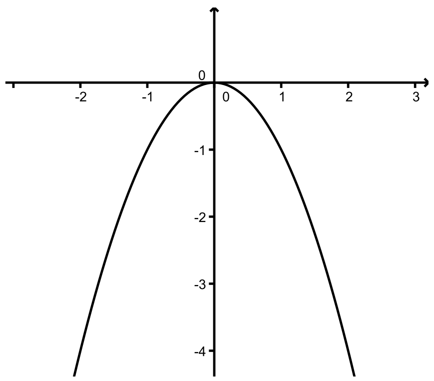
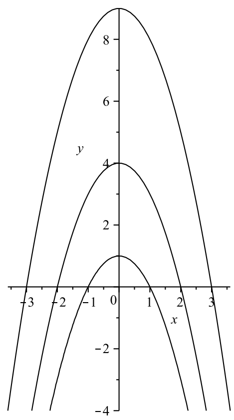
Oppgave 07.01.

a) Kravet for at $f(x,y)$ skal være et veldefinert tall, er at $x^2+y \geq 0$. Det vil si, $y \geq -x^2$. Kurven $y=-x^2$ danner skillet mellom „lovlige" og „ulovlige" punkter (x,y). Det er en parabel som åpner nedover. At $y \geq y$-verdien på parabelen, betyr at (x,y) må ligger på eller over parabelen, altså på eller „utenfor parabelen".

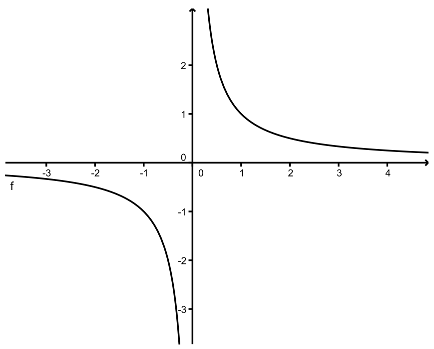
Nivåkurver for funksjonen er gitt ved $\sqrt{x^2+y}=c$ for en konstant c. Det vil si, $x^2+y=c^2$, altså $y=x^2-c^2$. Vi har skissert nivåkurvene der $c=1$, $c=2$ og $c=3$. (Legg merke til symmetrien om y-aksen.)

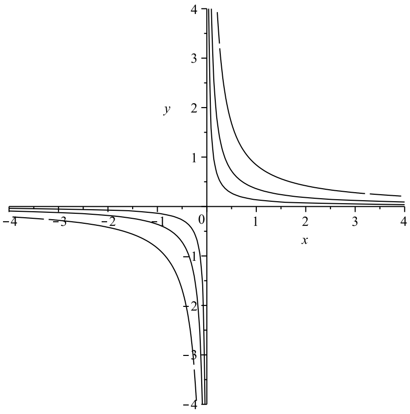




b) Kravet for at $f(x,y)$ skal være et veldefinert tall, er for det første at $|xy| \leq 1$, slik at $\arcsin xy$ er veldefinert. Men vi trenger også at $\arcsin xy > 0$ for at $\ln(\arcsin xy)$ skal være veldefinert. Det vil si, $0 < xy \leq 1$. Både x og y må derfor ha samme fortegn, og derved må (x,y) ligge i første eller tredje kvadrant. Videre er kurven $y=1/x$ et skille mellom „lovlige" og „ulovlige" punkter (x,y). Siden $0<|y| \leq 1/|x|$, er det punktene i første kvadrant på og under kurven $y=1/x$, og punktene i tredje kvadrant som ligger på og over kurven. (Koordinataksene er ikke med fordi $xy>0$.)

Når det gjelder nivåkurver $f(x,y)=c$, er det bare konstanter c mellom $\ln 1=0$ og $-\infty$ som gir punkter på kurven (fordi $-1 \leq \arcsin u \leq 1$ der bare $0 < \arcsin xy \leq 1$ er aktuelt for $f(x,y)$ Vi skisserer derfor nivåkurvene $f(x,y)=c$ for $c=0$, $c=-1$ og $c=-2$. (Legg merke til symmetrien om origo.)





c) Kravet for at $f(x, y)$ skal være et veldefinert tall, er at $(xy - 1) > 0$. Kurven $y = 1/x$ danner skillet mellom „lovlige" og „ulovlige" punkter (x, y). Det er en hyperbel som vist på den første figuren nedenfor. At $|y| > |y|$-verdien på hyperbelen, betyr at (x, y) må ligger over hyperbelen i første kvadrant og under hyperbelen i tredje kvadrant.

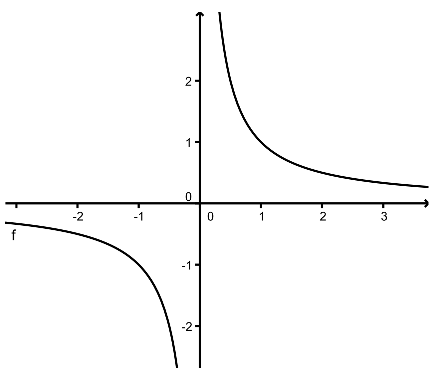
Nivåkurver $f(x, y) = c$ er på formen

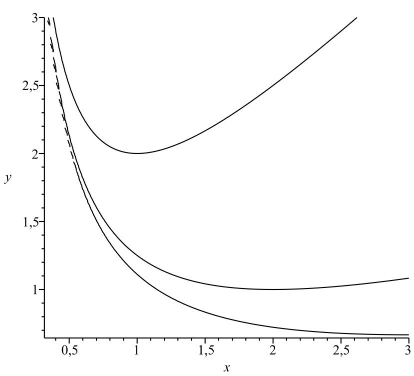
$$\frac{x}{\sqrt{xy - 1}} = c$$

$$x^2 = c^2(xy - 1)$$

$$y = \left(\frac{x^2}{c^2} + 1\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{c^2} + \frac{1}{x}.$$

Figuren nedenfor viser nivåkurvene for $c = 1$, $c = 2$ og $c = 3$ i første kvadrant. Nivåkurvene for $c = -1$, $c = -2$ og $c = -3$ ligger i tredje kvadrant, slik at kurvene $f(x, y) = c$ og $f(x, y) = -c$ er symmetriske til hverandre om origo.



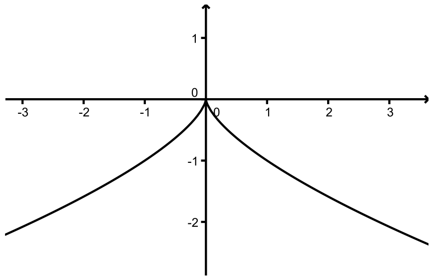


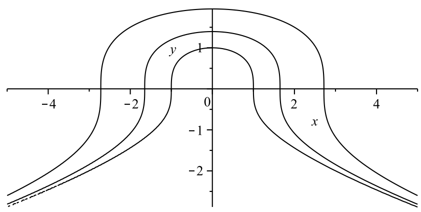
d) Kravet for at $f(x, y)$ skal være et veldefinert tall, er at $(x^2 + y^3) > 0$. Det vil si, $y > -x^{2/3}$. Kurven $y = -x^{2/3}$ danner skillet mellom „lovlige" og „ulovlige" punkter (x, y).

For å skissere denne kurven, merker vi oss først at $y = g(x) = -x^2$ er en parabel som åpner nedover med vertex i origo og akse langs y-aksen. Vi skal ha $y = -(\sqrt[3]{x})^2$. Det vil si, y-verdien avtar raskere for $|x| < 1$ og saktere for $|x| > 1$ enn den gjør på parabelen. Kurven blir derfor noe ala den som er vist på den første figuren nedenfor. At $y >$ y-verdien på kurven, betyr at (x, y) må ligger over kurven.

Nivåkurver til f er gitt ved $\ln(x^2+y^3) = c$, det vil si, $x^2+y^3 = e^c$, altså $y = \sqrt[3]{e^c - x^2}$.

Kurven $y = h(x) = e^c - x^2$ er en parabel som åpner nedover. Vi skal ha $y = \sqrt[3]{h(x)} = \sqrt[3]{e^c - x^2}$. Det vil si, vår y-verdi er litt større enn på parabelen for $0 < |h(x)| < 1$ og mindre der $|h(x)| > 1$. Det er ikke så lett å lage noen eksakt skisse av dette her, men det må bli noe ala den andre figuren nedenfor, der vi har skissert nivåkurvene for $c = 0$, $c = 1$ og $c = 2$.

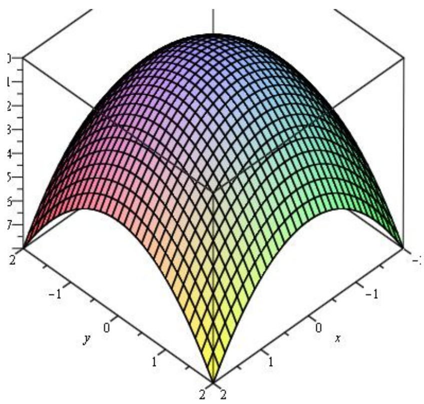
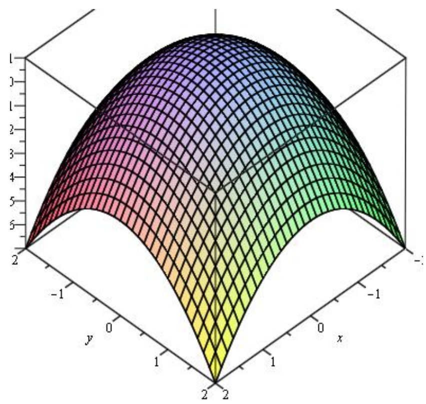
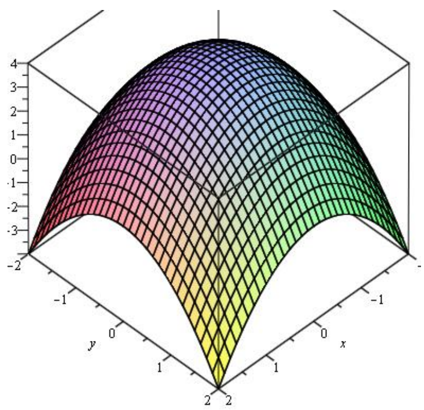
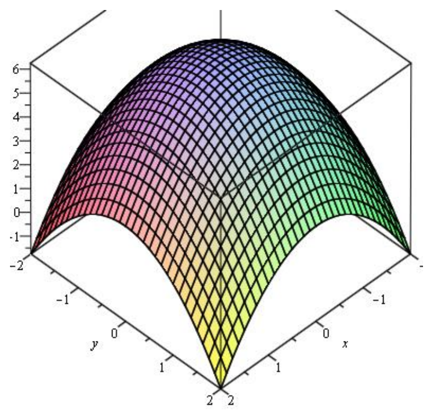




Oppgave 07.02.

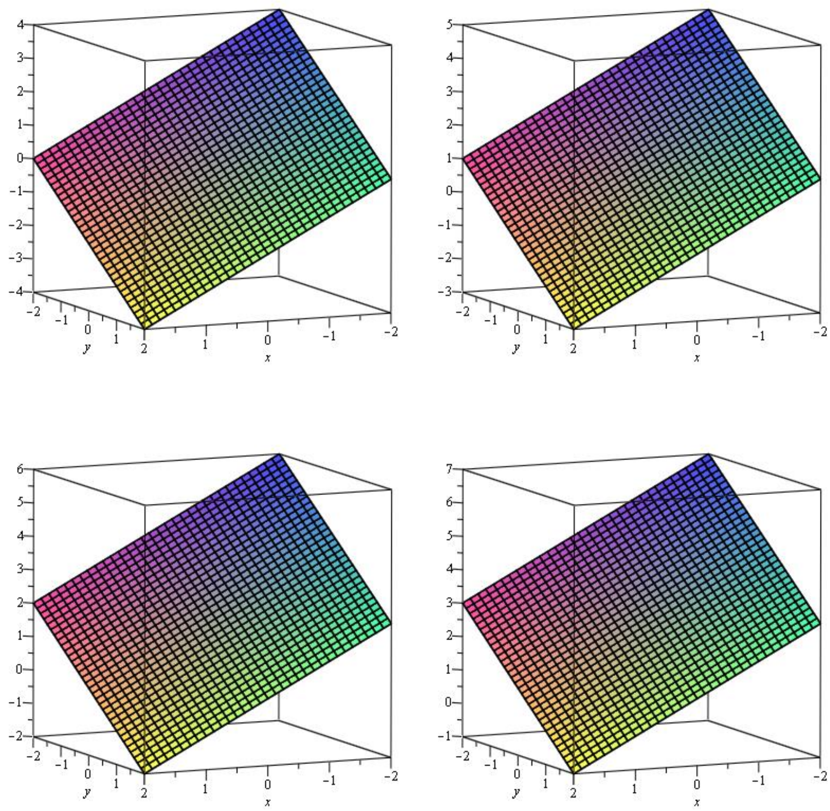
a) Kravet for at $f(x,y,z)$ skal være et veldefinert tall, er at $x^2+y^2+z \geq 0$. Det vil si, $z \geq -x^2-y^2$. Flaten $z=-(x^2+y^2)$ danner skillet mellom „lovlige" og „ulovlige" punkter (x,y,z). Det er en rotasjonsparaboloide om z-aksen som åpner nedover. At $z \geq z$-verdien på paraboloiden, betyr at (x,y,z) må ligger på eller over paraboloiden, altså på eller „utenfor paraboloiden". Dette definisjonsområdet er skissert på den første figuren nedenfor.

Nivåflater for f har formen $\sqrt{x^2+y^2+z}=c$, altså $z=c^2-(x^2+y^2)$ som alle er rotasjonsparaboloider av nøyaktig samme form som paraboloiden som avgrenser definisjonsområdet. Den eneste forskjellen er at nivåflatene har stadig høyere vertex når vi øker c. Vi har skissert nivåflatene for $c=1$, $c=2$ og $c=2.5$ på de neste tre figurene nedenfor. Den eneste forskjellen mellom figurene er skalaen på z-aksen.

b) Kravet for at $f(x, y, z)$ skal være et veldefinert tall, er at $(x + y + z) > 0$. Det vil si, $z > -(x + y)$. Flaten $z = -(x + y)$ danner skillet mellom „lovlige" og „ulovlige" punkter (x, y, z). Det er et plan gjennom origo med normalvektor $\langle 1, 1, 1\rangle$. At $z >$ z-verdien på planet, betyr at (x, y, z) må ligger over planet. Planet er skissert på den første figuren nedenfor.

Nivåflater for f har formen $x + y + z = c$. Dette er også plan med normalvektorer $\langle 1, 1, 1\rangle$, og derfor parallelle med planet som avgrenser definisjonsområdet. Vi har skissert nivåflatene for $c = 1$, $c = 2$ og $c = 2.5$ på de neste tre figurene nedenfor. Men den eneste forskjellen på figurene er skalaen på z-aksen.



Oppgave 07.03.

a) Vi innfører polarkoordinater i uttrykket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}.$$

Siden „grenseverdien" avhenger av θ, altså fra hvilken retning (x, y) nærmer seg origo, eksisterer ikke grenseverdien det spørres etter.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-yx^2}{y\sin x} = \lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{x^2-yx}{y} = 1\cdot \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\cos\theta\sin\theta}{r\sin\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2\theta - r\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } \sin\theta \neq 0, \\ \infty & \text{hvis } \sin\theta = 0. \end{cases}$$

Siden „grenseverdien" avhenger av θ, eksisterer ikke grenseverdien det spørres etter.

c)

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{y\cdot\sin x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi, y\to 0} y \cdot \lim_{x\to\pi, y\to 0} \frac{\sin x}{x-\pi} = 0\cdot \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = 0\cdot \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1} = 0\cdot(-1) = 0$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel i tredje siste overgang.

d)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{xy} = 0$$

fordi telleren går mot null mens nevneren går mot 1.

Oppgave 07.04.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2 \cdot xy - (x^3+y)y}{x^2y^2} = \frac{3x^3y - x^3y - y^2}{x^2y^2} = \frac{2x^3y - y^2}{x^2y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{2\cdot 2^3 \cdot 1 - 1^2}{2^2\cdot 1^2} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1\cdot xy - (x^3+y)x}{x^2y^2} = \frac{xy - x^4 - yx}{x^2y^2} = -\frac{x^4}{x^2y^2} = -\frac{x^2}{y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\left(\frac{2}{1}\right)^2 = -4.$$
$$\nabla f(P) = \left\langle \frac{15}{4}, -4 \right\rangle.$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 xy}\cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2} - (\tan xy)\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2) - (\sin xy)(\cos xy)\cdot x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\cos^2 xy},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{1\cdot(0+1) - (\sin 0)(\cos 0)\cdot 0}{(0+1)\sqrt{0+1}\cos^2 0} = 1.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{\cos^2 xy}\cdot x \cdot \sqrt{x^2+y^2} - (\tan xy)\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2) - (\sin xy)(\cos xy)\cdot y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\cos^2 xy},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0.$$
$$\nabla f(P) = \langle 1, 0\rangle.$$

c)

$$f(x,y,z) = x\ln(y\arcsin z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(y\arcsin z), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = \ln(2\cdot\pi/6) = \ln\frac{\pi}{3},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{\arcsin z}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = \frac{1}{\arcsin\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\pi/6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi},$$
$$\nabla f(P) = \left\langle \ln\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\right\rangle.$$

d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\sqrt{z}\tan w, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 2^2\sqrt{4}\tan\frac{\pi}{6} = 4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\sqrt{z}\tan w, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{4}\tan\frac{\pi}{6} = 4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy^2(\tan w)\frac{1}{2\sqrt{z}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 1\cdot 2^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = xy^2\sqrt{z}\frac{1}{\cos^2 w}, \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(P) = 1\cdot 2^2\cdot\sqrt{4}\frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{32}{3},$$

$$\nabla f(P) = \left\langle \frac{8}{3}\sqrt{3}, \frac{8}{3}\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{32}{3} \right\rangle.$$

Oppgave 07.05.

La avviket i x og y være henholdsvis Δx og Δy. Ved lineær approksimasjon er da avviket i V

$$\Delta V \approx V_x(\tfrac{1}{2},2)\Delta x + V_y(\tfrac{1}{2},1)\Delta y.$$

Ved integralregningens fundamentalteorem er

$$V_x(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = e^{(xy^2)^2} \cdot y^2, \qquad V_y(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = e^{(xy^2)^2} \cdot 2xy.$$

Derved er

$$\Delta V \approx e^{(\frac{1}{2}\cdot 2^2)^2} \cdot 2^2 \Delta x + e^{(\frac{1}{2}\cdot 2^2)^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\Delta y = e^4(4\Delta x + 2\Delta y).$$

Kravet er oppfylt når $|\Delta V| \leq 1$, noe som omtrentlig holder når

$$e^4|4\Delta x + 2\Delta y| \leq 1,$$

altså når

$$|2\Delta x + \Delta y| \leq 1/2e^4 \approx 0.009.$$

Et nyttigere svar er kanskje at kravet holder omtrentlig når $2|\Delta x| + |\Delta y| \leq 0.009$.

Oppgave 07.06.

Ved innsetting får vi

$$w = f(x(t), y(t)) = \sin\frac{\pi}{4t} + (\arctan t)\cdot\tan\frac{\pi}{4t}.$$

Derivasjon med hensyn på t gir da

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\cos\frac{\pi}{4t}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{4t^2}\right) + \frac{1}{1+t^2}\cdot\tan\frac{\pi}{4t} + (\arctan t)\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4t}}\left(-\frac{\pi}{4t^2}\right)$$

slik at

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=1} &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4} + (\arctan 1)\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{1/2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Ved kjederegelen gjelder

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \left((\cos x^2)2x + y\frac{1}{\cos^2 x^2}\cdot 2x\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi/4t}}\left(-\frac{\pi}{4t^2}\right) + (\tan x^2)\cdot\frac{1}{1+t^2} \\ &= \left(\cos x^2 + \frac{y}{\cos^2 x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{\pi/4t}}\left(-\frac{\pi}{4t^2}\right) + \frac{\tan x^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

For $t = 1$ er $x = \sqrt{\pi/4}$ og $y = \pi/4$, slik at

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=1} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + \frac{\pi/4}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\right)\cdot 1\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\tan\frac{\pi}{4}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi^2}{8}.$$

Oppgave 07.07.

Produktregelen gir

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dR}{dt} \cdot I + R \cdot \frac{dI}{dt}$$

som er akkurat det samme som vi får ved kjederegelen. Vi løser med hensyn på dI/dt og får

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{R}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{dR}{dt} \cdot I\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{dR}{dt}\,\frac{V}{R}\right).$$

Oppgave 07.08.

Volumet av isblokken er $V = \pi r^2 h$, slik at ved produktregelen gjelder

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot h + r^2 \cdot \frac{dh}{dt}\right).$$

Vi velger å bruke dm som lengdeenhet og time som tidsenhet. Da er $r = 5$, $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{20}$, $h = 10$ og $\frac{dh}{dt} = -0.3$, og vi får at

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(10 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) \cdot 10 + 25 \cdot (-0.3)\right) = -\pi(5+7.5) = -12.5\pi\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{time} = -12.5\pi\,\ell/\mathrm{time}.$$

Konklusjon: volumet avtar med hastighet $12.5\pi\,\ell/\mathrm{time}$ i det gitte øyeblikket.

Oppgave 07.09.

a) Funksjonsverdien for $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4y$ i punktet $(1, -2)$ er ifølge oppgaven lik 1. Vi ser lett at det stemmer. Videre er

$$f_x(x, y) = 2x, \qquad f_y(x, y) = 4y + 4.$$

Tangentplanet har derfor en ligning

$$\begin{aligned}
z &= f(1, -2) + f_x(1, -2)(x - 1) + f_y(1, -2)(y + 2) \\
z &= 1 + 2(x - 1) - 4(y + 2) \\
z &= 2x - 4y - 9.
\end{aligned}$$

b) Flaten S er en nivåflate for funksjonen

$$F(x, y, z) = x^3 \cos z + xy^2 \sin z.$$

Punktet $(1, -2, 0)$ ligger ifølge oppgaven på nivåflaten $F(x, y, z) = 1$. Det er lett å se at det stemmer. Gradientvektoren til F er

$$\nabla F(x, y, z) = \langle 3x^2 \cos z + y^2 \sin z,\ 2xy \sin z,\ -x^3 \sin z + xy^2 \cos z \rangle,$$

slik at

$$\nabla F(1, -2, 0) = \langle 3 \cos 0 + 4 \sin 0,\ -4 \sin 0,\ -\sin 0 + 4 \cos 0 \rangle = \langle 3,\ 0,\ 4 \rangle.$$

Dette er en normalvektor til tangentplanet. Tangentplanet har derfor en ligning

$$\begin{aligned}
\langle 3,\ 0,\ 4 \rangle \cdot \langle x - 1,\ y + 2,\ z - 0 \rangle &= 0 \\
3(x - 1) + 0(y + 2) + 4(z - 0) &= 0 \\
3x + 4z &= 3.
\end{aligned}$$

Oppgave 07.10.

$f(x,y)$ er kontinuerlig overalt, unntatt muligvis i punkter på sirkelen (skjøten) $x^2+y^2=1$.

La (a,b) være et punkt på denne sirkelen, slik at $a^2+b^2=1$. Da er f kontinuerlig i (a,b) dersom

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) = a+b^2.$$

Dette holder opplagt når $(x,y)\to(a,b)$ utenfra eller langs sirkelen. Vi må sjekke hva som skjer når $(x,y)\to(a,b)$ fra innsiden av sirkelen. Da er

$$f(x,y) = x^2+y \to a^2+b \qquad \text{som vi vil skal være} \qquad = a+b^2.$$

Dette holder dersom

$$a^2-a = b^2-b$$
$$a(a-1) = b(b-1),$$

noe som er mulig hvis og bare hvis enten $a=0$ og $b=1$, eller $a=1$ og $b=0$, eller $a=b$ som betyr at $a=b=1/\sqrt{2}$ eller $a=b=-1/\sqrt{2}$ (fordi $a^2+b^2=1$).

Konklusjon: $f(x,y)$ er diskontinuerlig i alle punktene på sirkelen $x^2+y^2=1$ unntatt i punktene

$$(0,1), \quad (1,0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{og} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(Synes du løsningen av ligningssystemet

$$(1) \quad a^2+b^2=1, \qquad (2) \quad a^2-a=b^2-b$$

var for lettvint? Du får akkurat samme resultat om du løser den ene med hensyn på a og setter inn i den andre.)

Oppgave 07.11.

a)

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \langle y \tan x \sec x, \sec x\rangle \\
D_{\mathbf{v}} f(P) &= \nabla f(P)\cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left\langle \frac{1}{2}\tan\pi\sec\pi, \sec\pi \right\rangle \cdot \frac{\langle 3,-1\rangle}{\sqrt{3^2+1^2}} \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(-1), -1 \right\rangle \cdot \frac{\langle 3,-1\rangle}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left\langle \frac{1}{1+(xy+z)^2}\cdot y, \frac{1}{1+(xy+z)^2}\cdot x, \frac{1}{1+(xy+z)^2}\cdot 1 \right\rangle \\
D_{\mathbf{v}} f(P) &= \nabla f(P)\cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left\langle \frac{1/2}{1+(\pi/4)^2}, \frac{\pi/2}{1+(\pi/4)^2}, \frac{1}{1+(\pi/4)^2} \right\rangle \cdot \frac{\langle 1,-2,2\rangle}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \\
&= \frac{1}{1+\pi^2/16}\cdot\left(\frac{1}{2}-\pi+2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{5-2\pi}{16+\pi^2}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 07.12.

Ifølge oppgavens opplysninger er $\nabla f(P)\cdot\mathbf{i} = 3$ og $\nabla f(P)\cdot\mathbf{j} = -2$, slik at $\nabla f(P) = \langle 3,-2\rangle$. Den retningsderiverte til f i punktet P og retning $\mathbf{v} = \langle 3,2\rangle$ er derfor gitt ved

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = \nabla f(P)\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \langle 3,-2\rangle\cdot\frac{\langle 3,2\rangle}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{9-4}{\sqrt{13}} = \frac{5}{13}\sqrt{13}.$$

Oppgave 07.13.

a) $f(x,y) = x^2 - 4x^3y^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2x$.

Siden f er partiellderiverbar for alle (x,y), er de kritiske punktene (x,y) gitt ved at både

$$f_x(x,y) = 2x - 12x^2y^2 + 2 = 0 \quad \text{og} \quad f_y(x,y) = -8x^3y + y = 0.$$

Det gir to ligninger for bestemmelse av x og y:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x - 6x^2y^2 + 1 = 0 \\ &(2) \quad (1 - 8x^3)y = 0. \end{aligned}$$

Av (2) følger det at $y = 0$ og $x = 1/2$ er de to eneste mulighetene.

Tilfelle 1: $y = 0$.
Av (1) følger det da at $x = -1$, slik at $(-1,0)$ er et kritisk punkt.

Tilfelle 2: $x = 1/2$.
Av (1) følger det da at

$$\frac{1}{2} - \frac{6}{4}y^2 + 1 = 0, \quad \text{det vil si,} \quad y^2 = 1,$$

slik at $(\frac{1}{2},1)$ og $(\frac{1}{2},-1)$ også er kritiske punkter.

Klassifisering av de tre kritiske punktene $(-1,0)$, $(\frac{1}{2},1)$ og $(\frac{1}{2},-1)$:
Vi studerer

$$F = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2,$$

det vil si,

$$F(x,y) = (2 - 24xy^2)(-8x^3 + 1) - (24x^2y)^2,$$

og får

$$\begin{aligned} F(-1,0) &= 2 \cdot (8+1) - 0^2 > 0, \\ F(\tfrac{1}{2},1) &= (2-12)(-1+1) - (24 \cdot \tfrac{1}{4})^2 < 0, \\ F(\tfrac{1}{2},-1) &= (2-12)(1+1) - (24 \cdot \tfrac{1}{4})^2 < 0. \end{aligned}$$

Konklusjon: Punktene $(\frac{1}{2},1)$ og $(\frac{1}{2},-1)$ er salpunkter, mens $(-1,0)$ er et lokalt minimum fordi $f_{xx}(-1,0) > 0$.

b) $f(x,y,z) = x^2 + xz^2 + y^3$.

Siden f er partiellderiverbar for alle (x, y, z), er de kritiske punktene (x, y, z) gitt ved at både

$$f_x(x, y, z) = 2x + z^2 = 0, \quad f_y(x, y, z) = 3y^2 = 0 \quad \text{og} \quad f_z(x, y, z) = 2xz = 0.$$

Dette betyr at f har bare ett eneste kritisk punkt, nemlig origo. Dette er et salpunkt fordi $f(0,0,0) = 0$ mens

$$f(0, y, 0) = y^3 \ \text{er} \ \begin{cases} > 0 & \text{for } y > 0, \\ < 0 & \text{for } y < 0. \end{cases}$$

Oppgave 07.14.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 - 5$.

Vi sjekker først randpunktene til D, det vil si, punktene på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. Der er $x^2 = 1 - y^2$, slik at

$$f(x,y) = 1 - (1-y^2)y^2 - 5 = -y^2 + y^4 - 4 =: g(y).$$

Ved å finne de kritiske punktene for $g(y)$ kan man finne randkandidatene til maksimums- og minimumspunktene. Men vi kan også gjøre det litt enklere:

$$g(y) = y^4 - y^2 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - 4 = (y^2 - \tfrac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}$$

som viser at største verdi på randen oppnås i punkter som maksimerer kvadratet, nemlig for $y^2 = 1$ og $y^2 = 0$, og at minste verdi på randen oppnås i punkter som minimerer kvadratet, nemlig $y^2 = \frac{1}{2}$.

Dette betyr at største verdi på randen er $g(\pm 1) = g(0) = -4$ og at minste verdi på randen er $g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = -17/4$.

Dernest sjekker vi for kritiske punkter i D der

$$f_x(x,y) = 2x - 2xy^2 = 0 \quad \text{og} \quad f_y(x,y) = 2y - 2yx^2 = 0.$$

Den første ligningen viser at $x = 0$ og $y^2 = 1$ er de eneste mulighetene. Setter vi $x = 0$ inn i den andre ligningen, ser vi at også $y = 0$ er nødvendig, slik at $(0,0)$ er et kritisk punkt. Punktene der $y^2 = 1$ ligger på randen av D og er derved allerede kontrollert. Siden $f(0,0) = 0$, har vi følgende konklusjon:

Den største verdien $f(x,y)$ tar i D er 0, mens den minste verdien er $-17/4$.

b) Randen består av de tre linjestykkene

$$\begin{aligned}
L_1 : &\qquad y = \frac{x}{3} \quad \text{for } 0 \le x \le 3,\\
L_2 : &\qquad y = 3x - 8 \quad \text{for } 3 \le x \le 4,\\
L_3 : &\qquad y = x \quad \text{for } 0 \le x \le 4.
\end{aligned}$$

På L_1 er funksjonsverdien

$$g_1(x) = f(x, \tfrac{x}{3}) = x^2 \cdot \frac{x}{3} - x \cdot \frac{x}{3} - x = \frac{1}{3}(x^3 - x^2 - 3x) \quad \text{for } 0 \le x \le 3,$$

der $g_1(0) = f(0,0) = 0$ og $g_1(3) = f(3,1) = \frac{1}{3}(27-9-9) = 3$.
Videre er $g_1'(x) = 0$ dersom

$$\begin{aligned} &3x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &x = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}. \end{aligned}$$

Bare $(1+\sqrt{10})/3$ ligger i intervallet $(0,3)$. Siden

$$g_1\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2 - 3\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) = -\frac{29+20\sqrt{10}}{81} \approx -1.1388,$$

er $g_1((1+\sqrt{10})/3) \approx -1.1388$ og $g_1(3) = 9$ de eneste kandidatene på L_1.

På L_2 er funksjonsverdien

$$g_2(x) = f(x, 3x-8) = x^2(3x-8) - x(3x-8) - x = 3x^3 - 11x^2 + 7x \quad \text{for } 3 \le x \le 4.$$

Vi vet fra før at $g_2(3) = f(3,1) = 0$. Vi har også at $g_2(4) = f(4,4) = 44$. Videre er

$$g_2'(x) = 9x^2 - 22x + 7 = 0$$

for

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 - 4\cdot 63}}{18} = \frac{11 \pm \sqrt{58}}{9} \approx \begin{cases} 2.06841 \\ 0.3760, \end{cases}$$

men disse to kritiske punktene ligger utenfor intervallet for x.

På L_3 er funksjonsverdien

$$g_3(x) = f(x,x) = x^3 - x^2 - x \qquad \text{for } 0 \le x \le 4.$$

Videre er $g_3'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ for

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -1/3 \end{cases}$$

der det bare er $x = 1$ som ligger i intervallet for x. Der er $g_3(1) = f(1,1) = -1$.

Konklusjon: Absolutt maksimum for $f(x,y)$ på det lukkede området D er gitt ved
$g_2(4) = f(4,4) = 44$, og absolutt minimum er gitt ved

$$g_1\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) = f\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{9}\right) = -\frac{29+20\sqrt{10}}{81} \approx -1.1388.$$

c)

På kuleflaten er $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ og derved funksjonsverdien lik

$$f(\sqrt{1-y^2-z^2},\ y,\ z) = g(y,z) = 1 + z^2.$$

Det er derfor klart at f tar sin største verdi på flaten i punktene $(0,0,\pm 1)$ der funksjonsverdien er 2, og sin minste verdi på flaten i punktene langs ekvator der $z = 0$ og $x^2 + y^2 = 1$, og derved $f(x, y, 0) = 1$.

De kritiske punktene til f er punktene der

$$f_x(x, y, z) = 2x = 0, \quad f_y(x, y, z) = 2y = 0 \quad \text{og} \quad f_z(x, y, z) = 4z = 0.$$

Det eneste kritiske punktet ligger altså i origo der funksjonsverdien er $f(0,0,0) = 0$.

Konklusjon: f har absolutt maksimum $f(0,0,1) = f(0,0,-1) = 2$ og absolutt minimum $f(0,0,0) = 0$.

Oppgave 07.15. Verdien

$$z = \frac{8}{3}x^3 + 4y^3 - x^4 - y^4 = f(x,y)$$

er et uttrykk for høyden i flaten i punktet (x, y, z). Vi vil maksimere z. Det er klart at når (x, y) fjerner seg mer og mer fra origo, vil $z \to -\infty$ fordi $(x^4 + y^4)$ vil dominere uttrykket. Altså må det finnes et maksimum. Det må ligge i et kritisk punkt. Det vil si,

$$(1) \quad 8x^2 - 4x^3 = 0 \qquad\qquad (2) \quad 12y^2 - 4y^3 = 0.$$

Av (1) ser vi at $x = 0$ eller $x = 2$ er de eneste mulighetene, og av (2) at $y = 0$ og $y = 3$ er de eneste mulighetene. Det gir de fire kritiske punktene $(0,0)$, $(0,3)$, $(2,0)$ og $(2,3)$, der funksjonsverdiene er

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,3) = 4 \cdot 27 - 81 = 27,$$
$$f(2,0) = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3} \quad \text{og} \quad f(2,3) = \frac{64}{3} + 4 \cdot 27 - 16 - 81 = \frac{16}{3} + 27 = \frac{97}{3} \approx 32.33.$$

Konklusjon: Det høyeste punktet på flaten er punktet $\left(2, 3, \frac{97}{3}\right)$.

Oppgave 07.16.

La (x, y, z) være et punkt i planet. Da er $z = 14 - 2x - 3y$, og avstanden mellom (x, y, z) og $(-7, 7, 0)$ er

$$d(x, y) = \sqrt{(x+7)^2 + (y-7)^2 + (z-0)^2}.$$

Vi skal minimalisere $d(x, y, z)$. Det er klart ut fra situasjonen at minimum inntreffer i ett punkt, for avstanden bare øker når (x, y, z) flyttes langt vekk fra origo.

Minimum for $d(x, y)$ inntreffer i det samme punktet som minimum for

$$f(x, y) = d(x, y)^2 = (x+7)^2 + (y-7)^2 + (14 - 2x - 3y)^2.$$

Minimum må inntreffe i et kritisk punkt for $f(x, y)$ der

$$f_x(x, y) = 2(x+7) + 2(14 - 2x - 3y)(-2) = 0, \quad \text{det vil si,} \quad 5x + 6y = 21$$
$$f_y(x, y) = 2(y-7) + 2(14 - 2x - 3y)(-3) = 0, \quad \text{det vil si,} \quad 6x + 10y = 49.$$

Av den øverste av disse to ligningene følger det at $x = \dfrac{21 - 6y}{5}$, som innsatt i den andre gir

$$\begin{aligned} \frac{126 - 36y}{5} + 10y &= 49 \\ \frac{14y}{5} &= 49 - \frac{126}{5} \\ 14y &= 119 \\ y &= \frac{17}{2}, \qquad x = \frac{21 - 6y}{5} = \frac{21 - 51}{5} = -6. \end{aligned}$$

Minimum for f inntreffer altså i punktet $(-6, \frac{17}{2})$. I dette punktet er $z = 14 + 12 - \frac{51}{2} = \frac{1}{2}$.

Konklusjon: Punktet i planet som ligger nærmest punktet $(-7, 7, 0)$ er punktet $(-6, \frac{17}{2}, \frac{1}{2})$.

Oppgave 07.17.

Det er nok å vise at gradientene til

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \quad \text{og} \quad g(x,y,z) = ax^2 + by^2 - z^2$$

står normalt på hverandre i ethvert punkt på skjæringskurvene mellom de to flatene. Dette følger fordi $\nabla f(x,y,z)$ og $\nabla g(x,y,z)$ er normalvektorer til nivåflaten gjennom punktet (x,y,z) for henholdsvis f og g, altså til de to flatene i oppgaven. Vi har

$$\nabla f(x,y,z) = \langle 2x, 2y, 2z\rangle \quad \text{og} \quad \nabla g(x,y,z) = \langle 2ax, 2by, -2z\rangle,$$

og derved

$$\nabla f(x,y,z)\cdot\nabla g(x,y,z) = \langle 2x, 2y, 2z\rangle\cdot\langle 2ax, 2by, -2z\rangle = 4ax^2+4by^2-4z^2 = 4g(x,y,z).$$

Siden $g(x,y,z) = 0$ for alle punktene på skjæringskurvene, og $\nabla f(x,y,z) \neq \mathbf{0}$ og $\nabla g(x,y,z) \neq \mathbf{0}$ på disse, betyr dette at $\nabla f(x,y,z) \perp \nabla g(x,y,z)$, og påstanden er bevist.