

Oppgaver til kapittel 8.

Oppgave 08.01.

Finn arealet av området D i xy -planet, begrenset av de tre kurvene $y = x^3$, $x = -2$ og $y = 0$.

Oppgave 08.02.

Finn tyngdepunktet for platen D med massetetthet $f(x, y) = 2y$ når D ligger i xy -planet, begrenset av de tre kurvene

$$y = \sin^{-1} x, \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \text{og} \quad x = 0.$$

Oppgave 08.03.

Befolkningstettheten på området D innenfor kurven $r = 2 + \cos \theta$ (målt i km) er gitt ved

$$f(x, y) = 500\sqrt{x^2 + y^2} \text{ mennesker/km}^2.$$

Hvor mange mennesker bor det på området D ?

Oppgave 08.04.

En plate med massetetthet $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ er avgrenset av kurven $r = \cos \theta$ for $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Finn treghetsmomentet for platen med hensyn på akse $y = x$.

Oppgave 08.05.

En beholder er avgrenset av flatene

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0 \quad \text{og} \quad z = 5 - x + y.$$

a) Finn volumet av beholderen.

b) Beholderen er fylt med vann med temperatur

$$T = f(x, y, z) = 80 - \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{z-5}{2}.$$

Finn gjennomsnittstemperaturen for vannet i beholderen.

Oppgave 08.06.

Beregn dobbelintegralet

$$\mathcal{I} = \int_{y=0}^2 \int_{x=y^2}^4 y e^{x^2} dx dy$$

ved å bytte om på integrasjonsrekkefølgen.

Oppgave 08.07.

Beregn dobbelintegralet

$$\mathcal{I} = \int_{x=0}^2 \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

ved å bytte om til polarkoordinater.

Oppgave 08.08.

La T være en rett pyramide med høyde $2a$ og kvadratisk grunnflate med side a , der $a > 0$ er et gitt tall. Finn tyngdepunktet (sentroiden) til T når T har konstant massetetthet.

(At pyramiden er rett, betyr her at spissen står rett over midtpunktet i grunnflat-en.)

Oppgave 08.09.

Finn volumet til området T begrenset av flaten $z = \min\{x^2, y^2\}$ og planet $z = 4$.

($\min\{a, b\}$ betyr det minste av de to tallene a og b .)

Oppgave 08.10.

Finn massen til legemet T med massetetthet $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$ når T er legemet begrenset av de to flatene

$$z = (x-1)^2 + y^2 \quad \text{og} \quad z = 10 - (x+1)^2 - y^2.$$

Oppgave 08.11.

En kompakt snurrebass T med massetetthet

$$\delta(r, \theta, z) = r^2 \quad (\text{syylinderkoordinater})$$

har ytterflate

$$\rho = 1 - \cos \varphi \quad (\text{kulekoordinater}).$$

Finn treghetsmomentet med hensyn på z -aksen for T .

Oppgave 08.12.

Beregn arealet A av den gitte flaten S når

a) S er flaten $z = x + y$ for $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

b) S er flaten $z = x^2 + y^2$ for $x^2 + y^2 \leq 2$.

c) S er flaten $z = \cosh x$ for $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.