

$\boxed{11}$ 3/2

$\boxed{12}$ 0

Seksjon 5.4

$\boxed{1}$ div $F = 2xy + 5$

$\boxed{2}$

a) curl $\mathbf{F} = (xz - 2z, -yz, -x^3)$, div $\mathbf{F} = 3x^2y + 1 + xy$, curl $\mathbf{F}(1, 2, -1) = (1, 2, -1)$, div $\mathbf{F}(1, 2, -1) = 9$

b) curl $\mathbf{F} = (0, -\cos x, 0)$, div $\mathbf{F} = -\sin x + \cos y$, curl $\mathbf{F}(1, 2, -1) = (0, -\cos 2, 0)$, div $\mathbf{F}(1, 2, -1) = -\sin 1 + \cos 2$

Seksjon 5.5

$\boxed{1}$ π

$\boxed{2}$ 4π

$\boxed{3}$ $\pi/4$

$\boxed{4}$ 2π

Seksjon 5.6

$\boxed{1}$ 0

$\boxed{2}$ $8\pi/3$

$\boxed{3}$ 16

$\boxed{4}$ 4π

$\boxed{10}$ 4

$\boxed{14}$ 4π

$\boxed{15}$ 0

Seksjon 5.7

$\boxed{1}$ 16π

$\boxed{2}$ 18π

$\boxed{3}$ $-1/2$

$\boxed{4}$ 0

$\boxed{5}$ 0

$\boxed{6}$ 0

7 Arealet: $\sqrt{2}\pi$. Arbeidet: π

11 2π

Seksjon 5.8

1

a) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$

b) 0

2 8

3 $f(x, y, z) = x + xy + xz^2$ er en potensialfunksjon

6

b) $\mathbf{G}(x, y, z) = (-y^2 z - y + xy^2, -2xyz, 0)$

7 Resultatet følger *ikke*

8

b) 2π

14

a) 0

b) 0

15 0

17

a) $-16/3$

b) 0

c) $-16/3$

d) -2π

Seksjon 6.1

1

a) Ja, dette er et vektorrom V. Metoden for å avgjøre dette, er å sjekke om aksiomene A1-A10 alle holder. For å sjekke A1, anta at $f, g \in V$. Vi har da at $f(5) = g(5) = 0$, og det gir

$$(f + g)(5) = f(5) + g(5) = 0 + 0 = 0$$

Altså er $f + g \in V$, så A1 er oppfylt. A2 sjekkes tilsvarende. For å sjekke A3, må vi undersøke om det finnes en funksjon $\mathbf{0} = f_0 \in V$ som oppfyller kravet vi stiller til nullvektoren. La $\mathbf{0} = f_0$ være nullfunksjonen gitt ved $f_0(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Hvis da $\mathbf{u} = g$ er en vilkårlig vektor i V, altså en funksjon, får vi at funksjonen $\mathbf{u} + \mathbf{0} = g + f_0$ oppfyller

$$(g + f_0)(t) = g(t) + f_0(t) = g(t) + 0 = g(t)$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Dette betyr at $g + f_0 = g$, dvs. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. Siden $\mathbf{u} \in V$ var vilkårlig, viser dette at A3 er oppfylt dersom vi velger nullvektoren $\mathbf{0}$ til å være nullfunksjonen f_0. Punktene A4-A10 sjekkes ved tilsvarende resonnementer.

b) Nei. Aksiomene A1, A2 og A4 holder ikke

c) Nei. Aksiomet A3 holder ikke

d) Ja

e) Nei. Aksiomene A1, A2 og A3 holder ikke

f) Ja

g) Ja

h) Ja

i) Nei. Aksiomene A1, A2, A3 og A4 holder ikke

2 $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Dimensjonen til underrommet er 2

4 $\dim U = 2$

5

a) Nei. A10 holder ikke

b) Nei. A5, A6 og A9 holder ikke

c) Nei

6 Nei. For eksempel er $(1, 1, 1) \in K$, men $(-1)(1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \notin K$. Så aksiom A2 holder ikke

7 Nei. Aksiom A2 holder ikke

8

a) Ja

b) Ja

c) Nei, A1, A2 og A3 holder ikke

d) Nei. A1 holder ikke

e) Nei. A1 holder ikke

f) Ja

9

a) Ved A5 og deretter A4 har vi
$$(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$
Så likningen $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ har løsningen $\mathbf{x} = -\mathbf{v}$. For å vise at dette er den eneste løsningen, anta at $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Da er $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$. Ved A4 fins en vektor $-\mathbf{v}$ slik at $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Dette gir
$$(\mathbf{x} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) = (\mathbf{y} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v})$$
Ved A6 gir dette
$$\mathbf{x} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = \mathbf{y} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v}))$$
Ved A4 fås fra dette $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{y} + \mathbf{0}$. Til slutt gir A3 oss $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

b) Anta at $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Ved A5 er da $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$, og vi får
$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$$
Ved A6 gir dette
$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{w} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})),$$
som ved A4 gir $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$. A3 gir så $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

c) Ved A10, A9 og til slutt A10 igjen har vi
$$0\mathbf{v} + \mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (0+1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$
Vi legger til $-\mathbf{v}$ på begge sider og bruker A5, deretter A4 og til slutt A3:
$$\begin{aligned}(0\mathbf{v} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{v})\\ 0\mathbf{v} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{v})\\ 0\mathbf{v} + \mathbf{0} &= \mathbf{0}\\ 0\mathbf{v} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

d) Fra c) vet vi at dette holder for $r = 0$. Anta $r \neq 0$. Ved bruk av A10, A7, A8, A3, A7 og til slutt A10 får vi
$$\begin{aligned}\mathbf{v} + r\mathbf{0} &= 1\mathbf{v} + r\mathbf{0} = (r \cdot (1/r))\mathbf{v} + r\mathbf{0}\\ &= r \cdot ((1/r)\mathbf{v}) + r\mathbf{0}\\ &= r((1/r)\mathbf{v} + \mathbf{0})\\ &= r((1/r)\mathbf{v}) = (r \cdot (1/r))\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}\end{aligned}$$
Siden $\mathbf{v} \in V$ var vilkårlig, følger at $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ved unikhetsegenskapen til $\mathbf{0}$ (punkt (1) i teoremet).

e) Bruk av A9 i første overgang og c) i siste gir
$$(-r)\mathbf{v} + r\mathbf{v} = ((-r) + r)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
Fra unikhetsegenskapen i a) følger at $(-r)\mathbf{v}$ må være lik $-(r\mathbf{v})$. På tilsvarende måte gir A8, A5, A4 og til slutt d)
$$r(-\mathbf{v}) + r\mathbf{v} = r((-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) = r(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Igjen følger fra a) at $r(-\mathbf{v})$ må være lik $-(r\mathbf{v})$.

$\boxed{10}$ At S spenner ut $\mathbb{P}_n$ er klart, fordi alle polynomer i $\mathbb{P}_n$ per definisjon er lineærkombinasjoner av funksjonene i S. Hint til å vise lineær uavhengighet for S: Bruk algebraens fundamentalteorem. Dimensjonen til $\mathbb{P}_n$ er $n+1$, fordi basisen S inneholder $n+1$ elementer

$\boxed{11}$

a) Hint: Per definisjon av begrepet basis må du vise at samlingen S er lineært uavhengig, og at den spenner ut $\mathbb{P}_\infty$. Hint til det første: Bruk algebraens fundamentalteorem

b) Ved a) har $\mathbb{P}_\infty$ en uendelig delmengde S som er lineært uavhengig. Det følger at ingen endelig samling av n elementer i $\mathbb{P}_\infty$ kan spenne ut hele V, for noe naturlig tall n.

$\boxed{12}$ Ja, den blir et vektorrom.

$\boxed{13}$

a) Ja

b) Nei

c) Nei

d) Ja

e) Nei

$\boxed{15}$

a) Nei

b) Nei

$\boxed{16}$ $\{p(x), q(x), x^2, 1\}$

$\boxed{17}$

a) Ja

b) Nei, ikke generelt (men det gjelder hvis $U_1 \subseteq U_2$ eller $U_2 \subseteq U_1$)

c) Ja

Seksjon 6.2

$\boxed{1}$

a) Ja

b) Ja

c) Nei

d) Ja

Seksjon 6.3

$\boxed{1}$

a) $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$, $\text{Ran}(T) = \mathbb{R}^2$, T er ikke injektiv og ikke inverterbar, men surjektiv. Vi har $\dim \text{Ker}(T) = 1$ og $\dim \text{Ran}(T) = 2$.

b) $ker(T) = \{0\}$ (dvs. kjernen består av kun nullfunksjonen), $\text{Ran}(T) = \mathbb{P}_\infty$, T er injektiv, surjektiv, inverterbar. Vi har $\dim \text{Ker}(T) = 0$ og $\dim \text{Ran}(T) = \infty$.

c) $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}$, $\text{Ran}(T) = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$, T er injektiv, ikke surjektiv, ikke inverterbar. Vi har $\dim \text{Ker}(T) = 0$ og $\dim \text{Ran}(T) = 2$.

d) $\text{Ker}(T) = \{f \mid f \text{ har grad } 0\}$, $\text{Ran}\, T = \mathbb{P}_\infty$. T er ikke injektiv og ikke inverterbar, men surjektiv. Vi har $\dim \text{Ker}(T) = 1$ og $\dim \text{Ran}(T) = \infty$.

e) $\text{Ker}(T) = \{f \in \mathbb{P}_4 \mid f \text{ har grad } 0\}$, $\text{Ran}(T) = \{f \in \mathbb{P}_4 \mid f \text{ har grad} \leq 3\}$. Ikke injektiv, ikke surjektiv, ikke inverterbar. Vi har $\dim \text{Ker}(T) = 1$ og $\dim \text{Ran}(T) = 4$.

$\boxed{2}$ $\{(-7, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 0, 1, 0), (-9, 0, -6, 0, 0, 1)\}$

$\boxed{4}$

b) Delpunktene refererer til den tidligere oppgaven: a) $\mathbf{x} = (5, 1)$ b) $\mathbf{x} = (-2, -1, 0, 0, 0) + c_1(-15, -6, 1, 0, 0) + c_2(3, 1, 0, 1, 0)$
$+ c_3(-25/2, -11/2, 0, 0, 1)$
c) $\mathbf{x} = (1, 0, 0, -1, 2) + c_1(-5, 1, 0, 0, 0) + c_2(1, 0, 1, 0, 0)$ d) Ingen løsning
e) $\mathbf{x} = (3, 0, 0) + c_1(-2, -2, 1)$.

$\boxed{5}$

a) $\{(-3, -5, -4, 1)\}$

b) $\{(-15, -6, 1, 0, 0),$
$(3, 1, 0, 1, 0), (-25/2, -11/2, 0, 0, 1)\}$

c) $\{(-5, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)\}$

$\boxed{6}$ $\{(-34, 4, -11)\}$

$\boxed{7}$

b) Kjernens dimensjon er 2 i alle tilfellene. For den første og den tredje avbildningen er en basis for kjernen $\{e^{-3t}, te^{-3t}\}$. De resterende definerer samme lineærtransformasjon, og en basis for kjernen til denne er $\{e^{2t}, e^{-3t}\}$

c) For den første $\mathbf{y} = \frac{2}{9} + c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$. Tilsvarende for de andre, se fasiten til de tilsvarende oppgavene i kapittel 7.8

$\boxed{8}$

b) $\{_{f,g\}}\}$ der $f(x) = 1$ og $g(x) = x$

$\boxed{9}$

b) $p(x) = x(x-1)$, dvs. basisen er $\{p\}$ der p er gitt ved $p(x) = x(x-1)$

Seksjon 6.4

$\boxed{1}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$

b) Vi har $[T(1)]_{B'} = [x]_{B'} = [0, 1, 0, 0]$, $[T(x)]_{B'} = [x^2]_{B'} = [0, 0, 1, 0]$ og $[T(x^2)]_{B'} = [x^3]_{B'} = [0, 0, 0, 1]$. Ergo blir $[T]_{B' \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $T^{-1}(\{0\})$ er mengden av alle konstante funksjoner i $\mathbb{P}_3$, altså alle funksjoner på forem $f(x) = c$. T er ikke inverterbar.

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $[T]_{B' \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $[T^2]_{B' \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\boxed{7}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Seksjon 6.5

$\boxed{1}$

a) $[\mathrm{id}]_{S \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $[\mathrm{id}]_{B \leftarrow S} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} -40 & -24 & -15 \\ 13 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Seksjon 6.6

1 a) Basis $\{[-3, 1]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_1 = 9$, basis $\{[1, 2]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_2 = 2$ d) Basis $\{[1, 0], [0, 1]\}$ for egenverdien $\lambda = 2$.

2 Basis $\{[1, 0, 0]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_1 = -5$, basis $\{[0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ for egenrommet med egenverdi $\lambda_2 = 1$. Dimensjoner: 1 og 2.

3 $p(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 18$. Karakteristiske røtter 6 og 3.

4 Egenverdi $\lambda_1 = 1$ med egenbasis 1, algebraisk multiplisitet og geometrisk multiplisitet begge 1. Eegenverdi $\lambda_2 = 2$ med egenbasis $1 + x^2$, algebraisk multiplisitet 2 og geometrisk multiplisitet 1.

a) Alle funksjoner på formen $f(t) = ce^{\lambda t}$ er egenvektorer for T med egenverdi λ.

6 Ingen egenvektorer og egenverdier.

Seksjon 6.7

3 Ingen andre matriser enn identitetsmatrisen selv.

5 $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Seksjon 6.8

1

a) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$.

b) $M^n = P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$, regn ut.

c) Se studenteksemplet.

2 a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$. Putt inn resten.

3 a) $P = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Putt inn resten.

4 Ta for eksempel matrisen fra oppgaven om kattekolonien.

5 Nei

Seksjon 6.9

1 $x(t) = (30/7)e^{5t} - (9/7)e^{-2t}$, $y(t) = (15/7)e^{5t} - (36/7)e^{-2t}$.

2 $x(t) = 2e^{5t} - e^{-2t} + 3$, $y(t) = e^{5t} - 4e^{-2t} + 5$.

3 En likevektsløsning for det inhomogene systemet blir $\mathbf{x}_s = (4, 2)$. Denne oppgaven fungerer som en litt usportslig forsmak på seksjon 14.5, fordi egenverdiene til koeffisientmatrisen i dette tilfellet blir komplekse. Det meste av regningen kan gjøres ved metoden her i seksjon 12.9, men du må gjøre noen triks til slutt for å omforme løsningen til reell form. Det er ikke så lett å finne ut hvordan dette kan gjøres på egen hånd, og det er enklere å bruke metoden fra seksjon 14.5. Følger vi den, får vi først den komplekse løsningsfunksjonen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{(3+6i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{3t}(\cos 6t + i \sin 6t) \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t}\cos 6t + i e^{3t}\sin 6t \\ -2i e^{3t}\cos 6t + 2e^{3t}\sin 6t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t}\cos 6t \\ 2e^{3t}\sin 6t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{3t}\sin 6t \\ -2e^{3t}\cos 6t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

for det tilsvarende homogene difflikningssystemet. I følge metoden fra seksjon 14.5 er realdelen og imaginærdelen til $\mathbf{z}(t)$ reelle basisfunksjoner for det homogene systemet, og den generelle løsningen av det inhomogene difflikningssystemet blir dermed

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t}\cos 6t \\ 2e^{3t}\sin 6t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{3t}\sin 6t \\ -2e^{3t}\cos 6t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} \cos 6t \\ 2\sin 6t \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} \sin 6t \\ -2\cos 6t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

der c_1 og c_2 nå er reelle, ubestemte konstanter.

4 $$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

5 $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

6

a) $x'(t) = 6 - 0.03x(t)$, $y'(t) = 0.03x(t) - 0.005y(t)$

b) Stabilisering på 200 kg gift i Fugletjern og 1200 kg gift i Glittertjern.

7

a) Initialbetingelse $x(0) = 10$, $y(0) = 0$

b) Lievektstilstanden er $\overline{x} = \overline{y} = 0$. (Merk at vi her bruker $c > 0$.)

c) Fra uttrykket ser vi at begge egenverdiene er negative. Dette gjør at systemet konvergerer mot likevektstilstanden med 0 mg i både blod og vev. Dette er rimelig, fordi medikamentet skilles ut via leveren ($c > 0$).

Seksjon 6.10

1

b) Generell løsning av (2) er $x_1(t) = A_1e^{5t} + A_2e^{-7t}$, $x_2(t) = 5A_1e^{5t} - 7A_2e^{-7t}$. Generell løsning av (1) er $y(t) = x_1(t)$. Dette stemmer med regningen i seksjon 5.9.

2 $y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-t} + (3/2)t + 3/4$

Seksjon 6.11

1

a) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -3$

c) $\{[1, 2], [1 - 3]\}$

d) $\mathbf{x}_n = 2^n a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-3)^n a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

e) $y_n = C \cdot 2^n + D \cdot (-3)^n$

f) $y_n = 5 \cdot 2^n + 7 \cdot (-3)^n$

$\boxed{2}$

a) $\mathbb{S}$ er uendeligdimensjonalt

e) De tre signalene $\{2^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{1\}_{n=-\infty}^{\infty}$ og $\{2^{-n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ utgjør en basis. (Signalet i midten er det konstante signalet som har verdi 1 hele veien.)

Seksjon 6.12

$\boxed{1}$

a) Alle komponentene er ikke-negative, og søylene har sum 1

b) $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1/3 + (2/3)(-1/2)^n \\ 2/3 - (2/3)(-1/2)^n \end{bmatrix}$

c) Entydigheten følger fra forrige delpunkt. Likevektstilstanden er $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. Systemet konvergerer mot denne fordi faktorene $(-1/2)^n$ i $\mathbf{x}_n$ går mot 0.

$\boxed{2}$ Vi har

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\mathbf{x}_j = 1 &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} M_{ij}\mathbf{x}_j = 1 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mathbf{x}_j \left(\sum_{i=1}^{m} Mij \right) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{x}_j \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

der vi i nest siste overgang brukte at M er en stokastisk matrise, og i siste overgang at $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor.

Seksjon 6.13

Seksjon 6.14

$\boxed{1}$

a) Dette er et vektorrom

b) Dette er ikke et vektorrom

c) Dette er et vektorrom

2

a) $T(f) = 0$ er ekvivalent med at $-f'' = 0$, som igjen er ekvivalent med $f'' = 0$.

b) $B = \{1, x\}$. Dimensjonen til $\operatorname{Ker} T$ er 2.

c) $f(x) = \sin 3x$

d) Differensialligningen $-f''(x) = \lambda f(x)$ kan skrives $f'' + \lambda f = 0$. Denne har løsninger ulik $f = 0$ i V uansett verdi av λ

e) Alle f på formen $f(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$, der A og B er reelle konstanter

f) Alle f på formen $f(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}$, der A og B er reelle konstanter

3

c) Ved teoremet er den generelle løsningen $f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. En vilkårlig funksjon $f \in V$ er altså en løsning av differensialligningen hvis og bare hvis den er en lineærkombinasjon av de to funksjonene $e^{r_1 t}$ og $e^{r_2 t}$, og disse er åpenbart lineært uavhengige når $r_1 \neq r_2$. Tilsvarende for de neste delpunktene.

f) Vi har en basis for $\operatorname{Ker} T$ med to elementer i alle tilfellene. Altså er dimensjonen 2.

4 Vi kan bruke en matrise som representerer en rotasjon, for eksempel $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5

6

a) Fortsettelse av hint: Nei, det er ikke mulig, fordi $p - q$ har grad høyst n. Husk algebraens fundamentalteorem.

b) Hint: $\mathbb{P}_n$ og $\mathbb{R}^{n+1}$ har samme dimensjon.

c) $B = \{\cos \lambda x, \sin \lambda x\{$, dimensjon 2

Seksjon 7.1

1

a) Nei, I4 holder ikke

b) Ja

2

d) $-1/12$.

e) $\sqrt{8/15}$ og $\sqrt{1/7}$.

f) $\sqrt{59/70}$.

g) $\arccos(-(1/12)/\sqrt{8/105}) \approx 107^\circ$

$\boxed{3}$

a) Nei, I4 holder ikke.

b) Ja

$\boxed{4}$

a) Ja

b) $[p]_B = (\frac{1}{3}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{5}})$

c) $\sqrt{2/5}$

d) $\sqrt{2/5}$

$\boxed{9}$

b) $1/2$

$\boxed{10}$

c) Hint: Dette følger fra likningen $\arccos\theta = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle/(\|u\| \cdot \|v\|)$, fordi faktoren 7 i telleren forkortes mot to faktorer $\sqrt{7}$ i nevnveren. (Tallet 7 er selvsagt tilfeldig valgt)

Seksjon 7.2

$\boxed{1}$ Hvis du bruker vektorene i den rekkefølgen som er oppgitt i oppgaven, får du basisen $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/2, 1/2, 0)\}$. Hvis du bytter rekkefølgen på $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$, blir regningen mye enklere. Da får du standardbasisen $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$\boxed{2}$ $\{(1, 0, 1)/\sqrt{2}, (0, 1, 0)\}$

$\boxed{3}$ $\{(1/3, 2/3, 0, 2/3), (4, -1, 3, -1)/\sqrt{27}, (-2, -4, 3, 5)/\sqrt{54}\}$

$\boxed{4}$ Innsetting i teorem 3 med $\mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{q}_3$ som vektorene fra oppgave 3 og $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ som søylevektorene i A. (Du må da regne ut til sammen 6 indreprodukter.)

Seksjon 7.3

$\boxed{1}$

a) $(3, 0, 0)$

b) $(12/7, -6/7, 18/7)$

$\boxed{2}$ $\text{proj}_U \mathbf{v} = (1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = (0, 0, 5)$.

$\boxed{3}$ $\text{proj}_U \mathbf{v} = (-2, 0)$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = (0, -1)$.

$\boxed{4}$

a) $\mathrm{proj}_U \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = \mathbf{0}$

b) $\mathrm{proj}_U \mathbf{v} = (8/3, 2/3, 10/3)$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = (7/3, 7/3, -7/3)$

c) $\mathrm{proj}_U \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_{U^\perp} = \mathbf{v}$

5 $(-1, 3, -1)$

6

a) $(5/4)x^2$

b) Ved Gram-Schmidt får vi at de to polynomene $q_1 = 1$ og $q_2 = \sqrt{12}(x - 1/2)$ utgjør en ortonormal basis for U. Dette gir oss

$$\mathrm{proj}_U(x^2) = \langle q_1, x^2\rangle q_1 + \langle q_2, x^2\rangle q_2$$

Her får vi $\langle q_1, x^2\rangle = 1/3$ og $\langle q_2, x^2\rangle = 1/\sqrt{12}$. Innsatt gir dette $\mathrm{proj}_U(x^2) = x - 1/6$

7 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9

b) $A^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = AB^2 = (AB)B = AB = A$. At $B^2 = B$ vises tilsvarende. Det følger også ved symmetri.

Seksjon 7.4

1

a) Fordi M er symmetrisk.

b) $\{2^{-1/2}[-1, 1, 0],\ 6^{-1/2}[-1, -1, 2],\ 3^{-1/2}[1, 1, 1]\}$

Seksjon 7.5

2

b) $\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

3

a) $[T]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4

a) $[T]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{7}$ $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\boxed{8}$ Hint: De to søylevektorene i M skal utgjøre en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$. Det er ikke så mange måter en slik basis kan ligge på.

Seksjon 7.6

$\boxed{1}$

a) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \Sigma = V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

f) $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ der $U = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) \\ -1/3 & 0 & 4/(3\sqrt{2}) \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$

a) Regelen $(BC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$ gir $(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$. Dette viser at $A^{\mathrm{T}}A$ er symmetrisk.

b) $\|A\mathbf{v}\|^2 = (A\mathbf{v})^{\mathrm{T}}(A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}) = \lambda \cdot 1 = \lambda$.

Seksjon 7.7

$\boxed{1}$ Alle punkter (x, y) på linjen $x + y = 1/2$.

$\boxed{2}$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Bildet blir planet i $\mathbb{R}^3$ utspent av de to vektorene [1, 1, 0] og [0, 0, 1].

d) Tilærmet løsning $\mathbf{x} = (x, y) = (1, 0)$. Denne er entydig. Vi har $A\mathbf{x} = (1, 1, 0)$, og dette er projeksjonen av $(2, 0, 0)$ på bildet til A.

$\boxed{3}$ Du får den eksakte løsningen $(x, y) = (2, 1)$.

Seksjon 7.8

$\boxed{1}$ $s = -0.69t + 7.06$

$\boxed{2}$ $s = (1/2)t + 2$. I dette tilfellet er samlet kvadratavvik 0, fordi de gitte datapunktene ligger på en rett linje.

Seksjon 7.9

$\boxed{1}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \pi & -3/2 \\ -3/2 & -8 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$

a) Ellipse

b) Hyperbel

c) Ellipse

d) Hyperbel

e) Parabel

Seksjon 7.10

4

b) $\lambda = 9$

d) $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$, der A, B er vilkårlige reelle tall.

e) $B = \{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$, dimensjon 2

f) $\lambda = -9$

h) $f(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$, der A, B er vilkårlige reelle tall.

i) $B = \{\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x\}$, dimensjon 2

k) Egenvektorer: Funksjoner f på formen $f(x) = A\sin\frac{n\pi x}{a}$, der A er et reelt tall og n er et positivt helt tall. Tilhørende egenverdi: $\lambda = -(n\pi/a)^2$. Dimensjon av hvert egenrom: 1

l) Egenvektorer tilhørende ulike egenverdier er ortogonale

6

b) Hint: Du kan bruke $\cos x\cos y = (1/2)[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ på et av de tre tilfellene. Prøv å finne triks for de to andre også.

Seksjon 8.1

1

b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$. Dimensjonen er 4.

2

a) Ja

b) Ja

c) Nei

3 $(z, w) = (4 + i, -1 + 2i)$

4 Egenverdi $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ med egenbasis $\{[i, 1]\}$, egenverdi $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$ med egenbasis $\{[1, i]\}$.

5

c) Alle er -1

d) 1 og -1 for alle tre

e) Henholdsvis $\{(1, -1), (1, 1)\}$, $\{(i, 1), (1, i)\}$ og $\{(1, 0), (0, 1)\}$

6 $M = \frac{1}{2}(q + r)\sigma_1 + \frac{i}{2}(q - r)\sigma_2 + \frac{1}{2}(p - s)\sigma_3 + \frac{1}{2}(p - s)I$

$\boxed{7}$

a) $A = \begin{bmatrix} 50 & -1 \\ 1 & 50 \end{bmatrix}$

e) Omtrent 78 uker

Seksjon 8.2

$\boxed{1}$

a) $2 - 3i$.

b) $3i$

c) $\sqrt{3}$

d) $\sqrt{5}$

$\boxed{2}$

a) Ja

b) Nei

$\boxed{4}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ -5i & 6-6i \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & i & 1 \\ 1 & i & i \end{bmatrix}$

$\boxed{5}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Seksjon 8.3

$\boxed{1}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2-i & 5-i \end{bmatrix}$, nei

b) $\begin{bmatrix} -i & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, nei

c) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, ja

d) $\begin{bmatrix} 5 & 2+3i \\ 2-3i & 7 \end{bmatrix}$, ja

$\boxed{2}$ Nei

$\boxed{3}$

a) Ja

b) Ja

c) Ja

d) Ja

$\boxed{4}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{6}$ Determinantene er henholdsvis 1, i, i og 1. De inverse er matrisenes adjungerte.

$\boxed{7}$ Siden matrisene er unitære, utgjør søylevektorene deres en ortonormal egenbasis.

$\boxed{8}$

a) Fordi M er hermitisk.

b) $\{2^{-1/2}[i, 0, 1], 2^{-1/2}[-i, 0, 1], [0, 1, 0]\}$

Seksjon 8.4

$\boxed{1}$ $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2e^{2t}\sin 2t \\ e^{2t}\cos 2t \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2e^{2t}\cos 2t \\ e^{2t}\sin 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = -k\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + 7k\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7k \\ k \end{bmatrix}$

Seksjon 8.5

$\boxed{1}$

a) Har du tenkt nok nå?

Seksjon 9.1

$\boxed{1}$ La $f(t) = \cos \omega t$. Da er $f'(t) = -\omega \sin t$ og $f''(t) = -\omega^2 \cos t$, så hvis vi skriver $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ har vi $\mathcal{L}\{f''\}(s) = -\omega^2 F(s)$ ved linearitet. Videre er $f(0) = 1$ og $f'(0) = 0$. Innsatt i ligningen

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

gir dette $-\omega^2 F(s) = s^2 F(s) - s \cdot 1 - 0$. Løser du med hensyn på $F(s)$, får du $F(s) = \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = s/(s^2 + \omega^2)$.

$\boxed{2}$

a) Bruk linearitet av laplacetransformasjonen

Seksjon 9.2

$\boxed{1}$

a) Den transformerte ligningen blir $s^2 F - s + 9F = 0$, som gir $F(s) = s/(s^2 + 9)$. Altså $f(t) = \cos 3t$.

b) Den transformerte ligningen blir $s^2 F - s - 1 - 4F = 0$, som gir

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2-4} = \frac{s}{s^2-4} + \frac{1}{s^2-4}$$

Altså $f(t) = \cosh 2t + \frac{1}{2}\sinh 2t = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}$.

$\boxed{2}$

b) $f(t) = -\frac{1}{2}\sin t + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{t}$

Seksjon 9.3

$\boxed{1}$

a) $F(s) = \dfrac{2}{(s+1)^3}$

b) $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2+1}$

c) $f(t) = e^{2t}\cosh 3t$

d) $f(t) = \sin(t-2)h(t-2)$

e) $F(s) = \dfrac{1}{(s+3)^2+1} - \dfrac{s}{(s+3)^2+4}$

f) $F(s) = \dfrac{e^{-as}}{s}$

$\boxed{2}$

b) $F(s) = \frac{k}{s} - \frac{k}{s}e^{-s} + e^{2s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Seksjon 9.4

1

b) $f(t) = e^{2t} - e^t$

2

a) $f(t) = te^t$

b) $f(t) = (1/\omega^2)(1 - \cos\omega t)$

c) $f(t) = 1 - \cos t$

d) $F(t) = (1/2\omega)(t \sin\omega t)$

Seksjon 9.5

1

a) e^{49}

2

b) Diracs deltafunksjon $\delta(t-a)$ spiller rollen som den "deriverte" av heavisidefunksjonen $h(t-a)$. Dette er naturlig, fordi det betyr at $h'(t-a) = 0$ for alle $t \neq a$, mens $h(t-a)$ har derivert "uendelig" i punktet der den hopper opp fra 0 til 1.

3

b) $f(t) = (t-a) \cdot h(t-a)$. Dette er en fornuftig "antiderivert" av heavisidefunksjonen $h(t-a)$. Stigningsttallet hopper fra 0 til 1 der hvor $h(t-a)$ hopper fra 0 til 1. Med andre ord oppfører $\delta(x-a)$seg som en "andrederivert" av $f(t) = (t-a)h(t-a)$.

4 $f(t) = e^{3t} - e^{2t}$

5 $f(t) = e^{3t} - e^{2t}$

6 Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)$$

Ved linearitet av invers laplactransformasjon gir dette

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$$

7 $\mathcal{L}\{h(t-17)\} = \dfrac{e^{-17s}}{s}$

8

a) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$

d) Sett opp definisjonen av $\mathcal{L}\{t^a\}$ og substituer $u = st$. Det gir

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty u^a e^{-u}\, du$$

Bruk så delvis integrasjon, og husk at $a \cdot \Gamma(a) = \Gamma(a+1)$.

9

b) Dette er en teknikk som er effektiv for funksjoner med delt funksjonsforskrift. Leddet $5 \cdot h(t-\pi)$ gir funksjonsverdi 5 fra og med $x = \pi$. Leddet $-5 \cdot h(t-2\pi)$ nuller dette ut fra og med $x = \pi$. Der slår funksjonsverdien $5\cos t$ inn, via leddet $5\cos(t-2\pi) \cdot h(t-2)$. Grunnen til at det siste leddet er skrevet slik istedenfor bare $5\cos t \cdot h(t-2)$, er tilrettelegging for å bruke teoremet om t-forskyvning i neste delpunkt. Vi kan gjøre dette fordi cosinus er periodisk med periode 2π

c) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5e^{-\pi s}}{s} - \frac{5e^{-2\pi s}}{s} + \frac{5se^{-2\pi s}}{s^2+1}$

11 Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)$$

Ved linearitet av invers laplactransformasjon gir dette

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$$

12

b) Dette følger fra teoremet om t-forskyving i seksjon 15.3

c) Dette følger fra teoremet om t-forskyving i seksjon 9.3 kombinert med induksjon

e) Bruk formelen for sum av en geometrisk rekke

Seksjon 9.6

1

b) Vi får

$$S_f^7(x) = \frac{B}{2} + \frac{2B}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{2}\right]$$

Tilnærmingen S_f^3 fås ved å fjerne de to siste leddene fra hakeparentesen i S_f^7.

2

a) Nøkkelen til disse er summeformler for sinus og cosinus og kombinasjoner av dem. Her kan du bruke

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u+v) - \sin(u-v)]$$

Dette gjør at integranden blir en sum av to odde funksjoner (altså funksjoner som oppfyller $f(-x) = -f(x)$), så integralet over $[-L, L]$ blir 0.

b) Hint: Til det siste integralet kan du bruke at $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$, som fås ved å vrenge formelen for $\cos 2u$. Det fins et tilsvarende triks for det første.

$\boxed{3}$

a) Dette følger fra kommutativitet av multiplikasjon, uten at vi trenger å trekke inn integrasjonsteori

b) Dette (og neste delpunkt) følger fordi linearitet av integralet gjelder også når vi har med stykkevis kontinuerlige funksjoner å gjøre. For å vise dette, del opp $[-L, L]$ i delintervaller der både f og g er kontinuerlige. Dette lar seg gjøre, fordi de per definisjon av stykkevis funksjon har høyst et endelig antall diskontiuiteter hver.

d) Eksistensen av c og ε følger fra stykkevis kontinuitet av f. Siden f^2 er ikke-negativ, medfører dette at integralet av f^2 er større enn $c\varepsilon$.

e) Fra c) følger at funksjoner som har en funksjonsverdi ulik 0 på $[-L, L]$, ikke kan oppfylle $\langle f, f \rangle = 0$. Altså er nullfunksjonen den eneste funksjonen som oppfyller dette, og I4 er verifisert.

Seksjon 9.7

$\boxed{1}$

a) Sett inn i uttrykkene for c_n

Seksjon 9.8

$\boxed{1}$ Vi får $c_0 = \frac{1}{3}\pi^2$, $a_n = (-1)^n(4/n^2)$ og $b_n = 0$ for $n > 0$ (reelle koeffisienter). Dette gir fourierekken

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4\cos nx}{n^2}$$

$\boxed{2}$ $S_f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi n}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n}\cos(2\pi n x) - \sin(2\pi n x)\right]$

Seksjon 9.9

$\boxed{1}$ Bruk teoremet om fouriertransformasjon av deriverte på $f'(x)$.

2

a) Direkte utregning for $\omega = 0$ gir $\mathcal{F}\{f\}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$. For $\omega \neq 0$ kan du bruke vanlig integrasjonsteknikk.

b) Vi har

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

for $s \neq 0$. Direkte utregning for $s = 0$ gir $\mathcal{L}\{f\}(0) = 1$.

c) Hint: Husk å sjekke $\omega = 0$ spesielt.

Seksjon 9.10

1

a) $\lambda = 0$ gir $\phi(x) = \alpha x + \beta$, en lineær funksjon. Randbetingelsene $\phi(0) = \phi(L) = 0$ gir da $\alpha = \beta = 0$, så vi ender opp med nullfunksjonen. Den bidrar ikke i en kombinert løsning, og pga. forutsetningen om at startfordelingen $f(x)$ ikke er identisk lik 0 er nullfunksjonen heller ikke en løsning i seg selv.

b) For $lambda < 0$, altså $-\lambda > 0$, kan løsningene av (8) skrives som en lineærkombinasjon

$$\phi(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\, x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$

jamfør kapitlet om differensialligninger i bind I. Et lite regnestykke viser at ingen slik funksjon kan tilfredstille begge randbetingelsene, hvis da ikke $A = B = 0$.

2 Her kan vi ha en konstantløsning som ikke er null. Løsningen kan skrives

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

Seksjon 9.11

1

a) $F(s) = \dfrac{1}{s - ik}$

b) Dette er fordi $e^{i\omega} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ og laplacetransformasjonen er lineær

c) Hint: Multipliser med $s + ik$ oppe og nede på brøken

Utfyllende stoff

Seksjon 1.4

2

a) $B = \{(1/\sqrt{2})[1, i], (1/\sqrt{2})[1, -i]\}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$

Seksjon 2.1

1

d) Hint: Etter substitusjonen kan du skrive

$$\Psi(x, t) = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma^2 + i\hbar t/2m)u^2 + i(x - p_0 t/m)u}\, du$$

der

$$K = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi^3}\right)^{1/4} e^{i(p_0 x - (p_0^2/2m)t)/\hbar}$$

Bruk så integralformelen fra b) med $A = \sigma^2 + i\hbar t/2m$ og $B = i(x - p_0 t/m)$.

2

b) Sett $k = m + 1$ for å få det som trengs i beviset

Seksjon 3.7

1 Gitt en vilkårlig åpen overdekning O av A. For hvert punkt $\mathbf{x} \in A$ fins da et åpent rektangel $R_{\mathbf{x}}$ med sentrum i $\mathbf{x}$ slik at $R_{\mathbf{x}}$ er inneholdt i en mengde $O_{\mathbf{x}}$ fra O. Mengden av alle rektangler $R\mathbf{x}$ der $\mathbf{x}$ gjennomløper A er en åpen overdekning O' av A, og ved antakelsen inneholder O' et endelig utvalg $O'_{\mathbf{x}_1}, \ldots, O'_{\mathbf{x}_m}$ som også dekker A. Da er $O_{\mathbf{x}_1}, \ldots, O_{\mathbf{x}_m}$ en åpen overdekning av A.