Oppgaveløsninger for "Matematikk for økonomer - kort og godt".

Kapittel 1

Oppgave 1.1 a) $(x^2 - 9x - 12)(3 - 3x) = 3x^2 - 27x - 36 - 3x^3 + 27x^2 + 36x = -3x^3 + 30x^2 + 9x - 36.$

b) $(2x-y)^2+2(x+y)(x-y)+(x+4y)^2 = 4x^2-4xy+y^2+2(x^2-y^2)+x^2+8xy+16y^2$
$= 5x^2 + 4xy + 17y^2 + 2x^2 - 2y^2 = 7x^2 + 4xy + 15y^2$

Oppgave 1.2 a) i) $4.8 \cdot 10^{11} = 480\,000\,000\,000$ $\quad 3.01 \cdot 10^{-6} = 0.00000301$

b) $\dfrac{(2a^2)^3\, b^{-1}}{2a^3b^{-2}} \cdot a^{-5}b^{-1} = \dfrac{2^3a^6b^{-1} \cdot a^{-5}b^{-1}}{2a^3b^{-2}} = \dfrac{2^{3-1}a^{6-5}b^{-1-1}}{a^3b^{-2}} = 4a^{1-3}b^{-2-(-2)}$
$= 4a^{-2}b^0 = \dfrac{4}{a^2}$

c) Økning i prosent: $\dfrac{(6.02 - 5.6)}{5.6} \cdot 100\% = 7.5\%.$

Lønnsutgifter 2008: $6.02 \cdot 1.075 = 6.4715$ millioner.

Oppgave 1.3 a)

$$\begin{aligned}
4(2x-3) - (x-1) &= 4(x-2) - 3(x-2) \\
8x - 12 - x + 1 &= 4x - 8 - 3x + 6 \\
8x - x - 4x + 3x &= -8 + 6 + 12 - 1 \\
6x &= 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{6} = 1.5
\end{aligned}$$

b) $5\,x - \dfrac{11}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 11 = 0 \Leftrightarrow 5\,x^3 = 11 \Leftrightarrow x^3 = \frac{11}{5} = 2.2$
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2.2} = 1.30$

c) $7 - x + \sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = x - 7$

Vi opphøyer i andre på begge sider av likhetstegnet:

$2x+1=(x-7)^2 \Leftrightarrow 2x+1=x^2-14x+49 \Leftrightarrow -x^2+16x-48=0$

Andregradsligningen har løsninger $x=4$ og $x=12$. Vi må sette prøve:

$x=4$ gir: $7-4+\sqrt{9}=3+3=6$, så $x=4$ er ikke en løsning.

$x=12$ gir: $7-12+\sqrt{25}=-5+5=0$, så løsningen er $x=12$.

Oppgave 1.4

a)

$9x-18y=18$
$2x+5y=36$

Ganger ligning I med 2 og ligning II med -9, og legger sammen I+II:

$$\begin{aligned} 18x-36y&=36 \\ -18x-45y&=-324 \end{aligned} \qquad -81y=-288 \Leftrightarrow y=\tfrac{-288}{-81}=\tfrac{32}{9}.$$

$x=\dfrac{36-5\cdot\frac{32}{9}}{2}=\frac{164}{18}=\frac{82}{9}$. Løsning: $(x,y)=\left(\frac{82}{9},\frac{32}{9}\right)$.

b) $\begin{array}{l} xy-3x=0 \\ x-2y^2=0 \end{array}$. Ligning II gir $x=2\,y^2$. Settes inn i I : $2y^2\cdot y-3\cdot 2y^2=0$.

$\Leftrightarrow 2y^2(y-3)=0$. Løser ved faktorisering: $2y^2=0$ eller $y-3=0$.

Løsninger: $y=0, y=3$.

$y=0$ gir $x=2\cdot 0^2=0$. $y=3$ gir $x=2\cdot 3^2=18$. Løsninger $(0,0)$ og $(18,3)$.

Oppgave 1.5

a) $\dfrac{2}{x-2}-4x+2=\dfrac{2-4x(x-2)+2(x-2)}{x-2}$
$=\dfrac{2-4x^2+8x+2x-4}{x-2}=\dfrac{-4x^2+10x-2}{x-2}$

b) $\dfrac{8}{x-8}-\dfrac{5}{x+5}=\dfrac{8(x+5)-5(x-8)}{(x+5)(x-8)}=\dfrac{8x+40-5x+40}{(x+5)(x-8)}=\dfrac{3x+80}{(x+5)(x-8)}$

c) $\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2x-1}{x^2+x}=\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2x-1}{x(x+1)}$
$=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)x}-\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2-2x^2+x+2x-1}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{-x^2+3x-1}{x(x^2-1)}$

Oppgave 1.6 a) $\dfrac{2x-4}{6x^2-12x} = \dfrac{2(x-2)}{6x(x-2)} = \dfrac{1}{3x}$

b) $\dfrac{3x+3}{x^3+2x^2+x} = \dfrac{3(x+1)}{x(x^2+2x+1)} = \dfrac{3(x+1)}{x(x+1)^2} = \dfrac{3}{x(x+1)} = \dfrac{3}{x^2+x}$

Oppgave 1.7 a) $0.5\,x^2 + 8x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -18$ (kalkulator eller $abc-$formel).

$1.5\,x^2 - 7.5\,x - 54 = 0.5(x-2)(x+18)$

b) $2\,x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$2\,x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$

c) $-0.1\,x^2 + 1.5\,x - 6 = 0$ har ingen løsning. Uttrykket lar seg ikke faktorisere.

Oppgave 1.8 a) $0.5\,x^2 + 8x - 18 > 0 \Leftrightarrow 0.5(x-2)(x+18) > 0$

Vi setter faktorene $0.5, (x-2)$ og $(x+18)$ inn i et fortegnsskjema.

0.5 er positiv uansett verdi av x. $x+18$ er negativ for $x < -18$ og positiv for $x > -18$.

$x-2$ er negativ for $x < 2$ og positiv for $x > 2$.

For $x < -18$ har vi en positiv og to negative faktorer, og produktet blir da positivt.

For $-18 < x < 2$ har vi to positive og en negativ faktor, og produktet blir da negativt.

For $x > 2$ har vi tre positive faktorer, og produktet blir da positivt.

$0.5(x+18)(x-2) > 0$ for $x < -18$ og for $x > 2$.

b) $\dfrac{x+2}{x-2} \geqq 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+2-2(x-2)}{x-2} \geqq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2-2x+4}{x-2} \geqq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+6}{x-2} \geqq 0$

$-x+6$ er positiv for $x < 6$ og negativ for $x > 6$.

$x-2$ er negativ for $x < 2$ og positiv for $x > 2$.

For $x < 2$ har vi positiv teller og negativ nevner, og brøken er negativ.

For $2 < x < 6$ er både teller og nevner positiv, og brøken er positiv.

For $x > 6$ er teller negativ og nevner positiv, og brøken er negativ.

$x \neq 2$ fordi nevneren ikke kan være 0.

Ulikheten er derfor oppfylt for $2 < x \leqq 6$.

Oppgave 1.9 La x være antall aksjer i A og y antall aksjer i B

$110x + 160y = 52200$

Ny pris på aksjer i A: $110 \cdot \frac{150}{100} = 165$. Ny pris på aksjer i B: $160 \cdot 2 = 320$.

$165x + 320y = 83500$

$110x + 160y = 52200$. Ganger ligning I med -2 og tar I+II:

$165x + 320y = 83500$

$-220x - 320y = -104400$

$165x + 320y = 83500$

$-55x = -20900 \Leftrightarrow x = \frac{-20900}{-55} = 380.$

$y = \frac{52200 - 110 \cdot 380}{160} = 65.$

Oppgave 1.10 a) $4ax - 1 = x \Leftrightarrow 4ax - x = 1 \Leftrightarrow x(4a-1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4a-1}$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$. Ganger med fellesnevner abx :

$\dfrac{abx}{x} + \dfrac{abx}{a} = \dfrac{abx}{b} \Leftrightarrow ab + bx = ax \Leftrightarrow bx - ax = -ab \Leftrightarrow x(b-a) = -ab$

$\Leftrightarrow x = \frac{-ab}{b-a} = \frac{ab}{a-b}$

Oppgave 1.11 a) $(x - (-2))^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25.$

$(1+2)^2 + (7-3)^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$ $(1,7)$ ligger på sirkelen.

$(6+2)^2 + (6-3)^2 = 8^2 + 3^2 = 73 \neq 25.$ $(6,6)$ ligger ikke på sirkelen.

b) $x^2 - 10x + y^2 - 5y = 11.$

Skal fram til: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^{2.}$

Sammenligner med $(x-m)^2 = x^2 - 2mx + m^2$. Da må $2m = 10 \Leftrightarrow m = 5.$

Legger til $m^2 = 5^2 = 25$ på begge sider:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 5y = 11 + 25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 - 5y = 36.$

Sammenligner med $(y-n)^2 = y^2 - 2ny + n^2$. Da må: $2n = 5 \Leftrightarrow n = 2.5.$

Legger til $n^2 = 2.5^2 = 6.25$ på begge sider:

$(x-5)^2 + y^2 - 5y + 6.25 = 36 + 6.25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-2.5)^2 = 42.25.$

Sirkel med sentrum i (5, 2.5) og radius $r = \sqrt{42.25} = 6.5$.

Kapittel 2

Oppgave 2.1 $f(x) = 2.5\,x - 3$. $f(3) = 2.5 \cdot 3 - 3 = 4.5$. $f(8) = 2.5 \cdot 8 - 3 = 17.$.

Funksjonen er av form $y = ax + b$, så grafen er en rett linje.

Grafen skjærer $y-$aksen i $f(0) = -3$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2.5\,x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2.5} = 1.2$. Grafen skjærer altså $x-$aksen i $x = 1.2$.

$2.5\ x - 3 = 8.5 \Leftrightarrow 2.5\,x = 11.5 \Leftrightarrow x = \frac{11.5}{2.5} = 4.6$.

a) i) Ettpunktsformelen: $y - 0 = -3.5(x - 10) \Leftrightarrow y = -3.5\,x + 35$.

ii) $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5 - (-2)}{10 - 1} = \dfrac{7}{9}$

Ettpunktformelen: $y - (-2) = \dfrac{7}{9}(x - 1) \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{9}x - \dfrac{7}{9} - 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{9}x - \dfrac{25}{9}$.

b) $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-4 - 2}{3 - 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$

Ettpunktsformelen: $y - 2 = -3(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 3 + 2 \Leftrightarrow y = -3x + 5$.

$x - y = 7 \Leftrightarrow -y = 7 - x \Leftrightarrow y = x - 7$.

Finne skjæring: $-3x + 5 = x - 7 \Leftrightarrow -4\,x = -12 \Leftrightarrow x = \frac{-12}{-4} = 3$.

$y = -3 \cdot 3 + 5 = -4$. Skjæringspunktet er $(3, -4)$.

Oppgave 2.2 Det året utstyret ble kjøpt: $t = 0$. Da er verdien av utstyret $y = 250\,000$ kr.

10 år senere: $t = 10$. Verdien av utstyret $y = 70\,000$ kr.

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{70\,000 - 250\,000}{10 - 0} = \dfrac{-180\,000}{10} = -18\,000.$

Ettpunktformelen: $y - 250\,000 = -18\,000(t - 0) \Leftrightarrow y = -18\,000\,t + 250\,000$.

Verdien 6 år etter at utstyret ble kjøpt inn: $y = -18000 \cdot 6 + 250\,000 = 142\,000$.

Oppgave 2.3 $\quad y = f(x) = 2.7\,x^2 - 297\,x + 7805.$

$f(25) = 2.7 \cdot 25^2 - 297 \cdot 25 + 7805 = 2067.5.$

$f(70) = 2.7 \cdot 70^2 - 297 \cdot 70 + 7805 = 245.$

$2.7\,x^2 - 297\,x + 7805 = 0 \Leftrightarrow x = 66.59,\ x = 43.41.$

Minimumspunkt for $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-297)}{2 \cdot 2.7} = \dfrac{297}{5.4} = 55.$

Minimumsverdi: $y = f(55) = -362.5$

Oppgave 2.4

a) $3x^3 - 17x^2 + 29x - 36 : x - 4 = 3x^2 - 5x + 9$

$$
\begin{array}{l}
-(\underline{3x^3 - 12x^2}) \\
\qquad\qquad -5x^2 + 29x - 36 \\
\qquad\quad - \underline{(-5x^2 + 20x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 9x - 36 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{9x - 36} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{0}
\end{array}
$$

b) $-3x^3 + 8.5\,x^2 \qquad -2 : 2x + 1 = -1.5\,x^2 + 5x - 2.5$

$$
\begin{array}{l}
-\underline{(-3x^3 - 1.5\,x^2)} \\
\qquad\qquad 10x^2 \qquad\qquad -2 \\
\qquad\quad -\underline{(10x^2 + 5x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -5x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad -\underline{(-5x - 2.5)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \text{Rest} \qquad \underline{0.5}
\end{array}
$$

c) i) $\quad (x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 3x - 18) : (x + 2).$

$P(-2) = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 + 6(-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 18 = 16 - 16 + 24 - 6 - 18 = 0.$

Divisjonen går opp fordi $P(-2) = 0.$

ii) $(1.5\,x^3 - 8x^2 - 3x - 12) : (x - 6).$

$P(6) = 1.5 \cdot 6^3 - 8 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 - 12 = 6.$

Divisjonen går ikke opp fordi $P(6) \neq 0$.

Oppgave 2.5 Inntektsfunksjonen er $I(x) = 1650x$.

Profittfunksjonen er da $P(x) = I(x) - K(x) = 1650x - (2.2\,x^2 + 638x + 36960)$

$= 1650x - 2.2\,x^2 - 638x - 36960 = -2.2\,x^2 + 1012x - 36960$.

Faktorisere profittfunksjonen: Setter $P(x) = 0 \Leftrightarrow -2.2\,x^2 + 1012x - 36960 = 0$

$\Leftrightarrow x = 40, x = 420$. Faktoriseringen blir da:

$P(x) = -2.2(x - 40)(x - 420)$.

Vi setter faktorene inn i et fortegnsskjema:. -2.2 er alltid negativ. $x-40$ er negativ for $x < 40$ og positiv for $x > 40$. $x-420$ er negativ for $x < 420$ og positiv for $x > 420$.

Når $x < 40$, har vi tre negative faktorer, og produktet er negativt. For $x \in \langle 40, 420\rangle$ har vi to negative og 1 positiv faktor, og produktet blir da positivt. Når $x > 420$, har vi 1 negativ og to positive faktorer, og produktet er negativt.

$P(x)$ er altså positiv for $x \in \langle 40, 420\rangle$, dvs. det blir overskudd når x ligger i dette intervallet.

Maksimalt overskudd når $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1012}{2 \cdot (-2.2)} = \dfrac{-1012}{-4.4} = 230$.

Det maksimale overskuddet er da $P(230) = -2.2 \cdot 230^2 + 1012 \cdot 230 - 36960 = 79420$.

Oppgave 2.6 a) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{2x + 2}$.

$f(0) = \dfrac{-3}{2} = -1.5$. $\quad f(-3 = \dfrac{5 \cdot (-3) - 3}{2 \cdot (-3) + 2} = \dfrac{-18}{-4} = 4.5$.

Finne vertikal asymptote: $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

Telleren er ikke 0 for $x = -1$. Vi får da en vertikal asymptote $x = -1$.

Finne horisontal asymptote: $y = \dfrac{5x - 3}{2x + 2} = \dfrac{\frac{5x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{2}{x}} = \dfrac{5 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{2}{x}} \to \dfrac{5}{2}$ når $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.

Horisontal asymptote: $y = 2.5$.

b) $\dfrac{5x - 3}{2x + 2} = 2.4 \Leftrightarrow 5x - 3 = 2.4(2x + 2) \Leftrightarrow 5x - 3 = 4.8\,x + 4.8 \Leftrightarrow 0.2\,x = 7.8$

$\Leftrightarrow x = \frac{7.8}{0.2} = 39$.

$$\frac{5x-3}{2x+2}=0 \Leftrightarrow 5x-3=0 \Leftrightarrow x=\tfrac{3}{5}=0.6.$$

Oppgave 2.7 a) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

$x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4$, ikke løsbar. Det fins ingen vertikal asymptote.

$y=\dfrac{4x}{x^2+4}=\dfrac{\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\dfrac{\frac{4}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}\to 0$ når $x\to\infty$ eller $x\to-\infty$.

$\Rightarrow$Horisontal asymptote: $y=0$.

b)
$$\begin{array}{lll}
1.5\,x^2+7x-60 : x-6 = 1.5\,x+16 & & \\
-\underline{(1.5x^2-9x)} & & \\
\quad 16x-60 & & \\
\quad -\underline{(16x-96)} & & \\
\text{Rest:} \quad \underline{36.} & &
\end{array}$$

$$g(x)=\frac{1.5\,x^2+7x-60}{x-6}=1.5\,x+16+\frac{36}{x-6}.$$

Vertikal asymptote i punktet der nevneren er 0, dvs vertikal asymptote: $x=6$.

Når $x\to\infty$ eller $x\to-\infty$, vil $\dfrac{36}{x-6}\to 0$. Funksjonen har da en skråasymptote $y=1.5\,x+16$.

Kapittel 3

Oppgave 3.1 a) $f(x)=-1.3\,x+5 \Rightarrow f'(x)=-1.3$

b) $f(x)=-0.8\,x^2-27x+80 \Rightarrow f'(x)=-0.8\cdot 2x+27=-1.6\,x+27$

c) $f(x)=0.81\,x^3+20 \Rightarrow f'(x)=0.81\cdot 3x^2=2.43\,x^2$

d) $f(x)=2.9\,x^3-15x^2+215x+390$

$f'(x)=2.9\cdot 3x^2-15\cdot 2x+215=8.7\,x^2-30x+215.$

e) $f(x)=40(100x^2-2x^5-5000)$

$f'(x)=40(100\cdot 2x-2\cdot 5x^4)=40(200x-10x^4)=8000x-400x^4.$

f) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-8\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x^3}{4}-8\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=x^3-\dfrac{4}{\sqrt{x}}$

g) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{6} \cdot 2x + \frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} + \frac{4}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{x^3}{8} + \frac{8}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{8} + \frac{0 - 8 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{3x^2}{8} - \frac{24}{x^4}$

Oppgave 3.2 a) $f(x) = x^4 - 3.5\,x^3 - 26x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3.5 \cdot 3x^2 - 26 \cdot 2x$

$= 4x^3 - 10.5\,x^2 - 52x$

b) $f(x) = \frac{2x+5}{2x-5} \Rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{2(2x-5) - (2x+5) \cdot 2}{(2x-5)^2}$

$= \frac{4x - 10 - 4x - 10}{(2x-5)^2} = \frac{-20}{(2x-5)^2}$

c) $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 5}{x+1}. \;\Rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$= \frac{(6x-4)(x+1) - (3x^2 - 4x - 5) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{6x^2 - 4x + 6x - 4 - 3x^2 + 4x + 5}{(x+1)^2}$

$= \frac{3x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 19} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+19}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+19}}$

e) $f(x) = 5(1 - 2x^2)^3 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 3u^2 \cdot u' = 15(1 - 2x^2)^2 \cdot (-4x)$

$= -60x(1 - 2x^2)^2$

f) $f(x) = \frac{1 - 5x}{(1 + 10x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$= \frac{-5(1+10x)^2 - (1-5x) \cdot 2(1+10x) \cdot 10}{(1+10x)^4} = \frac{-5(1+10x) - 20(1-5x)}{(1+10x)^3}$

$= \frac{-5 - 50x - 20 + 100x}{(1+10x)^3} = \frac{50x - 25}{(1+10x)^3}$

g) $f(x) = \frac{4}{(x^2+4)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{0 - 4 \cdot 3(x^2+4)^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^6}$

$= \frac{-24x}{(x^2+4)^4}$

h) $f(x) = 4x \cdot (x^3 + 2)^2 \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 4(x^3+2)^2 + 4x \cdot 2(x^3+2) \cdot 3x^2$

$= 4(x^3+2)(x^3 + 2 + 6x^3) = 4(x^3+2)(7x^3+2) = 28x^6 + 64x^3 + 16.$

i) $f(x) = \frac{5x+2}{3x^2 + 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$= \frac{5(3x^2 + 2x + 1) - (5x+2) \cdot (6x+2)}{\left(3x^2+2x+1\right)^2} = \frac{15x^2 + 10x + 5 - 30x^2 - 12x - 10x - 4}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}$

$= \dfrac{-15x^2 - 12x + 1}{\left(3x^2 + 2x + 1\right)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{2x^2}{(6x-3)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \dfrac{4x(6x-3)^2 - 2x^2 \cdot 2(6x-3) \cdot 6}{(6x-3)^4}$

$= \dfrac{4x(6x-3) - 24x^2}{(6x-3)^3} = \dfrac{24x^2 - 12x - 24x^2}{(6x-3)^3} = \dfrac{-12x}{(6x-3)^3} = \dfrac{-4x}{9(2x-1)^3}$

Oppgave 3.3 $P(x) = 1.5\,x^3 - 7.5\,x^2 + 12x + 10$

$P'(x) = 1.5 \cdot 3x^2 - 7.5 \cdot 2x + 12 = 4.5\,x^2 - 15x + 12.$

$P'(8) = 4.5 \cdot 8^2 - 15 \cdot 8 + 12 = 180.$

$P(8) = 1.5 \cdot 8^3 - 7.5 \cdot 8^2 + 12 \cdot 8 - 10 = 374.$

Tangentligningen: $y - P(8) = P'(8)(x-8) \Leftrightarrow y - 374 = 180(x-8)$

$\Leftrightarrow y = 180x - 1440 + 374 \Leftrightarrow y = 180x - 1066.$

Veksthastigheten til funksjonen i et punkt måles ved å ta den deriverte i punktet.

$P'(12) = 4.5 \cdot 12^2 - 15 \cdot 12 + 12 = 480.$

Oppgave 3.4 a) $g(x) = -\dfrac{1}{4}\,x^3 + 5x^2 + 17x + 250$

$g(8) = -0.25 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 17 \cdot 8 + 250 = 578.$

Bestanden består av 578 dyr etter 8 år.

Økning over intervallet $[8, 12]$: $g(12) - g(8) = 742 - 578 = 164$ dyr.

Gjennomsnittlig økning pr år: $\dfrac{g(12) - g(8)}{12 - 8} = \dfrac{164}{4} = 41$ dyr.

b) $g'(x) = -\dfrac{1}{4} \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x + 17 = -0.75\,x^2 + 10x + 17.$

Veksten til bestanden i det 8. året: $g'(8) = -0.75 \cdot 8^2 + 10 \cdot 8 + 17 = 49$ dyr.

$g'(x) = -46 \Leftrightarrow -0.75\,x^2 + 10x + 17 = -46 \Leftrightarrow -0.75\,x^2 + 10x + 63 = 0.$

Løsninger av andregradsligningen: $x = -4.66, x = 18$. Bare $x = 18$ ligger i intervallet $[0, 20]$.

Bestanden avtar med 46 dyr i det 18. året.

c) $g(14) = 782.\, g'(14) = 10.$

Tangentligningen: $y - g(14) = g'(14)(x - 14) \Leftrightarrow y - 782 = 10(x - 14)$

$\Leftrightarrow y = 10x - 140 + 782 \Leftrightarrow y = 10x + 642.$

Oppgave 3.5 a) Grensekostnaden: $K'(x) = 0.08 \cdot 3x^2 - 1.5 \cdot 2x + 25 = 0.24\,x^2 - 3x + 25.$

Kostnadene ved å produsere 35 enheter av varen:

$K(35) = 0.08 \cdot 35^3 - 1.5 \cdot 35^2 + 25 \cdot 35 + 1800 = 4267.5.$

$K'(35) = 0.24 \cdot 35^2 - 3 \cdot 35^2 + 25 = 214.$ Kostnadene vokser med 214 kroner.

$\Delta K = K(36) - K(35) = 4488.48 - 4267.5 = 220.98.$

Vi ser at ΔK er tilnærmet lik $K'(35)$.

b) $K'(x) = 586 \Leftrightarrow 0.24\,x^2 - 3x + 25 = 586 \Leftrightarrow 0.24\,x^2 - 3x - 561 = 0$

Andregradsligningen har løsninger $x = 55$ og $x = -42.5$. Bare den positive løsningen $x = 55$ er aktuell her.

$y-$koordinaten til punktet: $K(55) = 11947.5.$

Grensekostnaden er 586 i punktet (55, 11947.5).

Oppgave 3.6 a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{5}{x^3} = 2x^{-2} - 5x^{-3} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (-2)x^{-3} - 5(-3)x^{-4} = \dfrac{-4}{x^3} + \dfrac{15}{x^4}.$

$f''(x) = -4 \cdot (-3)x^{-4} + 15 \cdot (-4)x^{-5} = 12x^{-4} - 60x^{-5} = \dfrac{12}{x^4} - \dfrac{60}{x^5}.$

b) $g(x) = 3(2-3x)^3 \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot 3u^2 \cdot u' = 9(2-3x)^2 \cdot (-3) = -27(2-3x)^2.$

$g''(x) = -27 \cdot 2u \cdot u' = -54(2-3x) \cdot (-3) = 162(2-3x) = 324 - 486x.$

Oppgave 3.7 1 a) $f(x) = 0.016\,x^3 - 0.72\,x^2 + 9.6\,x + 70$

$f'(x) = 0.016 \cdot 3x^2 - 0.72 \cdot 2x + 9,6 = 0.048\,x^2 - 1.44x + 9.6.$

$f''(x) = 0.048 \cdot 2x - 1.44 = 0.096\,x - 1.44.$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0.048\,x^2 - 1.44x + 9.6 = 0$

Andregradsligningen har løsninger $x = 10,\ x = 20.$

Førstederiverttest: Faktoriserer først $f'(x)$.

$f'(x) = 0.048(x-10)(x-20)$. Setter inn i fortegnsskjema for $f'(x)$.

0.048 er alltid positiv. $x - 10$ er negativ for $x < 10$, positiv for $x > 10$. $x - 20$ er negativ for $x < 20$, positiv for $x > 20$.

For $x < 10$ vil to negative faktorer gi pluss, og for $10 < x < 20$ vil 1 negativ faktor gi minus. $x = 10$ gir da et lokalt maksimum.

$\Rightarrow$ Lokalt maksimumspunkt: $x = 10$, $y = f(10) = 110$.

For $10 < x < 20$ er $f'(x) < 0$, og for $x > 20$ vil $f'(x) > 0$. $x = 20$ gir da lokalt minimum.

$\Rightarrow$ Lokalt minimumspunkt $x = 20,\ y = f(20) = 102$.

c) I tillegg til lokale ekstremalverdier fra b), må vi også sjekke endepunktene.

$f(1) = 78.896 \approx 79$. $f(30) = 142$. $f(10) = 110$. $f(20) = 102$.

Største aksjepris er da $f(30) = 142$. Minste aksjepris $f(1) \approx 79$.

Oppgave 3.8 a) $f(x) = 0.45\,x^2 - 63x + 1800$.

$f'(x) = 0.45 \cdot 2x - 63 = 0.9\,x - 63$.

$f'(x) = 0.9\,x - 63 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{63}{0.9} = 70$.

Førstederiverttest: $f'(x) = 0.9(x-70)$. $f'(x)$ har da samme fortegnsvariasjon som $x - 70$, siden 0.9 alltid er positiv. Dette viser at $x = 70$ gir et minimum.

Minimumspunkt: $x = 70,\ y = f(70) = -405$.

På intervallet $[10, 100]:\ f(10) = 1215,\ f(100) = 0$. Sammenligner vi med $y-$verdien i minimumspunktet, får vi at minste verdi på intervallet er $f(70) = -405$, største verdi er $f(10) = 1215$.

b) $g(x) = 0.8\,x + \dfrac{180}{x} \Rightarrow g'(x) = 0.8 - \dfrac{180}{x^2} = \dfrac{0.8\,x^2 - 180}{x^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 0.8 - \dfrac{180}{x^2} = 0 \Rightarrow 0.8\,x^2 - 180 = 0$.

Andregradsligningen har løsninger $x = -15$, $x = 15$.

Førstederiverttest: $g'(x) = \dfrac{0.8\,x^2 - 180}{x^2} = \dfrac{0.8(x+15)(x-15)}{x^2}$.

Setter vi inn 0.8, $x + 15$, $x - 15$, og x^2 inn i et fortegnsskjema, ser vi at $g'(x)$ er positiv for $x < -15$, $g'(x)$ er negativ for $-15 < x < 0$, og negativ for $0 < x < 15$. $g'(x)$ er positiv for $x > 15$.

Dette gir lokalt maks for $x = -15$, $y = g(-15) = -24$. $g(x)$ har et lokalt minimum i $x = 15$, $y = g(15) = 24$.

På intervallet $[10, 100] : g(10) = 26,\ g(15) = 24,\ g(100) = 81.8$. Minst verdi er da $g(15) = 24$, størst verdi er $g(100) = 81.8$.

Oppgave 3.9 a) $f(x) = -8\,x^2 + 40x + 40$. $f'(x) = -8 \cdot 2x + 40 = -16x + 40$.

$f''(x) = -16$.

Finne ekstremalpunkt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-40}{-16} = 2.5$.

Må være maksimum siden $f''(x)$ er negativ, dvs maksimum i $x = 2.5,\ f(2.5) = 90$.

Funksjonen er konkav for alle x siden $f''(x) = -16$, alltid negativ. Ingen vendepunkt.

b) $f(x) = -0.04\,x^3 + 4.38\,x^2 - 151.2\,x + 1200$.

$f'(x) = -0.04 \cdot 3x^2 + 4.38 \cdot 2x - 151.2 = -0.12\,x^2 + 8.76\,x - 151.2$.

$f''(x) = -0.12 \cdot 2x + 8.76 = -0.24\,x + 8.76$.

Finne ekstremalpunkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0.12\,x^2 + 8.76\,x - 151.2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 28,\ x = 45$.

Andrederiverttest: $f''(28) = -0.24 \cdot 28 + 8.76 = 2.04$, positiv, dvs minimum.

Lokalt minimum i $x = 28,\ f(28) = -477.76$.

$f''(45) = -2.04$, negativ, dvs maksimum.

Lokalt maksimum i $x = 45,\ f(45) = -379.5$.

Finne vendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -0.24\,x + 8.76 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-8.76}{-0.24} = 36.5$.

$f''(x) = -0.24(x - 36.5)$. -0.24 er alltid negativ, $x - 36.5$ er negativ for $x < 36.5$, og positiv for $x > 36.5$. Et fortegnsskjema for $f''(x)$ viser da at $f(x)$ er konveks i $\langle \leftarrow, 36.5 \rangle$, og konkav i $\langle 36.5, \rightarrow \rangle$ .Vendepunkt i $x = 36.5,\ f(36.5) = -428.63$.

c) $f(x) = (1 - 0.5x)^3 + 3 = u^3 + 3$. Bruker kjerneregelen.

$f'(x) = 3u^2 \cdot u' = 3(1 - 0.5)^2 \cdot (-0.5) = -1.5(1 - 0.5\,x)^{2.}$

$f''(x) = -1.5 \cdot 2u \cdot u' = -3(1 - 0.5\,x)(-0.5) = 1.5(1 - 0.5\,x).$

Finne ekstremalpunkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1.5(1 - 0.5\,x)^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - 0.5x)^2 = 0 \Rightarrow 1 - 0.5\,x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{-0.5} = 2.$

Men $(1 - 0.5\,x)^2$ er positiv for alle $x \neq 2$, fordi a^2 er positiv for $a \neq 0$. $f'(x) = -1.5(1-0.5\,x)^2$ er derfor negativ på begge sider av $x = 2$, og ifølge førstederiverttesten gir da $x = 2$ ikke noe ekstremalpunkt.

Finne vendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1.5(1 - 0.5\,x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0.5\,x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

$f''(x) = 1.5(1 - 0.5\,x) = -0.75(x - 2)$. Et fortegnsskjema for $f''(x)$ viser da at f er konveks for $x < 2$, og konkav for $x > 2$.

Vendepunkt i $x = 2$, $f(2) = 3$.

Oppgave 3.10 $x = ap + b$. Den rette linjen går gjennom punktene $(20, 12\,000)$ og $(21, 11\,250)$

$a = \dfrac{11250 - 12000}{21 - 20} = -750.$

$12000 = -750 \cdot 20 + b \Rightarrow b = 12000 + 750 \cdot 20 = 27\,000.$

$x = -750p + 27000.$

$I = p \cdot x = -750p^2 + 27000p$. Skal finne maksimum for I.

$I' = -750 \cdot 2p + 27000 = -1500p + 27000.$

$I' = 0 \Leftrightarrow -1500p + 27000 = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{-27\,000}{-1500} = 18.$

Førstederiverttest: $I' = -1500(p - 18)$. I' er da positiv for $p < 18$, og negativ for $p > 18$, så dette er et maksimum.

Størst billettinntekt når det koster 18 kr pr billett. Den maksimale inntekten er $I(18) = -750 \cdot 18^2 + 27000 \cdot 18 = 243\,000.$

Oppgave 3.11 a) $f(x) = 1.3\,x^3 - 76.05\,x^2 + 1365x + 5000$

$f'(x) = 1.3 \cdot 3x^2 - 76.05 \cdot 2x + 1365 = 3.9\,x^2 - 152.1\,x + 1365.$

$f''(x) = 3.9 \cdot 2x - 152.1 = 7.8\,x - 152.1.$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3.9\,x^2 - 152.1\,x + 1365 = 0 \Leftrightarrow x = 25,\ x = 14.$

Andrederiverttest: $f''(14) = 7.8 \cdot 14 - 152.1 = -42.9$, negativ, dvs lokalt maksimum.

$\Rightarrow$Lokalt maksimum i $x = 14,\ f(14) = 1.3 \cdot 14^3 - 76.05 \cdot 14^2 + 1365 \cdot 14 + 5000 = 12771.4 \approx 12771.$.

Andrederiverttest: $f''(25) = 7.8 \cdot 25 - 152.1 = 42.9$, positiv, dvs lokalt minimum.

$\Rightarrow$Lokalt minimum i $x = 25,\ f(25) = 1.3 \cdot 25^3 - 76.05 \cdot 25^2 + 1365 \cdot 25 + 5000 = 11906.25 \approx 11906.$

I tillegg til de lokale ekstremalverdiene, må vi også sjekke endepunktene 0 og 30.

$f(14) = 12771,\ f(25) = 11906,\ f(0) = 5000,\ f(30) = 12605.$

Vi ser da at største antall dyr er $f(14) \approx 12771$ dyr.

Minste antall dyr er $f(0) = 5000$.

c) Nedgang/økning måles ved $f'(x)$. Vi skal finne minimum for $f'(x)$. Vi må da sette $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 7.8\,x - 152.1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{152.1}{7.8} = 19.5.$

$f'''(x) = 7.8$, positiv, så dette er et minimum for $f'(x)$. $f'(19.5) = 3.9 \cdot 19.5^2 - 152.1 \cdot 19.5 + 1365 = -117.95 \approx -118.$

Nedgangen er størst etter 19.5 år, og nedgangen er da på ca 118 dyr pr år.

Største verdi for $f'(x)$ må da finnes i et endepunkt av intervallet. $f'(0) = 1365,\ f'(30) = 312.$

Bestanden vokser raskest ved tidspunkt $x = 0$, da øker den med ca 1365 dyr pr år.

Oppgave 3.12 a) $f(x) = 3x + 4 + \dfrac{12}{x+1}$

$f'(x) = 3 + \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = 3 + \dfrac{0 - 12 \cdot 1}{(x+1)^2} = 3 - \dfrac{12}{(x+1)^2}.$

Finne stasjonære punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \dfrac{12}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 3(x+1)^2 - 12 = 0$

$3(x+1)^2 = 12 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\Leftrightarrow x = -1 + 2 = 1,\ x = -1 - 2 = -3$

b) i) $f''(x) = 0 - \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = -\dfrac{0 - 12 \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} = \dfrac{24}{(x+1)^3}.$

Andrederiverttest: $f''(1) = \frac{24}{2^3} = 3$, positiv, så lokalt minimum i $x = 1, f(1) = 13$.

$f''(-3) = \frac{24}{(-2)^3} = -3$, negativ, så lokalt maksimum i $x = -3,\ f(-3) = -11$.

Finne vendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{24}{(x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 24 = 0$, umulig.

Ingen vendepunkt.

Oppgave 3.13 a) $P'(x) = 90 - \left(3 \cdot \sqrt{x} + 3x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 90 - 3\sqrt{x} - 1.5\dfrac{x}{\sqrt{x}}$
$= 90 - 4.5\sqrt{x}$.

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 90 - 4.5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{90}{4.5} = 20 \Rightarrow x = 20^2 = 400$.

Andrederiverttest: $P''(x) = -4.5 \cdot \frac{1}{2.\sqrt{x}} = -\dfrac{2.25}{\sqrt{x}}$, så $P''(400)$ er negativ, dvs dette er maks.$\underline{\partial\partial}$

Bedriften må produsere 400 enheter for å maksimere overskuddet. Det maksimale overskuddet er $P(400) = 11500$.

b) $S(x) = 2x^2 + \dfrac{100}{x} \Rightarrow S'(x) = 2 \cdot 2x - \dfrac{100}{x^2} = 4x - \dfrac{100}{x^2}$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \dfrac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{100}{4} = 25$

$x = \sqrt[3]{25} = 2.92$. Overflaten er da $S(2.92) = 2 \cdot 2.92^2 + \dfrac{100}{2.92} = 51.30$.

Andrederiverttest: $S''(x) = 4 - \dfrac{0 - 100 \cdot 2x}{x^4} = 4 + \dfrac{200}{x^3}$, $S''(2.92) = 12$, positiv, så dette er minimum.

Oppgave 3.14 a) $K(x) = 9\,x^3 - 135x^2 + 700\,x + 11664$.

$K'(x) = 9 \cdot 3x^2 - 135 \cdot 2x + 700 = 27\,x^2 - 270\,x + 700$.

Vi finner minimum for $K'(x)$ ved å sette $K''(x) = 0$.

$K''(x) = 27 \cdot 2x - 270 = 54x - 270$.

$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 54x - 270 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{270}{54} = 5$. Min. verdi: $K'(5) = 25$.

Andrederiverttest: $K'''(x) = 54$, alltid positiv, så minimum.

b) Grensekostnaden i $x = 12 : K'(12) = 27 \cdot 12^2 - 270 \cdot 12 + 700 = 1348$.

$A(x) = \dfrac{K(x)}{x} = \dfrac{9\,x^3 - 135x^2 + 700x + 11664}{x} = 9\,x^2 - 135x + 700 + \dfrac{11664}{x}$.

Enhetskostnaden i $x = 12 : A(12) = 9 \cdot 12^2 - 135 \cdot 12 + 700 + \dfrac{11664}{12} = 1348.$

$A'(x) = 9 \cdot 2x - 135 - \dfrac{11664}{x^2} = 18x - 135 - \dfrac{11664}{x^2}$

c) Finne minimum for $A(x) : A'(x) = 0 \Leftrightarrow 18\,x - 135 - \dfrac{11664}{x^2} = 0$. Ganger med x^2:

$18\,x^3 - 135x^2 - 11664 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ (kalkulator). Merk at vi har fra b) at

$K'(12) = A(12)$, noe som er tegn på at $x = 12$ gir min. for $A(x)$.

Andrederiverttest: $A''(x) = 18 - \dfrac{0 - 11664 \cdot 2x}{x^4} = 18 + \dfrac{23328}{x^3}$.

$A''(12) = 18 + \dfrac{23328}{12^3} = 31.5$, positivt, så minimum for $A(x)$ i $(12, 1348)$.

$K(12) = 16176$. Tangentligning: $y - K(12) = K'(12)(x - 12)$

$\Leftrightarrow y - 16176 = 1348(x - 12) \Leftrightarrow y = 1348\,x$.

(Tangenten går gjennom origo, nok et tegn på at $x = 12$ gir min. for $A(x)$.)

d) Inntektsfunksjonen: $I(x) = 3940x$.

Profittfunksjonen: $P(x) = I(x) - K(x) = 3940x - 9x^3 + 135x^2 - 700x - 11664$

$= -9\,x^3 + 135x^2 + 3240x - 11664$.

Finne maks profitt: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -27\,x^2 + 270x + 3240 = 0 \Leftrightarrow x = -7.0, x = 17.0$.

Bare $x = 17.0$ er aktuell her. Maksimal profitt: $P(17) = 38214$.

(Andrederiverttest: $P''(x) = -54\,x + 270$, $P''(17.0) = -648$, negativ, dvs maks)

Oppgave 3.15 a) Gjennomsnittlig priselastisitet: $\dfrac{\frac{x(90)-x(85)}{x(85)}}{\frac{90-85}{85}} = \dfrac{\frac{5550-5987.5}{5987.5}}{\frac{5}{85}} = -1.24$.

Priselastisiteten: $E = \dfrac{x'(p) \cdot p}{x(p)} = \dfrac{-0.5 \cdot 2p \cdot p}{9600 - 0.5\,p^2} = \dfrac{-\,p^2}{9600 - 0.5\,p^2} = \dfrac{2p^2}{p^2 - 19200}$.

Priselastisiteten i $p = 85 : \dfrac{2 \cdot 85^2}{85^2 - 19200} = -1.2067$.

b) $E < -1 \Leftrightarrow E + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2p^2}{p^2 - 19200} + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2p^2 + p^2 - 19200}{p^2 - 19200}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3p^2 - 19200}{p^2 - 9075} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(p + 80)(p - 80)}{(p + 138.6)(p - 138.6)}$

Lag et fortegnsskjema for intervallet $[0, 138]$: $p + 80$ og $p + 138.6$ er positive i dette intervallet, $p - 138.6$ er negativ i hele dette intervallet, mens $p - 80$ skifter fortegn i $p = 80$. Til sammen gir dette at brøken er positiv i $[0, 80\rangle$ og negativ i $\langle 80, 138]$. Etterspørselen er derfor elastisk i intervallet $\langle 80, 138]$.

Oppgave 3.16 Den prosentvise endringen er tilnærmet gitt ved elastisiteten.

$x(p) = 1260000\,p^{-1.15} \Rightarrow x'(p) = 1260000 \cdot (-1.15)\,p^{-2.15}$

$E = \dfrac{x'(p) \cdot p}{x(p)} = \dfrac{1260000 \cdot (-1.15)\,p^{-2.15} \cdot p}{1260000\,p^{-1.15}} = \dfrac{-1.15\,p^{-1.15}}{p^{-1.15}} = -1.15$

Dvs en nedgang med ca 1.15 %.

Oppgaven kan også løses uten bruk av elastisitet:

$\dfrac{1260000 \cdot (1.01\,p)^{-1.15} - 1260000 \cdot p^{-1.15}}{1260000 \cdot p^{-1.15}} \cdot 100\% = (1.01^{-1.15} - 1) \cdot 100\% = -1.14$ %.

Oppgave 3.17 a) $(x + 2)^2 + y^2 = 100$.

Implisitt derivasjon (og kjerneregelen) gir: $2(x + 2) \cdot 1 + 2y \cdot y' = 0$

$\Leftrightarrow 2y \cdot y' = -2(x + 2) \Leftrightarrow y' = \dfrac{-2(x + 2)}{2y} = \dfrac{-(x + 2)}{y} = \dfrac{-x - 2}{y}$

I (6,6) er $y' = \dfrac{-6 - 2}{6} = \dfrac{-8}{6} = -\dfrac{4}{3}$.

Tangentligning: $y - 6 = -\dfrac{4}{3}(x - 6) \Leftrightarrow y = -\dfrac{4}{3}\,x + 14$.

Oppgave 3.18 a) Tilvekstformelen: $f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Innsatt i tilvekstformelen: $f(21.8) \approx f(21) + f'(21) \cdot (21.8 - 21) = 441 + 12 \cdot 0.8 = 450.6$.

$f(21.8) = \dfrac{147 \cdot 21.8}{\sqrt{2 \cdot 21.8 + 7}} = 450.5039$.

Feil i prosent: $\dfrac{(450.6 - 450.5039)}{450.5039} \cdot 100\% = 0.021$ %.

b) $g(0) = \dfrac{a \cdot 0 - 3}{0 + 2} = \dfrac{-3}{2} = -1.5$.

Tilvekstformelen: $g(0.5) \approx g(0) + g'(0)(0.5 - 0) = -1.5 + 1.2 \cdot 0.5 = -0.9$.

$g'(x) = \dfrac{a(x + 2) - (ax - 3) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \dfrac{ax + 2a. - ax + 3}{(x + 2)^2} = \dfrac{2a + 3}{(x + 2)^2}$.

$g'(0) = \dfrac{2a + 3}{2^2} = \dfrac{2a + 3}{4} = 1.2 \Leftrightarrow 2a + 3 = 4.8 \Leftrightarrow 2a = 1.8$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1.8}{2} = 0.9.$

$g(0.5) = \dfrac{0.9 \cdot 0.5 - 3}{0.5 + 2} = -1.02.$

Oppgave 3.19 $\quad g(x) = ax^2 + x \cdot \ln(x+2)$

$g(0) = a \cdot 0^2 + 0 \cdot \ln 2 = 0.$

$g'(x) = 2ax + \ln(x+2) + x \cdot \dfrac{1}{x+2}$

$g'(0) = 0 + \ln 2 + 0 = \ln 2.$

Tlvekstformelen: $g(0.2) \approx g(0) + g'(0) \cdot (0.2 - 0) = \ln 2 \cdot 0.2 = 0.14.$

Oppgave 3.20 $\quad$ a) $f(0) = 2 - 2 = 0.$

$f'(x) = -2e^{-x} + 4 \Rightarrow f'(0) = -2 + 4 = 2.$

$f''(x) = 2e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = -2e^{-x} \Rightarrow f'''(0) = -2$

$f^{(4)}(x) = 2e^{-x} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 2$

$P_4(x) = 0 + 2x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{6}x^3 + \frac{2}{24}\,x^4 = 2x + x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{12}\,x^4.$

b) $f(x) = \ln(x+5) \Rightarrow f(0) = \ln 5 = 1.6094$

$f'(x) = \dfrac{u'}{u} = \frac{1}{x+5} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{5} = 0.2.$

$f''(x) = \frac{0-1\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{-1}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

$f'''(x) = -\frac{0-2(x+5)\cdot 1}{(x+5)^4} = \frac{2}{(x+5)^3} \Rightarrow f'''(0) = \frac{2}{5^3} = \frac{2}{125}$

$P_3(x) = 1.6094 + 0.2\,x - \frac{1}{50}\,x^2 + \frac{2}{750}\,x^3 = 1.6094 + 0.2\,x - \frac{1}{50}\,x^2 + \frac{1}{375}\,x^3$

$f(0.6) = \ln 5.6 = 1.722767$

$P_4(0.6) = 1.6094 + 0.2 \cdot 0.6 - \frac{0.6^2}{50} + \frac{0.6^3}{375} = 1.722776$

Oppgave 3.21 $\quad$ Bruker L'Hopitals regel for $\frac{0}{0}$ og $\frac{\infty}{\infty}$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot 1} = 0.5.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{5x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{10x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{10} = 0.4.$

Etter å ha derivert 1 gang, har vi framdeles $\frac{\infty}{\infty}$, derfor bruker vi regelen enda en gang.

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{e^0}{2} = 0.5$

Etter å ha derivert 1 gang, har vi fortsatt $\frac{0}{0}$, derfor bruker vi regelen en gang til.

d) $\lim_{x\to 10} \dfrac{\ln(x-9)}{x-10} = \lim_{x\to 10} \dfrac{\frac{1}{x-9}}{1} = \dfrac{\frac{1}{10-9}}{1} = 1.$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^5 - 1} = \lim_{x\to 0} \dfrac{6x^5}{5x^4} = \dfrac{6}{5}$

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{2x} = \dfrac{5}{2} = 2.5$

Kapittel 4

Oppgave 4.1 a) $5^x = 181$. Tar ln på begge sider: $\ln(5^x) = \ln 181$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln 5 = \ln 181 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 181}{\ln 5} = 3.2300.$

b) $3\,e^{0.29\,x} = 12 \Leftrightarrow e^{0.29\,x} = \dfrac{12}{3} = 4$. Tar ln på begge sider:

$\ln e^{0.29\,x} = \ln 4 \Leftrightarrow 0.29\,x = \ln 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 4}{0.29} = 4.7803.$

Oppgave 4.2 a) $f(x) = 16\,e^{0.025\,x} \Leftrightarrow f'(x) = 16 \cdot 0.025\,e^{0.025\,x} = 0.4\,e^{0.025\,x}$

b) $f(x) = 1400(1 - e^{-0.009\,x}) + 400 = 1800 - 1400\,e^{-0.009\,x}$.

$f'(x) = 1400 \cdot (-e^{-0.009\,x}) \cdot (-0.009) = 12.6\,e^{-0.009\,x}$.

c) $f(x) = \dfrac{2\,e^{0.3\,x}}{x}$

$f'(x) = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 0.3\,e^{0.3\,x} \cdot x - 2\,e^{0.3\,x} \cdot 1}{x^2} = \dfrac{e^{0.3\,x}(0.6\,x - 2)}{x^2}$

d) $f(x) = 100(e^{0.2\,x} - 1)^2 = 100\,u^2$. Bruker kjerneregelen.

$f'(x) = 100 \cdot 2u \cdot u' = 200(e^{0.2\,x} - 1) \cdot e^{0.2\,x} \cdot (0.2) = 40e^{0.2\,x}(e^{0.2\,x} - 1).$

Oppgave 4.3 a) Diskret vekst: $f(t) = A\,(1 + r)^t = 9.36 \cdot \left(1 + \dfrac{2.7}{100}\right)^t = 9.36 \cdot 1.027^t$

$f(3) = 9.36 \cdot 1.027^3 = 10.139$ millioner. $f(5) = 9.36 \cdot 1.027^5 = 10.694$ millioner

$9.36 \cdot 1.027^t = 12 \Leftrightarrow 1.029^t = \dfrac{12}{9.36} = 1.337580$. Tar ln på begge sider:

$\ln(1.029^t) = \ln 1.337580 \Leftrightarrow t \cdot \ln 1.029 = \ln 1.282051 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 1.282051}{\ln 1.027} = 9.326$

dvs etter 10 år, i 2012.

b) $f(t) = 35000\, e^{0.009\,t}$. $f(6) = 35000 \cdot e^{0.009 \cdot 6} = 35000 \cdot e^{0.054} = 36941.96 \approx 36942$.

$f(12) = 35000 \cdot e^{0.009 \cdot 12} = 35000 \cdot e^{0.108} = 38991.67 \approx 38992$.

$35000\, e^{0.009\,t} = 41000 \Leftrightarrow e^{0.009\,t} = \frac{41000}{35000} = 1.171429$. Tar ln på begge sider:

$\ln e^{0.009\,t} = \ln 1.171429 \Leftrightarrow 0.009\,t = \ln 1.171429 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 1.171429}{0.009} = 17.58$ år.

c) La $r = \dfrac{p}{100}$. Vi får da ligningen: $6160\, e^{-r \cdot 6} = 5732 \Leftrightarrow e^{-6r} = \dfrac{5732}{6160} = 0.930519$.

$\ln e^{-6r} = \ln 0.930519 \Leftrightarrow -6r = \ln 0.930519 \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 0.930519}{-6} = 0.012$

$p = 100r = 100 \cdot 0.012 = 1.2\ \%$.

Oppgave 4.4 $f(x) = 24x \cdot e^{-0.5\,x}$. $f(4) = 24 \cdot 4 \cdot e^{-2} = 96 \cdot e^{-2} = 12.99 \approx 13$.

Siden $f(x)$ er på formen $u \cdot v$, bruker vi produktregelen når vi deriverer. $u = 24x, v = e^{-0.5\,x}$.

$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 24 \cdot e^{-0.5\,x} + 24x \cdot e^{-0.5\,x} \cdot (-0.5) = 24e^{-0.5\,x} - 12x \cdot e^{-0.5\,x} = 12\, e^{-0.5\,x}(2 - x)$.

Finne lokale ekstremalpunkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12e^{-0.5\,x}(2 - x) = 0$. Siden $e^{-0.5\,x}$ aldri kan bli 0, kan vi dele på $12e^{-2x}$ på begge sider, og får da $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{-1} = 2$.

Førstederiverttest: $f'(x) = 12\, e^{-0.5\,x}(2 - x) = -12e^{-0.5\,x}(x - 2)$. Setter inn i fortegnsskjema. -12 er alltid negativ, $e^{-0.5\,x}$ er alltid positiv, $x - 2$ er negativ for $x < 2$ og positiv for $x > 2$. $f'(x)$ er da postiv for $x < 2$ og positiv for $x > 2$, dermed maksimum.

Lokalt maksimum: $x = 2$, $f(2) = 24 \cdot 2 \cdot e^{-1} = 17.66$.

(Hvis du velger andrederiverttest, må du også bruke produktregelen for å finne $f''(x)$. Nå er $u = 12e^{-0.5\,x}, v = 2 - x$.

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 12e^{-0.5\,x} \cdot (-0.5)(2 - x) + 12e^{-0.5\,x} \cdot (-1) = 12e^{-0.5\,x}(-1 +$

$0.5\,x-1) = 12e^{-0.5\,x}(0.5\,x-2) = 6e^{-0.5\,x}(x-4)$.

$f''(2) = 6e^{-1}(2-4) = -4.41$, negativ, så lokalt maksimum i $x = 2$.).

Oppgave 4.5 a) $f(x) = 10\ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{10}{x}$.

b) $f(x) = \ln(2x^4+129) = \ln u \Rightarrow g'(x) = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{8x^3}{2x^4+129}$

c) $h(x) = 6x^2 \cdot \ln x$. Bruker produktregelen:

$h'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 12x \cdot \ln x + 6x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 12x \cdot \ln x + 6x$

Oppgave 4.6 $g(x) = \ln(-2x^2+17x+90) = \ln u \Rightarrow g'(x) = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{-4x+17}{-2x^2+17x+90}$

Finne lokale ekstremalpunkt: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x+17}{-2x^2+17x+90} = 0 \Rightarrow -4x+17 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4.25$.

En førstederiverttest viser at dette er et maksimumspunkt (nevneren er positiv i det aktuelle intervallet, slik at fortegnsvariasjonen til teller blir avgjørende).

Maksimum: $g(4.25) = \ln 126.125 = 4.837$.

Sjekker endepunktene: $g(-1) = \ln 71 = 4.263$, $g(12) = \ln 6 = 1.792$.

Største verdi er $g(4.25) = 4.837$, minste verdi er $g(12) = 1.792$

Oppgave 4.7 a) $T(0) = 32.2\,e^0 + 22.2 = 54.4$.

$T(5) = 32.2\,e^{-0.22} + 22.2 = 48.0$.

$T'(t) = 32.2 \cdot (-0.044)e^{-0.044\,t} = -1.4168\,e^{-0.044\,t}$

Temperaturnedgangen ved $t = 5 : T'(5) = -1.4168 \cdot e^{-0.22} = -1.137°$ per minutt.

b) $32.2\,e^{-0.044\,t} + 22.2 = 40.5 \Leftrightarrow 32.2\,e^{-0.044\,t} = 40.5 - 22.2 = 18.3$.

$e^{-0.044\,t} = \frac{18.3}{32.2} = 0.568323$. Tar ln på begge sider og får:

$-0.044\,t = \ln 0.568323 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0.568323}{-0.044} = 12.8$ minutter.

$\lim\limits_{t\to\infty} (32.2\,e^{-0.044\,t} + 22.2) = 22.2$ fordi $e^{-0.044\,t} \to 0$ når $t \to \infty$.

Romtemperaturen er da 22.2 grader Celsius.

Oppgave 4.8 a) $N(t) = \dfrac{12000}{1 + 2\,e^{-0.08\,t}}$.

$N(0) = \dfrac{12000}{1 + 2e^0} = \dfrac{12000}{3} = 4000$ fugler ved tidspunkt 0.

$\lim\limits_{t \to \infty} N(t) = 12000$ fordi $e^{-kt} \to 0$ når $t \to \infty$.

b) $N'(t) = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \dfrac{0 - 12000 \cdot 2(-0.08)e^{-0.08\,t}}{(1 + 2e^{-0.08\,t})^2} = \dfrac{1920\,e^{-0.08\,t}}{(1 + 2e^{-0.08\,t})^2}$

For å finne maksimum for $N'(t)$, må vi sette $N''(t) = 0$.

$N''(t) = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} =$

$\dfrac{1920(-0.08)e^{-0.08\,t}(1 + 2e^{-0.08\,t})^2 - 1920e^{-0.08\,t} \cdot 2(1 + 2e^{-0.08\,t})2(-0.08)e^{-0.08\,t}}{(1 + 2e^{-0.08\,t})^4}$

$= \dfrac{1920(-0.08)e^{-0.08\,t}(1 + 2e^{-0.08\,x}) - 1920e^{-0.08\,t} \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-0.08)e^{-0.08\,t}}{(1 + 2e^{-0.08\,t})^3}$

$= \dfrac{-153.6\,e^{-0.08\,t}(1 + 2e^{-0.08\,t} - 4e^{-0.08\,t})}{(1 + 2e^{-0.08\,t})^3} = \dfrac{153.6\,e^{-0.08\,t}(2e^{-0.08\,t} - 1)}{(1 + 2e^{-0.08\,t})^3}$

$N''(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-0.08\,t} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-0.08\,t} = 0.5 \Leftrightarrow \ln(e^{-0.08\,t}) = \ln 0.5$

$\Leftrightarrow -0.08\,t = \ln 0.5 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 0.5}{-0.08} = 8.66.$

Veksthastigheten er størst ved tidspunktet $t = 8.66$.

Bestanden er da $N(8.66) = 5998.5 \approx 6000$ fugler.

Veksthastigheten er da $N'(8.66) = 240$, dvs bestanden vokser med en fart av 240 fugler per år.

Dette er en logistisk funksjon som er konveks til venstre for punktet, og konkav til høyre, dermed ser vi at $t = 8.66$ virkelig gir et maksimum for $N'(t)$.

Oppgave 4.9 $I(x) = 192x - 30x \cdot \ln x$.

$I'(x) = 192 - (30 \ln x + 30x \cdot \frac{1}{x}) = 192 - 30 \ln x - 30 = 162 - 30 \ln x$.

$I'(x) = 0 \Leftrightarrow 162 - 30 \ln x = 0 \Leftrightarrow 30 \ln x = 162 \Leftrightarrow \ln x = \frac{162}{30} = 5.4$.

$x = e^{5.4} = 221.4$.

Maksimal inntekt: $I(221.4) = 6642.19$.

(Test for maksimum; $I''(x) = -\frac{30}{x}$, som er negativ for alle positive x).

Kapittel 5

Oppgave 5.1 a) 7 år = 12·7 = 84 måneder.

$109\,380 \cdot 1.0045^{84} = 159\,489.82$.

b) Nåverdi: $K_0 = \dfrac{150\,000}{1.052^4} = 122\,469.60$

c) $67\,800 \cdot (1+r)^6 = 88\,801 \Leftrightarrow (1+r)^6 = \dfrac{88\,801}{67\,800} = 1.309749$

$\Leftrightarrow 1 + r = \sqrt[6]{1.309749} = 1.309749^{\frac{1}{6}} = 1.046 \Rightarrow r = 0.046 \Rightarrow p = 100r = 4.6\ \%$

d) $87\,500 \cdot 1.048^n = 153\,500 \Leftrightarrow 1.048^n = \dfrac{153\,500}{87\,500} = 1.754286$. Tar ln på begge sider:

$n \cdot \ln 1.048 = \ln 1.754286 \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 1.754286}{\ln 1.048} = 11.99$, dvs $n = 12$ år.

Oppgave 5.2 a) $12340 \cdot 1.045 + 12340 \cdot 1.045^2 + ... + 12340 \cdot 1.045^{12} = \dfrac{12340 \cdot 1.045 \cdot (1.045^{12} - 1)}{0.045}$

$= 199413.33$.

b) $\dfrac{D \cdot 1.045(1.045^{12} - 1)}{0.045} = 250000 \Leftrightarrow D = \dfrac{250000 \cdot 0.045}{1.045(1.045^{12} - 1)} = 15470.38$

Oppgave 5.3 $K_0 = \dfrac{D}{r}\left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right) \Leftrightarrow D = \dfrac{K_0 \cdot r}{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n} = \dfrac{385\,000 \cdot 0.071}{1 - \left(\frac{1}{1.071}\right)^{16}} =$ 41025.64

Rente 1. år: $385\,000 \cdot 0.071 = 27335$

Avdrag: 41025.64 - 27335 = 13960.64.

Restgjeld: 385 000 - 13690.64 = 371 309.36

Oppgave 5.4 $D \cdot 1.038^5 + D \cdot 1.038^6 + ... + D \cdot 1.038^{12} = \dfrac{a(k^n - 1)}{k - 1}$

$= \dfrac{D \cdot 1.038^5(1.038^8 - 1)}{1.038 - 1} = 360\,000 \Leftrightarrow D = \dfrac{360\,000 \cdot 0.038}{1.038^5 \cdot (1.038^8 - 1)} = 32655.06$

Oppgave 5.5 $K_0 = \dfrac{a}{1 - k} = \dfrac{\frac{D}{1.052}}{1 - \frac{1}{1.052}} = \dfrac{D}{0.052} = \dfrac{51000}{0.052} = 980\,769.23$.

Oppgave 5.6 Trykkfeil i oppgaveteksten i boka: Innskuddet skjer 1/1-2000.

$$K_0 = \frac{8000}{1.039^6} + \frac{8000}{1.039^7} + ... + \frac{8000}{1.039^{13}} = \frac{a(1-k^n)}{1-k} = \frac{8000}{1.039^6} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1.039}\right)^8\right)}{\left(1 - \frac{1}{1.039}\right)}$$
$= 44668.32$

Oppgave 5.7 a) $K(t) = 100\,000\, e^{0.06\,t}$

$K(5.5) = 100\,000 \cdot e^{0.06 \cdot 5.5} = 100\,000\, e^{0.33} = 139\,096.81$

$K(10) = 100\,000 \cdot e^{0.06 \cdot 10} = 100\,000 \cdot e^{0.6} = 182\,211.88$

b) Doblingstid for kontinuerlig vekst: $t = \dfrac{\ln 2}{r} = \dfrac{\ln 2}{0.06} = 11.6$ år.

$t = \dfrac{\ln 2}{r} \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 2}{t} = \dfrac{\ln 2}{7.7} = 0.09$, dvs 9 %.

Oppgave 5.8 $180\,000 \cdot 1.015^{60} = 439779.56$.

$180\,000 \cdot 1.09^{10} = 426125.46$.

Investeringen med 1.5 % rente pr måned gir størst sluttverdi.

Oppgave 5.9 Man må velge et oppgjørstidspunkt. Jeg har valgt å ta oppgjøret like etter innbetaling nr 15, og dermed 1 år før første utbetaling.

Nåverdien av utbetalingene på dette tidspunktet er

$$K_0 = \frac{60000}{1.052} + \frac{60000}{1.052^2} + ... + \frac{60000}{1.052^5} = \frac{60000}{0.052}(1 - 1.052^{-5}) = 258338.69$$

Dette må da være lik sluttverdien av oppsparingsannuiteten på oppgjørstidspunktet:

$$D + D \cdot 1.052 + D \cdot 1.052^2 + ... + D \cdot 1.052^{14} = \frac{a(k^n - 1)}{(k-1)} = \frac{D \cdot (1.052^{15} - 1)}{1.052 - 1}$$

$$= \frac{D \cdot (1.052^{15} - 1)}{0.052} = 258338.69 \Leftrightarrow D = \frac{258338.69 \cdot 0.052}{1.052^{15} - 1} = 11792.93.$$

Kapittel 6

Oppgave 6.1 a) $\int (12x + 7)\, dx = 6 \cdot \dfrac{x^2}{2} + 7x + C = 3x^2 + 7x + C$

b) $\int (0.6\, x^2 + 14x + 12)\, dx = 0.6 \cdot \dfrac{x^3}{3} + 14 \cdot \dfrac{x^2}{2} + 12x + C = 0.2\, x^3 + 7x^2 + 12x + C$

c) $\int (12x^3 - 8x - 15)\, dx = 12 \cdot \dfrac{x^4}{4} - 8 \cdot \dfrac{x^2}{2} - 15x + C = 3x^4 - 4x^2 - 15x + C$

d) $\int(1-x+x^2-x^3)\,dx = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + C$

Oppgave 6.2 a) $\displaystyle\int\left(5x-\frac{4}{x}\right)dx = 5\cdot\frac{x^2}{2} - 4\ln|x| + C = 2.5\,x^2 - 4\ln|x| + C$

b) $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + C.$

c) $\displaystyle\int 5e^{0.4\,x}dx = 5\cdot\frac{e^{0.4\,x}}{0.4} + C = 12.5\,e^{0.4\,x} + C$

d) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{x^2} - 6e^{-2x}\right)\,dx = \int\left(5x^{-2} - 6e^{-2x}\right)\,dx = 5\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - 6\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} + C$

$\displaystyle= -\frac{5}{x} + 3\,e^{-2x} + C$

e) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x+4} - \frac{5}{x}\right)dx = 2\ln|x+4| - 5\ln|x| + C$

f) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-0.5}dx = \frac{x^{-0.5+1}}{-0.5+1} + C = \frac{x^{0.5}}{0.5} + C = 2\sqrt{x} + C$

Oppgave 6.3 a) $F'(x) = 5x^3 - 0.3\,x^2 + 5x + 1, \qquad F(0) = 100.$

$\displaystyle F(x) = \int(5x^3 - 0.3\,x^2 + 5x + 1)\,dx = 5\cdot\frac{x^4}{4} - 0.3\cdot\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} + x + C$

$= 1.25\,x^4 - 0.1\,x^3 + 2.5\,x^2 + x + C$

$F(0) = C = 100.$

$F(x) = 1.25\,x^4 - 0.1\,x^3 + 2.5\,x^2 + x + 100.$

b) $F'(x) = 5\,e^{-0.1\,x} + 4. \quad F(0) = 5.$

$\displaystyle F(x) = \int(5e^{-0.1\,x} + 4)dx = 5\cdot\frac{e^{-0.1\,x}}{-0.1} + 4x + C = -50\,e^{-0.1\,x} + 4x + C$

$F(0) = -50 + C = 5 \Leftrightarrow C = 50 + 5 = 55.$

$F(x) = -50\,e^{-0.1\,x} + 4x + 55.$

Oppgave 6.4 a) Arealet mellom grafen $f(x) = x^2 + x$ og $x-$aksen over intervallet $[2, 4]$.

$\displaystyle\int(x^2 + x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$ Setter $C = 0$ ved beregning av bestemt integral.

$$A = \int_2^4 f(x)dx = \frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} = \frac{64}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 2 = \frac{56}{3} + 6 = \frac{74}{3}$$

b) Arealet mellom grafen $f(x) = \dfrac{15}{x^2} + \dfrac{10}{x}$ og $x-$aksen over intervallet $[1, 5]$.

$$\int \left(\frac{15}{x^2} + \frac{10}{x}\right) dx = \int \left(15x^{-2} + \frac{10}{x}\right) = 15 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 10 \ln |x| + C$$

$= -\dfrac{15}{x} + 10 \ln |x| + C.$Setter $C = 0$.

$$A = \int_1^5 f(x)\, dx = -\frac{15}{5} + 10 \ln 5 - \left(-\frac{15}{1} + 10 \ln 1\right) = -3 + 10 \ln 5 + 15 - 10 \ln 1$$

$= 12 + 10 \ln 5 = 28.09438.$

c) Arealet mellom $f(x) = 8e^{-x}$ og $x-$aksen over intervallet $[0, 5]$:

$$\int_0^5 8e^{-x} dx = -8e^{-5} - (-8e^0) = 8 - 8e^{-5} = 7.946$$

Oppgave 6.5 $\displaystyle\int (24\, e^{-0.03\, t} - 24e^{-0.06\, t}) dt = 24 \cdot \frac{e^{-0.03\, t}}{-0.03} - 24 \cdot \frac{e^{-0.06\, t}}{-0.06}$

$= -800\, e^{-0.03\, t} + 400\, e^{-0.06\, t} + C$

$$\int_0^{50} (24\, e^{-0.03\, t} - 24e^{-0.06\, t}) dt = -800\, e^{-1.5} + 400\, e^{-3} - (-800 + 400) = 241.41.$$

Oppgave 6.6 $K(t) = \int I(t)\, dt = \int (0.001\, t^3 + 0.7\, t + 15)\ dt$

$= 0.001 \cdot \dfrac{t^4}{4} + 0.7 \cdot \frac{t^2}{2} + 15t + C = 0.00025\, t^4 + 0.35\, t^2 + 15t + C.$

$K(10) = 800 \Leftrightarrow 0.00025 \cdot 10^4 + 0.35 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10 + C = 800 \Leftrightarrow 187.5 + C = 800 \Leftrightarrow$

$c = 800 - 187.5 = 612.5.$

$K(t) = 0.00025\, t^4 + 0.35\, t^2 + 15t + 612.5.$

Oppgave 6.7 Siden graden til teller er større enn graden til nevner, tar vi først polynomdivisjon.

$$\begin{array}{l} x^2 + 10x + 8 : x + 2 = x + 8 \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ \qquad 8x + 8 \\ \quad \underline{-(8x + 16)} \end{array}$$

$$\underline{\text{Rest} \quad -8}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x + 8 - \frac{8}{x+2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 8x - 8\ln(x+2) + C.$$

$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \frac{5^2}{2} + 8\cdot 5 - 8\ln 7 - \left(\frac{1^2}{2} + 8 - 8\ln 3\right)$$

$= 12.5 + 40 - 8\ln 7 - 0.5 - 8 + 8\ln 3 = 37.2216$

Oppgave 6.8 $\displaystyle\int \frac{8000t + 18\,000}{t+5}\,dt.$

Polynomdivisjon siden teller og nevner har samme grad:

$8000\,t + 18\,000 : t + 5 = 8000$

$-(\underline{8000\,t + 40\,000})$

$\underline{\text{rest:} \qquad -22\,000}$

$$\int \frac{8000t + 18\,000}{t+5}\,dt = \int \left(8000 - \frac{22000}{t+5}\right) dt = 8000\,t - 22000\ln|t+5| + C.$$

$$\int_0^{60} \frac{8000t + 18\,000}{t+5} dt = 8000\cdot 60 - 22000\cdot\ln 65 - (8000\cdot 0 - 22000\cdot\ln 5)$$

$480\,000 - 22000\cdot\ln 65 + 22000\cdot\ln 5 = 423571.1.$

Oppgave 6.9 a) $F(t) = \int f(t)\,dt = \int 50\,e^{0.025\,t} = 50\cdot\dfrac{e^{0.025\,t}}{0.025} + C = 2000\,e^{0.025\,t} + C$

$F(0) = 2000\,e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 - 2000 = -2000$

$F(t) = 2000\,e^{0.025\,t} - 2000$

b) $2000\,e^{0.025\,t} - 2000 = 10000 \Leftrightarrow 2000\,e^{0.025\,t} = 12000 \Leftrightarrow e^{0.025\,t} = \frac{12000}{2000} = 6.$

Tar ln på begge sider og får: $0.025\,t = \ln 6 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 6}{0.025} = 71.67$ år.

Oppgave 6.10 a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx$

Substitusjon: Velger $u = x^2 + 3$. $\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x\,dx.$

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(x^2+3) + C.$$

b) $\displaystyle\int (0.5\,x + 3)^3 dx.$

Substitusjon. Velger $u = 0.5\,x + 3$. $\frac{du}{dx} = 0.5 \Leftrightarrow du = 0.5\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{0.5} = 2\,du.$

$$\int (0.5\,x+3)^3 dx = \int u^3 \cdot 2\,du = 2\int u^3 du = 2\cdot\frac{u^4}{4} + C = 0.5(0.5\,x+3)^4 + C$$

c) $\int x\cdot\left(x^2+7\right)^2 dx$

Substitusjon: $u = x^2+7$. $\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,du = xdx$

$\int x\cdot\left(x^2+7\right)^2 dx = \int u^2\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6}\left(x^2+7\right)^3 + C$

d) $\int \dfrac{9x^2}{x^3+2}\,dx$

Substitusjon: $u = x^3+2$. $\frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow du = 3x^2dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}\,du = x^2dx$

$\int \dfrac{9x^2}{x^3+2}\,dx = 9\int \dfrac{\frac{1}{3}}{u}\,du = \frac{9}{3}\ln|u| + C = 3\ln|x^3+2| + C$

Oppgave 6.11 a) $\displaystyle\int 12x\cdot\ln x\,dx$

Delvis integrasjon $\displaystyle\int u'\cdot v\,dx = u\cdot v - \int u\cdot v'dx$. Her velger vi $u' = 12x,\ v = \ln x$.
Da blir $u = \displaystyle\int 12xdx = \frac{12x^2}{2} = 6x^2$, og $v' = \dfrac{1}{x}$.

$$\int 12x\cdot\ln x\,dx = 6x^2\cdot\ln x - \int 6x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = 6x^2\cdot\ln x - 6\int xdx = 6x^2\cdot\ln x - 6\cdot\frac{x^2}{2} + C$$
$= 6x^2\cdot\ln x - 3x^2 + C$.

b) $\displaystyle\int 18x^2\cdot\ln x\,dx$

Delvis integrasjon: Velger $u' = 18x^2$ og $v = \ln x$. $u = \displaystyle\int 18x^2dx = \frac{18x^3}{3} = 6x^3$.
$v = \ln x \Rightarrow v' = \dfrac{1}{x}$.

$$\int 18x^2\cdot\ln x\,dx = 6x^3\cdot\ln x - \int 6x^3\cdot\frac{1}{x}dx = 6x^3\cdot\ln x - 6\int x^2dx = 6x^3\cdot\ln x - 6\cdot\frac{x^3}{3} + C$$
$= 6x^3\cdot\ln x - 2x^3 + C$

c) $\displaystyle\int x\cdot e^{-x}\,dx$

Delvis integrasjon: Velger $u' = e^{-x}$ og $v = x$. Da blir $u = \displaystyle\int e^{-x}dx = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$,
og $v' = 1$.

$$\int x\cdot e^{-x}dx = -e^{-x}\cdot x - \int(-e^{-x})\cdot 1\,dx = -e^{-x}\cdot x + \int e^{-x}dx = -e^{-x}\cdot x - e^{-x} + C.$$

d) $\int 3x\cdot e^{0.1\,x}dx$

Delvis integrasjon. Velger $u' = e^{0.1\,x}$og $v = 3x$. Da blir $u = \displaystyle\int e^{0.1\,x}\,dx = \frac{e^{0.1\,x}}{0.1} =$

$10\,e^{0.1\,x}$, og $v' = 3$.

$\int 3x \cdot e^{0.1\,x} dx = 10\,e^{0.1\,x} \cdot 3x - \int 3 \cdot 10\,e^{0.1\,x} dx = 30x \cdot e^{0.1\,x} - 30 \cdot \frac{e^{0.1\,x}}{0.1} + C = 30x \cdot e^{0.1\,x} - 300\,e^{0.1\,x} + C$

Oppgave 6.12 a) $\displaystyle\int \frac{2x-7}{(x-2)(x-3)}\,dx$. Bruker delbrøkoppspaltning.

$$\frac{2x-7}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ -3A-2B &= -7 \end{aligned}$$ Ligningssystem med løsning $A = 3, B = -1$.

$$\int \frac{2x-7}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right) dx = 3\ln|x-2| - \ln|x-3| + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{-x+18}{x^2-4}\,dx$. Delbrøkoppspalting. $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$.

$$\frac{-x+18}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}.$$

$$\begin{aligned} A+B &= -1 \\ 2A-2B &= 18 \end{aligned}$$ Ligningssystem med løsning: $A = 4, B = -5$.

$$\int \frac{-x+18}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2}\right) dx = 4\ln|x-2| - 5\ln|x+2| + C$$

Kapittel 7

Oppgave 7.1 a) $f'_x(x,y) = 9 \cdot 2x + 15 \cdot 1 \cdot y - 0 + 43 = 18x + 15y + 43$

$f'_y(x,y) = 0 + 15x \cdot 1 - 20 \cdot 2y + 0 = 15x - 40y$

$f''_{xx}(x,y) = 18$. $f''_{xy}(x,y) = 15 = f''_{yx}(x,y)$. $f''_{yy}(x,y) = -40$.

b) $f'_x(x,y) = 1.5 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x \cdot y + 0 = 4.5\,x^2 + 10xy$

$f'_y(x,y) = 0 + 5x^2 \cdot 1 + 4 \cdot 2y = 5x^2 + 8y$

$f''_{xx}(x,y) = 4.5 \cdot 2x + 10 \cdot 1 \cdot y = 9x + 10y$

$f''_{xy}(x,y) = 10x = f''_{yx}(x,y)$. $f''_{yy}(x,y) = 8$

Oppgave 7.2 Det har dessverre blitt en trykkfeil i oppgaveteksten, derfor stemmer ikke fasiten. Her er løsningen av oppgaven slik den står i boka:

a) $f'_x(x,y) = 0 + 5 \cdot 2x \cdot y^2 - \dfrac{2}{y} \cdot 1 = 10xy^2 - \dfrac{2}{y}$

$f'_y(x,y) = 0.8 \cdot 4y^3 + 5x^2 \cdot 2y - \dfrac{0 - 2x \cdot 1}{y^2} = 3.2\,y^3 + 10x^2y + \dfrac{2x}{y^2}$

$f'_x(3,2) = 10 \cdot 3 \cdot 2^2 - \frac{2}{2} = 119$

$f'_y(3,2) = 3.2 \cdot 2^3 + 10 \cdot 3^2 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 3}{2^2} = 207.1$

b) $f''_{xx}(x,y) = 10y^2$

$f''_{xy}(x,y) = 10x \cdot 2y - \dfrac{0-2}{y^2} = 20xy + \dfrac{2}{y^2} = f''_{yx}(x,y)$

$f''_{yy}(x,y) = 3.2 \cdot 3y^2 + 10x^2 + \dfrac{0 - 2x \cdot 2y}{y^4} = 9.6\,y^2 + 10x^2 - \dfrac{4x}{y^3}$

Oppgave 7.3 $P'_x(x,y) = -24x - 12y + 4992.$ $P'_y(x,y) = -32y - 12x + 6240.$

$$\begin{matrix} P'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow -24x - 12y + 4992 = 0 \\ P'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow -12x - 32y + 6240 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 24x + 12y = 4992 \\ 12x + 32y = 6240 \end{matrix}$$

Løses direkte på kalkulator, eller ved addisjonsmetoden.

Løsning: $x = 136.4, y = 144.$

$A = P''_{xx} = -24.$ $B = P''_{xy} = -12.$ $C = P''_{yy} = -32.$

$A \cdot C - B" = -24 \cdot (-32) - (-12)^2 = 624$, positiv, og $A = -24$, negativ, så det er et maksimum.

Det maksimale overskuddet: $P(136, 144) = 724736.$

Oppgave 7.4 a) $f'_x(x,y) = 4x + y - 4.$ $f'_y(x,y) = -2y + x$

$f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x + y = 4$

$f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow -2y + x = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} 4x + y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{matrix}}$$

Lineært ligningssystem med løsning $x = \frac{8}{9}$, $y = \frac{4}{9}$

Stasjonært punkt: $\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$.

$A = f''_{xx} = 4,\ B = f''_{xy} = 1,\ C = f''_{yy} = -2.$

$A \cdot C - B^2 = 4 \cdot (-2) - 1^2 = -9$, negativ, dvs. sadelpunkt.

b) $f'_x(x, y) = 2 - \frac{3}{6}x^2. \quad f'_y(x, y) = -y$

$f'_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{6}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{0.5} = 4 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$

$f'_y(x, y) == 0 \Leftrightarrow -y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Stasjonære punkter er da $(2, 0)$ og $(-2, 0)$.

$f''_{xx}(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x$. $B = f''_{xy} = 0$. $C = f''_{yy} = -1$

I $(2, 0)$ er $A = f''_{xx}(2, 0) = -2$. Da blir

$A \cdot C - B^2 = (-2) \cdot (-1) - 0^2 = 2 > 0$, og $A < 0$, dermed er det et lokalt maksimumspunkt.

Maks.verdi: $f(2, 0) = 4 - \frac{8}{6} + 3 = \frac{17}{3}$.

I $(-2, 0)$ er $A = f''_{xx}(-2, 0) = -(-2) = 2$.

$A \cdot C - B^2 = 2 \cdot (-1) = -2$, negativt, så sadelpunkt.

c) $f'_x(x, y) = 6x - 6y. \quad f'_y(x, y) = 12y^2 - 6x.$

$f'_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6y = 0 \Leftrightarrow 6x = 6y \Leftrightarrow x = y.$

$f'_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow 12y^2 - 6x = 0$

Vi setter inn $y = x$ i den siste ligningen: $12x^2 - 6x = 0$

Andregradsligningen har løsninger $x = 0$, $x = 0.5$.

Siden $y = x$, blir de stasjonære punktene $(0, 0)$ og $(0.5, 0.5)$.

$A = f''_{xx} = 6. \quad B = f''_{xy} = -6. \quad f''_{yy}(x, y) = 24y.$

I $(0, 0)$ er $C = f''_{yy}(0, 0) = 24 \cdot 0 = 0$.

$A \cdot C - B^2 = 6 \cdot 0 - (-6)^2 = -36$, negativt, så sadelpunkt.

I $(0.5, 0.5)$ er $C = f''_{yy}(0.5, 0.5) = 24 \cdot 0.5 = 12$.

$A \cdot C - B^2 = 6 \cdot 12 - (-6)^2 = 36$, positivt, og $A > 0$, så vi har et lokalt minimumspunkt i $(0.5, 0.5)$.

Minimumsverdien blir: $f(0.5, 0.5) = 3 \cdot 0.5^2 + 4 \cdot 0.5^3 - 6 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = -0.25$.

Oppgave 7.5 a) $f(32,243) = 20 \cdot 32^{0.8} \cdot 243^{0.2} = 20 \cdot 16 \cdot 3 = 960$, så punktet ligger på nivåkurven.

$$y' = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-20 \cdot 0.8\, x^{0.8-1} \cdot y^{0.2}}{20\, x^{0.8} \cdot 0.2\, y^{0.2-1}} = \frac{-4x^{-0.2}y^{0.2}}{x^{0.8}y^{-0.8}} = \frac{-4y}{x}$$

I punktet (32, 243) er stigningstallet til tangenten $y' = \dfrac{-4 \cdot 243}{32} = -30.375$.

Tangentligningen: $y - 243 = -30.375(x - 32) \Leftrightarrow y = -30.375\, x + 1215$.

b) Tilvekstformelen: $y \approx 243 + (-30.375) \cdot (33 - 32) = 243 - 30.375 = 212.625$.

Man kan også finne den eksakte verdien av y her uten å bruke tilvekstformelen:

$20 \cdot 33^{0.8} \cdot y^{0.2} = 960 \Leftrightarrow y^{0.2} = \dfrac{960}{20 \cdot 33^{0.8}} = 2.92705$

Vi opphøyer begge sider av ligningen i femte:

$y = (y^{0.2})^5 = 2.92705^5 = 214.86$.

De to svarene er ikke like, siden det første bare er en tilnærming.

Oppgave 7.6 a) $z = f(x,y) = 0.2\, x^2 - 0.2\, xy + 0.5\, y^2 - 7.2\, x - 3.6\, y + 140$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.4\, x - 0.2\, y - 7.2 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -0.2\, x + y - 3.6 = 0$

Ligningssystemet: $\begin{aligned} 0.4\, x - 0.2\, y &= 7.2 \\ -0.2\, x + y &= 3.6 \end{aligned}$ har løsning $x = 22, y = 8$.

Stasjonært punkt (22,8).

$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.4,\ B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -0.2,\ C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1.$

$AC - B^2 = 0.4 \cdot 1 - (-0.2)^2 = 0.36$, positiv, og A er positiv, så dette er et lokalt minimum. $f(22,8) = 46.4$.

b) Lagrangefunksjonen: $F(x,y) = f(x,y) - \lambda(3x + 5y - 56)$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0.4\, x - 0.2\, y - 7.2 - \lambda \cdot 3 = 0$ I

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = -0.2\, x + y - 3.6 - \lambda \cdot 5 = 0$ II

$3x + 5y = 56$ III

Av ligning I får vi $\lambda = \dfrac{0.4\, x - 0.2\, y - 7.2}{3}$. Av ligning II : $\lambda = ..\dfrac{-0.2\, x + y - 3.6}{5}$.

Vi får da: $\dfrac{0.4\,x - 0.2\,y - 7.2}{3} = \dfrac{-0.2\,x + y - 3.6}{5}$

$\Leftrightarrow 2x - y - 36 = -0.6\,x + 3y - 10.8 \Leftrightarrow -4y = -2.6\,x + 25.2$

$\Leftrightarrow y = 0.65\,x - 6.30.$

Innsatt i III: $3x + 5(0.65\,x - 6.30) = 56 \Leftrightarrow 6.25\,x = 87.5 \Leftrightarrow x = 14,\ y = 2.80$

Minimumsverdi: $f(14,\,2.8) = 64.4.$

Oppgave 7.7 a) Lagrangefunksjonen: $F(x,y) = 25\,x^{0.4} \cdot y^{0.6} - \lambda(4x + 15y - 100).$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 25 \cdot 0.4\,x^{-0.6} \cdot y^{0.6} - \lambda \cdot 4 = 0 \qquad \text{I}$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 25\,x^{0.4} \cdot 0.6\,y^{-0.4} - \lambda \cdot 15 = 0 \qquad \text{II}$

$4x + 15y = 100 \qquad \text{III}$

Ligning I: $10\,x^{-0.6} \cdot y^{0.6} - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{10\,x^{-0.6} \cdot y^{0.6}}{4} = 2.5\,x^{-0.6} \cdot y^{0.6}$

Ligning II : $15\,x^{0.4} \cdot y^{-0.4} - 15\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{15\,x^{0.4} \cdot y^{-0.4}}{15} = x^{0.4} \cdot y^{-0.4}$

Vi får da: $2.5\,x^{-0.6} \cdot y^{0.6} = x^{0.4} \cdot y^{-0.4} \Leftrightarrow \dfrac{y^{0.4}}{y^{-0.4}} = \dfrac{x^{0.4}}{2.5\,x^{-0.4}} \Leftrightarrow y = 0.4\,x$

Innsatt i III: $4x + 15 \cdot 0.4\,x = 100 \Leftrightarrow 10\,x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{100}{10} = 10,\ y = 0.4 \cdot 10 = 4.$

Maksimumsverdi: $g(10,\,4) = 144.27.$

b) Lagrangemetoden: $F(x,y) = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - 18)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2y - \lambda \cdot 2x = 0 \qquad \text{(I)}$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2x - \lambda \cdot 2y = 0 \qquad \text{(II)}$

$x^2 + y^2 = 18 \qquad \text{(III)}$

Merk at $x = 0$ i I gir $y = 0$, og $y = 0$ i II gir $x = 0$. Men (0,0) oppfyller ikke bibetingelsen. Vi kan derfor anta $x \neq 0,\ y \neq 0$.

(I) gir $\lambda = \dfrac{2y}{2x} = \dfrac{y}{x}$. (II) gir $\lambda = \dfrac{2x}{2y} = \dfrac{x}{y}$

(I) = (II) gir da $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y} \Leftrightarrow y^2 = x^2.$

Innsatt i III: $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, x = -3.$ $y^2 = x^2 = 9$ gir $y = 3, y = -3.$

Aktuelle punkter: $(3,3), (3,-3), (-3,3), (-3,-3).$

Maksimumsverdi: $f(3,3) = f(-3,-3) = 18$.

Minimumsverdi: $f(3,-3) = f(-3,3) = -18$.

Oppgave 7.8 $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 12$. Skal finne største/minste verdi over lukket og begrenset område: $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$.

Leter først etter lokale maks/min i området:
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y = 0$. Stasjonært punkt: $(0,0)$.
$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$. $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$. $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$.
$A \cdot C - B^2 = -8$, derfor sadelpunkt. Det fins ingen lokale maks/min.

Randkurven: Området er et rektangel, og vi regner først ut $z-$verdien i hjørnene.

$f(0,0) = 12,\ f(1,0) = 13,\ f(0,2) = -8 + 12 = 4,\ f(1,2) = 1 - 8 + 12 = 5$.

Vi leter så etter eventuelle maks/min midt på sidekantene:

1) $x = 0,\ 0 \leqq y \leqq 2$.

$z = f(0,y) = -2y^2 + 12 \Rightarrow z' = -4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Vi er da tilbake i $(0,0)$.

2) $y = 0,\ 0 \leqq x \leqq 1$.

$z = f(x,0) = x^2 + 12 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vi er tilbake i $(0,0)$.

3) $x = 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$.

$z = f(1,y) = 1^2 - 2y^2 + 12 = 13 - 2y^2 \Rightarrow z' = -4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Vi er tilbake i $(1,0)$.

4) $y = 2,\ 0 \leqq x \leqq 1$.

$z = f(x,2) = x^2 - 2 \cdot 2^2 + 12 = x^2 + 4 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vi er tilbake i $(0,2)$.

Vår leting etter maks/min langs sidekantene ga ingen nye punkter i tillegg til hjørnene.

Siden vi heller ikke har lokale maks/min i området, må største/minste verdi være i hjørnene. Sammenligner vi $z-$verdiene i de 4 hjørnene, får vi at største verdi er $f(1,0) = 13$, og minste verdi er $f(0,2) = 4$.

Kapittel 8

Oppgave 8.1 a) $\boxed{\begin{aligned} 2x - 0.5\,y &= 0 \\ -4x + \;\; y &= 0 \end{aligned}}$. $2 \cdot I$ legges til ligning II : $\boxed{\begin{aligned} 2x - 0.5\,y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}}$

Ganger ligning I med 0.5: $\boxed{\begin{aligned} x - 0.25\,y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} &x = 0.25\,y \\ &0 = 0 \end{aligned}}$

Ligningssystemet har da uendelig mange løsninger. Hvis vi setter y lik et tilfeldig valgt reelt tall t,kan løsningen skrives på formen: $x = 0.25\,t$, $y = t$, der t fritt valgt reelt tall.

b) $\boxed{\begin{aligned} 0.75\,a - 0.5\,b &= 0.25 \\ 1.50\,a \;-\; b &= 0.50 \end{aligned}}$. $-2 \cdot I$ legges til II: $\boxed{\begin{aligned} 0.75\,a - 0.5\,b &= 0.25 \\ 0 &= 0 \end{aligned}}$

Ganger ligning I med $\frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}$: $\boxed{\begin{aligned} a - \tfrac{2}{3}\,b &= \tfrac{1}{3} \\ 0 &= 0 \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} &a = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\,b \\ &0 = 0 \end{aligned}}$

Ligningssystemet har da uendelig mange løsninger. Setter vi b lik et tilfeldig valgt reelt tall t, kan vi skrive løsningen som: $x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,t$, $y = t$, der t fritt valgt reelt tall.

Oppgave 8.2 a) $\boxed{\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 4 \\ x - y + 5z &= 3 \end{aligned}}$. $-1 \cdot I$ legges til II : $\boxed{\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 4 \\ -3y + 7z &= -1 \end{aligned}}$

Vi ganger II med $-\frac{1}{3}$: $\boxed{\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 4 \\ y - \tfrac{7}{3}\,z &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}}$.

$-2 \cdot II$ legges til I : $\boxed{\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{8}{3}\,z &= \tfrac{10}{3} \\ y - \tfrac{7}{3}\,z &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= \tfrac{10}{3} - \tfrac{8}{3}\,z \\ y &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{7}{3}\,z \end{aligned}$.

Setter z lik et fritt valgt tall t. Den generelle løsningen blir da:

$x = x = \frac{10}{3} - \frac{8}{3}\,t,\; y = y = \frac{1}{3} + \frac{7}{3}\,t,\; z = t.$

b)

$\boxed{\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned}}$. $-2 \cdot I$ legges til II. $-1 \cdot I$ legges til III :

$$\boxed{\begin{aligned} x+y-3z&=0\\ y+4z&=1\\ y+4z&=1 \end{aligned}}$$. $-1\cdot II$ legges til III. Det gir ny ligning $III: 0=0$.

Ligning III er derfor overflødig og kan slettes. Vi eliminerer så y fra I ved å erstatte I med $I-II$:

$$\boxed{\begin{aligned} x-\quad 7z&=-1\\ y+4z&=1 \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x&=-1-7z\\ y&=1-4z \end{aligned}}$$

Vi setter $z=t$, et fritt valgt tall. Da kan vi uttrykke den generelle løsningen slik:

$x=-1-7t,\ y=1-4t,\ z=t.$

Oppgave 8.3 a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot 0-5\cdot 3=-15.$

b) $\begin{vmatrix} 21 & -4 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 21\cdot 7-(-4)\cdot 10=187.$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-1)=1.$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

$=5\cdot(-2)-2\cdot(2-12)+1\cdot(0+3)=-10+20+3=13.$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 6\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 1+6\cdot(-5)=-29.$

f) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$=4\cdot 1+1\cdot 3+2\cdot(6+1)=21.$

Oppgave 8.4 a)

$$\boxed{\begin{array}{c} x-2y=1 \\ 3x+4y=3 \end{array}}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 3 = 10 \neq 0, \text{ så entydig løsning.}$$

Cramers regel: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{10}{10} = 1.$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{3-3}{10} = 0$

b)

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ -4x+6y=5 \end{array}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12-(-3)\cdot(-4) = 12-12 = 0. \text{ Ikke entydig løsning.}$$

Gauss-Jordan-metoden: $2\cdot I$ legges til II :

$$\boxed{\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ 0=7 \end{array}}.$$

Selvmotsigelse i ligning II. Ikke løsbart.

c) $\boxed{\begin{array}{c} 12x-32y=48 \\ 15x+40y=96 \end{array}}$

$$\begin{vmatrix} 12 & -32 \\ 15 & 40 \end{vmatrix} = 12\cdot 40-(-32)\cdot 15 = 960. \text{ Entydig løsning.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 48 & -32 \\ 96 & 40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -32 \\ 15 & 40 \end{vmatrix}} = \frac{48\cdot 40 + 32\cdot 96}{960} = 5.2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 48 \\ 15 & 96 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -32 \\ 15 & 40 \end{vmatrix}} = \frac{12 \cdot 96 - 48 \cdot 15}{960} = 0.45$$

d)

$$\boxed{\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + 6y - z &= 4 \end{aligned}}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$= -35 - 2 - 1 = -38$. Entydig løsning. Løser da ved Cramers regel.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (-1 - 6) + 2(0 - 4) + 0 - 4}{-38} = \frac{-19}{-38} = 0.5.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{-38} = \frac{-19}{-38} = 0.5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{-38} = \frac{19}{-38} = -0.5.$$

e)

$$\boxed{\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + z = 3 \\ 5x + 2y \qquad = 1 \end{array}}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 22 = -18 \neq 0$, dvs entydig løsning. Cramers regel:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 10}{-18} = \frac{-10}{-18} = \frac{5}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-14)}{-18} = \frac{16}{-18} = -\frac{8}{9}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot (-10) - 2 \cdot (-14) + 1 \cdot 22}{-18} = \frac{20}{-18} = -\frac{10}{9}.$$