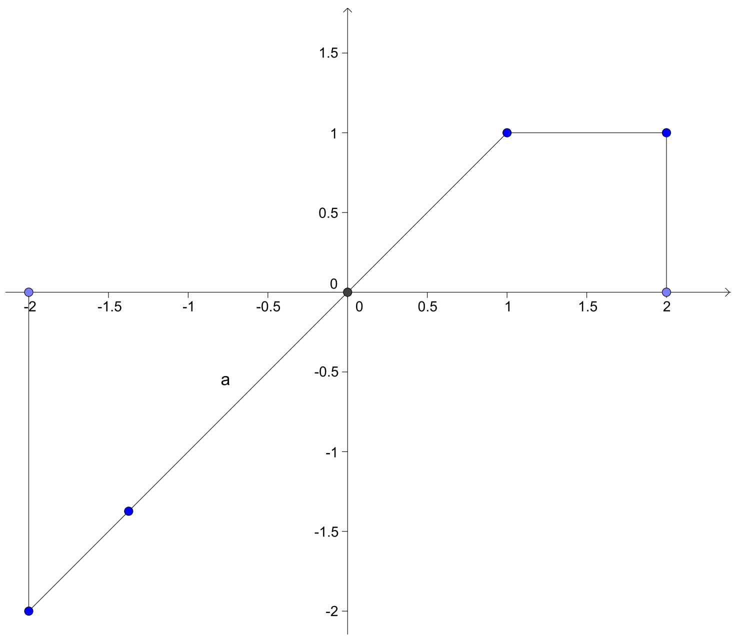
Oppgave 04.01.

a) For $y = \sqrt{4 - x^2}$ gjelder også at $y^2 = 4 - x^2$. Tolker vi integralet som et areal under kurven $y = f(x)$, er det altså arealet under halvsirkelen $x^2 + y^2 = 2^2$. Integralet har derfor verdi $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$.

b) Vi tolker integralet som areal med fortegn av området mellom $y = f(x)$ og x-aksen for $-2 \leq x \leq 2$.



Som det fremgår av figuren blir dette lik

$$-\text{(arealet av en trekant med grunnlinje og høyde lik 2)}$$
$$+\text{(arealet av en trekant med grunnlinje og høyde lik 1)}$$
$$+\text{(arealet av et kvadrat med side 1)} = -2 + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}.$$

Oppgave 04.02.

a) Integralet er uegentlig fordi integranden er diskontinuerlig i $x = 0$.Det er klart at integralet er symmetrisk om origo, så det holder å sjekke om integralet av $f(x)$ over $[0,2]$ eksisterer:

$$\int_0^2 \ln|x|\,dx = \int_0^2 \ln x\,dx = \lim_{T\to 0^+}\int_T^2 \ln x\,dx = \lim_{T\to 0^+}\Big[x\ln x - x\Big]_T^2$$
$$= \lim_{T\to 0^+}\Big(2\ln 2 - 2 - (T\ln T - T)\Big) = \infty.$$

Integralet divergerer.

b) Integralet er uegentlig av to årsaker: integranden har en diskontinuitet i origo og integrasjonsintervallet er uendelig. Vi deler derfor først integrasjonsintervallet slik at vi bare har ett problem på hvert delintervall. For eksempel.

$$\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx.$$

Integralet eksisterer dersom alle disse tre integralene konvergerer. Vi starter med det første av integralene:

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to 0^-}\int_{-1}^{T}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to 0^-}\left[\frac{-1}{x^2}\right]_{-1}^{T} = \lim_{T\to 0^-}\left(\frac{-1}{T^2} - \frac{-1}{(-1)^2}\right) = -\infty.$$

Altså divergerer integralet.

c) Integralet er uegentlig av to årsaker: integranden har en diskontinuitet i $-\pi/2$ og går mot uendelig når $x \to \pi/2$. Vi deler derfor først integrasjonsintervallet slik at vi bare har ett problem på hvert delintervall. For eksempel.

$$\int_{-\pi}^{\pi/2}\tan x\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi/2}\tan x\,dx + \int_{-\pi/2}^{0}\tan x\,dx + \int_0^{\pi/2}\tan x\,dx.$$

Integralet eksisterer dersom alle disse tre integralene konvergerer. Vi starter med det første av integralene:

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2}\tan x\,dx = \lim_{T\to(-\pi/2)^-}\int_{-\pi}^{T}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

der substitusjonen $u = \cos x$ gir $du = -\sin x\,dx$ og derved

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Derfor er

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} \tan x\,dx = \lim_{T\to -\pi/2}\Big(-\ln|\cos T| + \ln|\cos(-\pi)|\Big) = -\infty.$$

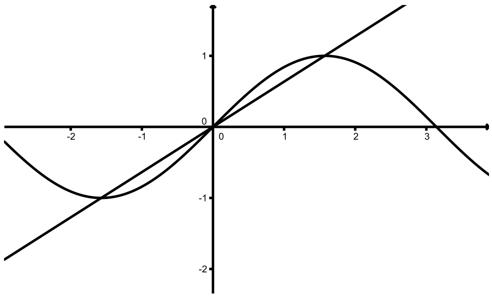
Altså divergerer integralet.

d) Integralet er uegentlig fordi integrasjonsintervallet er uendelig. Vi sjekker om integralet konvergerer:

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{T\to\infty}\int_{\ln 2}^{T} e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_{\ln 2}^{T}\\ &= \lim_{T\to\infty}\Big(-e^{-T} + e^{-\ln 2}\Big) = 0 + \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Oppgave 04.03.

a)



Skjæringspunktet i første kvadrant mellom de to kurvene har x-koordinat som tilfredsstiller

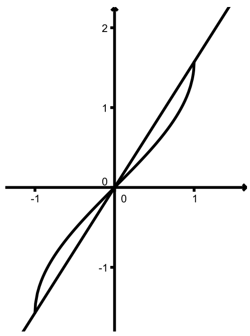
$$\sin x = 2x/\pi$$

$$x = \pi/2.$$

Arealet av området er derfor

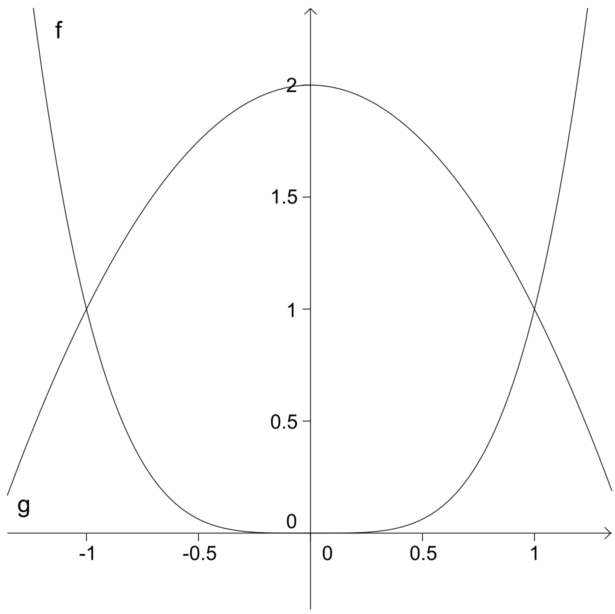
$$A = \int_0^{\pi/2} (\sin x - 2x/\pi)\,dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2/4}{\pi} + \cos 0 + \frac{0^2}{\pi}$$
$$= 0 - \frac{\pi}{4} + 1 + 0 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

b)



Arealet må bli det samme som i a) fordi figuren er den samme, bare dreiet og speilet. Dette følger av at de to funksjonene i b) er inverser av funksjonene i a).

c)



Skjæringspunktet i første kvadrant mellom de to kurvene har x-koordinat som tilfredsstiller

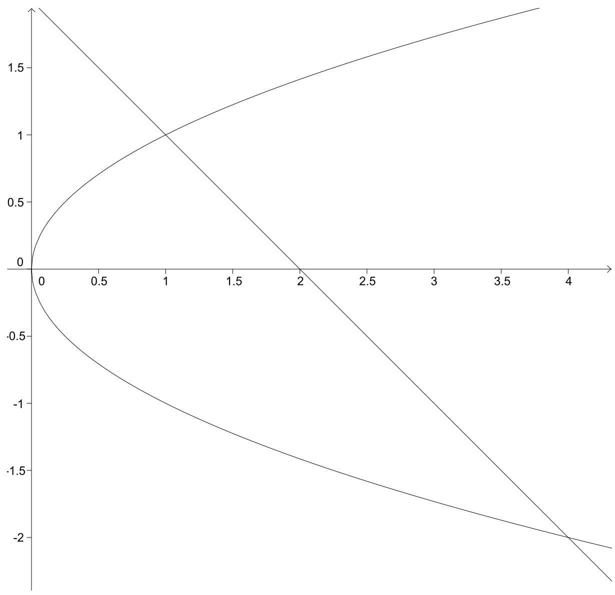
$$
\begin{aligned}
x^4 &= 2 - x^2 \\
x^4 + x^2 - 2 &= 0 \\
x^2 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \text{der bare + foran rottegnet gir løsning} \\
x &= \sqrt{\frac{-1+\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{\frac{-1+3}{2}} = 1.
\end{aligned}
$$

(Husk vi skal bare ha med den delen som ligger i første kvadrant.)

Arealet av området er derfor

$$A = \int_0^1 ((2 - x^2) - x^4)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{22}{15}.$$

d)



Vi velger å integrere med hensyn på y.

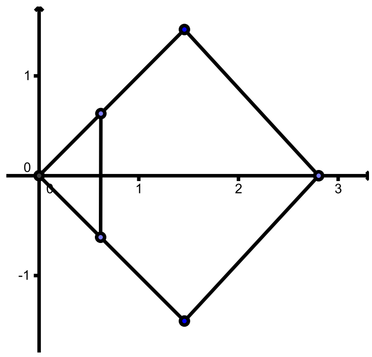
Skjæringspunktene mellom de to kurvene har y-koordinater gitt ved

$$\begin{aligned} y^2 &= 2 - y \\ y^2 + y - 2 &= 0 \\ y &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}. \end{aligned}$$

Arealet av området er derfor

$$\begin{aligned} A = &\int_{-2}^{1} (x_{\text{høyre}} - x_{\text{venstre}})\, dy = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{1} \\ = &2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{2} \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Oppgave 04.04.



Vi setter gjenstanden på xy-planet med den røde stripen langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = 2\sqrt{2}$. Vi tenker gjenstanden snittet i skiver normalt på x-aksen. Gjenstanden er symmetrisk om snittet ved $x = \sqrt{2}$, så vi regner først volumet av den venstre halvdelen.

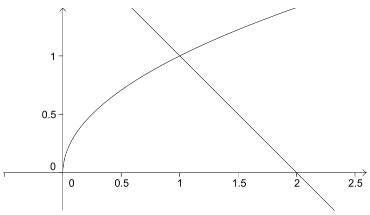
Snittflaten ved x er en likesidet trekant med sider $2x$, og derved areal $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x^2\sqrt{3}$. (Lag en skisse, så ser du det.) Tykkelsen på skiven er dx. Volumet av den venstre halvdelen er derfor

$$\int_{x=0}^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Volumet av gjenstanden er derfor $V = \frac{4}{3}\sqrt{6}$.

Oppgave 04.05.

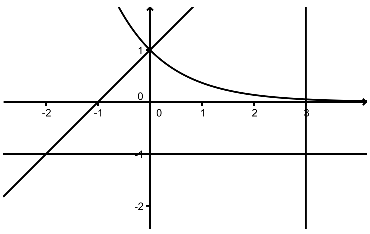
a)



Vi velger å bruke sylinderskallmetoden. Det betyr at vi må dele integrasjonsområdet i to deler: $[0,1]$ og $[1,2]$. (Skjæringspunktet mellom kurvene $y = \sqrt{x}$ og $y = 2 - x$ har x-koordinat gitt ved $\sqrt{x} = 2 - x$ som gir $x = 1$.) Et punkt (x, y) har avstand $|x|$ til rotasjonsaksen. Vi får derfor

$$V = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot 2\pi x\, dx + \int_1^2 (2-x) \cdot 2\pi x\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{3/2} dx + 2\pi \int_1^2 (2x - x^2) dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 + 2\pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{32\pi}{15}.$$

b)

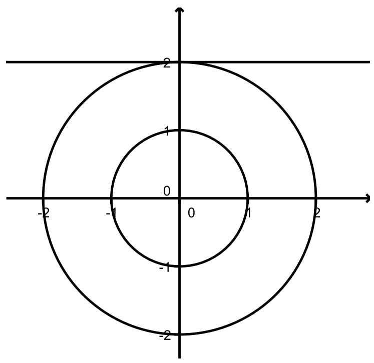


Aksen $y = -2$ går parallelt med grunnlinjen $y = -1$ i området A. Vi velger å bruke skivemetoden. Det betyr at vi må dele integrasjonsområdet i to deler: $[-2,0]$ og $[0,3]$. (Skjæringspunktet mellom kurvene $y = e^{-x}$ og $y = x + 1$ har x-koordinat $x = 0$, og skjæringspunktet mellom kurvene $y = x + 1$ og $y = -1$ har x-koordinat

$x = -2$.) Alle skivene får et sirkulært hull i midten med radius 1. Vi får

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{0} \pi\left[(2+(x+1))^2 - 1^2\right]dx + \int_0^3 \pi\left[(2+e^{-x})^2 - 1^2\right]dx \\
&= \pi\int_{-2}^{0}\left[(x+3)^2 - 1\right]dx + \pi\int_0^3 (4+4e^{-x}+e^{-2x}-1)\,dx \\
&= \pi\left[\frac{(x+3)^2}{3} - x\right]_{-2}^{0} + \pi\left[3x - 4e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^3 = \pi\left(\frac{121}{6} - 4e^{-3} - \frac{e^{-6}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

c)



Aksen $y = 2$ går parallelt med x-aksen. Rotasjonsområdet blir som en smultring på høykant. Det naturlige ville vel her være å bruke Pappus' første teorem. Men la oss integrere for øvelsens skyld. Symmetrien om y-aksen gjør at vi kan finne volumet av halve området (altså for $0 \le x \le 2$) og så gange med to. Vi velger å bruke sylinderskallmetoden. Det betyr at vi integrerer med hensyn på y. Vi deler integrasjonsintervallet for y i to deler: $[0,1]$ og $[1,2]$. Siden et punkt (x, y) har avstand $|2-y|$ fra rotasjonsaksen, får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{2} &= \int_0^1 \left(\sqrt{4-y^2} - \sqrt{1-y^2}\right)2\pi(2-y)\,dy + \int_1^2 \sqrt{4-y^2}\cdot 2\pi(2-y)\,dy \\
&= 2\pi\left(\int_0^1 \left(2\sqrt{4-y^2} - 2\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{1-y^2}\right)dy + \int_1^2 \left(2\sqrt{4-y^2} - y\sqrt{4-y^2}\right)dy\right)
\end{aligned}
$$

der

$$
\int (a^2 - y^2)\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\arctan\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} + C \quad \text{og} \quad \int y\sqrt{a^2-y^2}\,dy = -\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{3/2} + C
$$

for $a > 0$. Derfor er

$$
\begin{aligned}
V &= 4\pi\left[y\sqrt{4-y^2} + 4\arctan\frac{y}{\sqrt{4-y^2}} - y\sqrt{1-y^2} - \arctan\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{3}(4-y^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(1-y^2)^{3/2}\right]_0^1 \\
&\quad + 4\pi\left[y\sqrt{4-y^2} + 4\arctan\frac{y}{\sqrt{4-y^2}} + \frac{1}{3}(4-y^2)^{3/2}\right]_1^2 \\
&= 4\pi\left[\sqrt{3} + 4\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - 0 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} - 0 - \left(0 + 0 - 0 - 0 + \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{3}\right)\right] \\
&\quad + 4\pi\left[0 + 4\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - \left(\sqrt{3} + 4\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot 3^{3/2}\right)\right] \\
&= 4\pi\left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2\pi - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = 2\pi(3\pi - 14/3).
\end{aligned}
$$

Oppgave 04.06.

En partisjon av radien fra 0 til 4 deler bassenget opp i sylinderskall. Mengde vann er derfor

$$V = \int_0^4 d(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi \int_0^4 \left(3r - \frac{r^3}{6}\right) dr = 2\pi \left[3\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{24}\right]_0^4 dr = 2\pi \left(24 - \frac{32}{3}\right) = \frac{80\pi}{3}.$$

Benevningen er m^3.

Oppgave 04.07.

a) Gjennomsnittsverdien for $f(x)$ er

$$\overline{f} = \frac{1}{8-e}\int_e^8 \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{8-e}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_e^8 = \frac{1}{8-e}\left(\frac{(\ln 8)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2}\right) = \frac{1}{16-2e}\left(9(\ln 2)^2 - 1\right)$$

der vi har brukt substitusjonen $u = \ln x$.

b) Gjennomsnittsverdien for $f(x)$ er (ved delvis integrasjon)

$$\overline{f} = \frac{1}{4}\int_0^4 xe^{2-x}\,dx = \frac{e^2}{4}\int_0^4 xe^{-x}dx = \frac{e^2}{4}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^4 + \int_0^4 e^{-x}dx\right) = \frac{e^2}{4}\left(-4e^{-4} - e^{-4} + e^0\right) = \frac{e^4-5}{4e^2}.$$

c) Gjennomsnittsverdien for $f(x)$ er

$$\overline{f} = \frac{1}{1}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

d) Gjennomsnittsverdien for $f(x)$ er

$$\overline{f} = \frac{1}{-\ln 2 - (-5)}\int_{-5}^{-\ln 2} \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 1}\,dx.$$

Substitusjonen $u = e^x$ gir $du = e^x dx = u\,dx$. Når $x = -5$, er $u = e^{-5}$, og når $x = -\ln 2$, er $u = e^{-\ln 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Derfor er

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \frac{1}{5-\ln 2}\int_{e^{-5}}^{1/2} \frac{1}{u^2-2u+1}\cdot\frac{du}{u} = \frac{1}{5-\ln 2}\int_{e^{-5}}^{1/2} \frac{du}{(u-1)^2 u} = \frac{1}{5-\ln 2}\int_{e^{-5}}^{1/2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right)du \\
&= \frac{1}{5-\ln 2}\left[\ln|u| - \ln|u-1| - (u-1)^{-1}\right]_{e^{-5}}^{1/2} = \frac{1}{5-\ln 2}\left[\ln\left|\frac{u}{u-1}\right| - \frac{1}{u-1}\right]_{e^{-5}}^{1/2} \\
&= \frac{1}{5-\ln 2}\left[\ln 1 + \frac{1}{1/2} - \left(-5 - \ln|e^{-5}-1| - \frac{1}{e^{-5}-1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{5-\ln 2}\left(0 + 2 + 5 + \ln(1-e^{-5}) - \frac{1}{1-e^{-5}}\right) = \frac{1}{5-\ln 2}\left(7 + \ln(1-e^{-5}) - \frac{1}{1-e^{-5}}\right).
\end{aligned}$$

Oppgave 04.08.

a)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{(\cos^2 x)^2}}\, dx,$$

så lengden av C er gitt ved

$$L = \int_{x=0}^{\pi/4} ds = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}\, dx.$$

Et punkt (x, y) på C har avstand $|x|$ til y-aksen. Arealet av rotasjonsflaten er derfor

$$A = \int_{x=0}^{\pi/4} 2\pi|x|\, ds = 2\pi \int_0^{\pi/4} x\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}\, dx.$$

b)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx,$$

så lengden av C er gitt ved

$$L = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx.$$

Et punkt (x, y) på C har avstand $|y - 2| = |\cos x - 2| = 2 - \cos x$ til aksen $y = 2$. Arealet av rotasjonsflaten er derfor

$$A = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi(2 - \cos x)\, ds = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi(2 - \cos x)\sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx.$$

Oppgave 04.09.

Massen til staven er

$$m = \int_0^5 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^5 = \frac{1}{2}(\ln(26) - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 26.$$

Tyngdepunktet $\overline{x}$ er gitt ved

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_{x=0}^5 x\cdot\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\ln 26}\int_0^5 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\ln 26}\int_0^5 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{2}{\ln 26}\Big[x - \arctan x\Big]_0^5 = \frac{2(5-\arctan 5)}{\ln 26}.$$

Et punkt (x, y) på staven har avstand $|x|$ til y-aksen. Treghetsmomentet med hensyn på y-aksen for denne staven er derfor gitt ved

$$I = \int_0^5 x^2\cdot\frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^5 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^5 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^5 = \frac{25}{2} - \frac{1}{2}\ln 26.$$

Oppgave 04.10.

Integranden e^{-x^2} er symmetrisk om $x = 0$. Derfor er $\mathscr{I} = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx = 2\mathscr{I}_0$ der

$$\mathscr{I}_0 = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

For $f(x) = e^{-x^2}$ er

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x),\\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}\cdot(-2) = e^{-x^2}(4x^2-2),\\
f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2-2) + e^{-x^2}\cdot 8x = e^{-x^2}(-8x^3+12x),\\
f''''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(-8x^3+12x) + e^{-x^2}(-24x^2+12) = e^{-x^2}(16x^4-48x^2+12).
\end{aligned}$$

For $0 \le x \le 1$ er

$$\begin{aligned}
|f''(x)| &= e^{-x^2}|4x^2-2| \le e^0\cdot\max\{|4-2|,|0-2|\} = 2 = M_2\\
|f''''(x)| &= e^{-x^2}|16x^4-48x^2+12| < e^0(16-0+12) = 28 = M_4.
\end{aligned}$$

Hvis vi bruker trapesmetoden med n delintervaller for å beregne $\mathscr{I}_0$, er feilen

$$|\mathscr{I}_0 - T_n| \le \frac{M_2(1-0)^3}{12n^2} \le 0.005$$

når

$$n^2 \ge \frac{M_2}{12\cdot 0.005} = \frac{2}{0.06} \approx 33.3, \quad \text{det vil si,} \quad n \ge \sqrt{34}.$$

(Vi må kreve at feilen er ≤ 0.005, for vi skal jo multiplisere resultatet med 2 etterpå.) Vi bruker derfor trapesmetoden med 6 delintervall på $\mathscr{I}_0$:

$$\mathscr{I}_0 \approx T_6 = \frac{1}{12}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6\right)$$

der $y_k = f(k/6) = e^{-k^2/36}$. Det gir $T_6 \approx 0.745119$, slik at $\mathscr{I} \approx 1.4902$ med ønsket nøyaktighet.

Hvis vi bruker Simpsons metode med n delintervaller for å beregne $\mathscr{I}_0$, (der n er et partall), er feilen

$$|\mathscr{I}_0 - S_n| \le \frac{M_4(1-0)^5}{180n^4} \le 0.005$$

når

$$n^4 \ge \frac{M_4}{180\cdot 0.005} = \frac{28}{180\cdot 0.005} \approx 31, \quad \text{det vil si,} \quad n \ge \sqrt[4]{31} \approx 2.4.$$

Vi bruker derfor Simpsons metode med 4 delintervall på $\mathscr{I}_0$:

$$\mathscr{I}_0 \approx S_4 = \frac{1}{12}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

der $y_k = f(k/4) = e^{-k^2/16}$. Det gir $S_4 \approx 0.74682$, slik at $\mathscr{I} \approx 1.4937$ med ønsket nøyaktighet.

Oppgave 04.11.

a) La $G(t)$ være en antiderivert til $f(t) = e^{t^2}$. Det vil si, $G'(t) = f(t)$. Da er

$$F(x) = G(x^2) - G(x),$$

og derved

$$F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x - G'(x) = f(x^2) \cdot 2x - f(x) = 2xe^{x^4} - e^{x^2}.$$

b) La $G(t)$ være en antiderivert til $f(t) = e^{t^2}$. Det vil si, $G'(t) = f(t)$. Da er

$$F(x) = G(\sqrt{x}) - G(\ln x),$$

og derved

$$F'(x) = G'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - G'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = f(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{(\ln x)^2}}{x}.$$