Oppgave 05.01.

a) Tallfølgen $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$ konvergerer mot 0. Dette følger av sandwich-teoremet fordi

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

der $-\frac{1}{n} \to 0$ og $\frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$.

b) Tallfølgen $\left\{(-1)^n e^{-n}\right\}$ konvergerer mot null fordi $e^{-n} \to 0$ når $n \to \infty$.

c) Dersom tallfølgen $\{a_n\}$ konvergerer, må den konvergere mot et tall $a \geq 0$ gitt ved $a = \sqrt{1+a}$. Det vil si,

$$\begin{aligned} a^2 &= 1 + a \\ a^2 - a - 1 &= 0 \\ a &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

der bare + foran rottegnet er mulig når $a \geq 0$. Legg spesielt merke til at $a^2 = 1 + a$.

Det gjenstår å vise at $\{a_n\}$ konvergerer. Det er nok å vise at $\{a_n\}$ er begrenset og avtakende. Vi har:

1. $a_1 = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 < a_0 = 3$ og $a_1 > a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Anta at $a_n > a$. Da er $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} > \sqrt{1+a} = \sqrt{a^2} = a$ og $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < a_n$ fordi $1 + a_n < a_n^2$ når $a_n > a$, noe vi ser ved å studere $f(x) = 1 + x - x^2$: vi vet at $f(a) = 0$. Siden $f'/x) = 1 - 2x < 0$ for $x > a$, er $f(x) < f(a) = 0$ for $x > a$.

At $\{a_n\}$ er begrenset og avtakende følger derfor ved induksjon.

Konklusjon: tallfølgen konvergerer mot $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) Det er nok å vise at grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \ln(n^{1/n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ eksisterer. Og det gjør den. Vi ser for eksempel ved hjelp av L'Hôpitals regel at $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Altså konvergerer tallfølgen mot $e^0 = 1$.

Oppgave 05.02.

Faktoren for rekken er $r = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$. De to neste leddene er derfor

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \text{og} \quad -1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 05.03.

a) Faktoren for rekken er $r = \dfrac{1/16}{1/8} = \dfrac{1}{2}$. Det første leddet er naturligvis $a = \dfrac{1}{8}$. Summen av rekken er derfor

$$S = \frac{1/8}{1-r} = \frac{1}{8\cdot(1/2)} = \frac{1}{4}.$$

Summen av de n første leddene er

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1(1-1/2^n)}{8(1-1/2)} = \frac{1-1/2^n}{4},$$

slik at

$$S - S_n = \frac{1}{4} - \frac{1-1/2^n}{4} = \frac{1/2^n}{4} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Kravet $|S - S_n| < 0.01$ holder derfor for

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{n+2}} < 0.01\\
&\frac{1}{0.01} < 2^{n+2}\\
&2^{n+2} > 100\\
&n+2 > \log_2 100 = \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6.64,
\end{aligned}$$

det vil si for $n \geq n_0 = 5$.

b) Faktoren for rekken er $r = \dfrac{-1/3^6}{1/3^5} = -\dfrac{1}{3}$. Det første leddet er naturligvis $a = \dfrac{1}{3^5}$. Summen av rekken er derfor

$$S = \frac{1/3^5}{1-r} = \frac{1}{3^5(1+1/3)} = \frac{1}{3^4\cdot 4} = \frac{1}{324}.$$

Summen av de n første leddene er

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1(1-(-1/3)^n)}{3^5(1+1/3)} = \frac{1-(-1/3)^n}{324},$$

slik at

$$S - S_n = \frac{1}{324} - \frac{1-(-1/3)^n}{324} = \frac{(-1/3)^n}{324}.$$

Kravet $|S - S_n| < 0.01$ holder derfor når

$$\begin{aligned}
\frac{1}{324 \cdot 3^n} &< 0.01 \\
\frac{1}{324 \cdot 0.01} &< 3^n \\
3^n &> 0.3
\end{aligned}$$

som naturligvis holder for alle $n \geq n_0 = 1$.

c) Faktoren for rekken er $r = \dfrac{\sin^2 1}{\sin 1} = \sin 1$. Det første leddet er naturligvis $a = \sin 1$. Summen av rekken er derfor

$$S = \frac{\sin 1}{1-r} = \frac{\sin 1}{1 - \sin 1}.$$

Summen av de n første leddene er

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{(\sin 1)(1 - \sin^n 1)}{1 - \sin 1},$$

slik at

$$S - S_n = \frac{\sin 1}{1 - \sin 1} - \frac{(\sin 1)(1 - \sin^n 1)}{1 - \sin 1} = \frac{\sin^{n+1} 1}{1 - \sin 1}.$$

Kravet $|S - S_n| < 0.01$ holder derfor når

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^{n+1} 1}{1 - \sin 1} &< 0.01 \\
(\sin 1)^{n+1} &< 0.01 \cdot (1 - \sin 1) \\
(n+1) \ln(\sin 1) &< \ln(0.01(1 - \sin 1)) \\
n + 1 &> \frac{\ln(0.01(1 - \sin 1))}{\ln(\sin 1)} \approx 37.35
\end{aligned}$$

som holder for alle $n \geq n_0 = 37$.

(Husk at $\sin 1 < 1$, så $\ln(\sin 1) < 0$, og man må snu ulikhetstegnet når man multipliserer en ulikhet med et negativt tall.)

Oppgave 05.04.

a) Rekken konvergerer ganske sakte siden summen er 4, mens vi bare er kommet til sum 3 etter å ha addert de 100 første leddene. Det er derfor naturlig å gjette at $|r|$ er nær 1.

b) For å bestemme a og r har vi de to ligningene

$$\frac{a}{1-r} = 4 \quad \text{og} \quad \frac{a(1-r^{100})}{1-r} = 3.$$

Vi setter uttrykket for $a/(1-r)$ inn i den andre ligningen og får

$$\begin{aligned} \frac{a(1-r^{100})}{1-r} = 4(1-r^{100}) &= 3 \\ 1-r^{100} &= \frac{3}{4} \\ r^{100} &= 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ r &= \left(\frac{1}{4}\right)^{1/100} \approx 0.9862. \end{aligned}$$

Innsatt i den første ligningen viser det at $a = 4(1-r) = 4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{1/100}\right) \approx 0.055069.$

Oppgave 05.05.

a) Vi velger å bruke integraltesten. Det vil si, vi sammenligner rekken med det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^T x^{-3/2}dx = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^T = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{T}}-\frac{-2}{\sqrt{1}}\right) = 2.$$

Siden integralet konvergerer, konvergerer også rekken (men til en annen verdi).

b) Vi velger å bruke integraltesten. Det vil si, vi sammenligner rekken med det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/5}}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^T x^{-4/5}dx = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{x^{1/5}}{1/5}\right]_1^T = \lim_{T\to\infty}\left[5\cdot x^{1/5}\right]_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(5\cdot T^{1/5}-5\right) = \infty.$$

Siden integralet divergerer, divergerer også rekken.

c) Vi velger å bruke forholdstesten for å teste om rekken konvergerer absolutt:

$$\left|\frac{(-3)^{n+1}/(n+1)!}{(-3)^n/n!}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}}{(-3)^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{3}{n+1} \to 0 \text{ når } n\to\infty.$$

Altså konvergerer rekken.

d) Vi velger å bruke grensesammenligningstesten. Siden

$$n^{1/n-1} = \frac{n^{1/n}}{n}$$

der

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n^{1/n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$$

ved bruk av L'Hôpitals regel, og derved $n^{1/n}\to e^0 = 1$ når $n\to\infty$, er det naturlig å sammenligne med den harmoniske rekken $\sum 1/n$ som divergerer. Vi har

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/n-1}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Derfor divergerer også rekken i oppgaven.

e) Siden

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n\cdot (n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

velger vi å bruke grensesammenligningstesten der vi sammenligner med rekken $\sum 1/n^2$:

$$\frac{1/(n+1)(n+2)}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(1+1/n)(1+2/n)} \to 1 \quad \text{når } n\to\infty.$$

Siden $\sum 1/n^2$ konvergerer, konvergerer også rekken i oppgaven (men til en annen verdi).

f) Siden

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{for store } n,$$

er det naturlig å sammenligne med rekken $\sum 1/(2n) = \frac{1}{2}\sum 1/n$ som divergerer:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{2n} \quad \text{for } n\geq 2.$$

Derfor divergerer også rekken i oppgaven.

g) For veldig store n er

$$\frac{n^2-3}{n^3+8n^2+1} \approx \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n},$$

så det er naturlig å bruke grensesammenligningstesten der vi sammenligner med den harmoniske rekken $\sum 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-3)/(n^3+8n^2+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3n}{n^3+8n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3/n^2}{1+8/n+1/n^3} = 1.$$

Siden den harmoniske rekken divergerer, divergerer også rekken i oppgaven.

h) Vi velger å bruke grensesammenligningstesten der vi sammenligner med den konvergente rekken $\sum 1/n^{3/2}$ (at denne siste rekken konvergerer følger av oppgave 05.05a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n^2}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

L'Ĥopitals regel viser at denne grenseverdien er lik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(2\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0.$$

Altså konvergerer også rekken i oppgaven.

Oppgave 05.06.

a) Vi bruker først forholdstesten for å sjekke absolutt konvergens:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(5x)^{n+1}}{(5x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|5x| = 5|x| < 1 \quad \text{for } |x| < 1/5.$$

Rekken konvergerer altså absolutt for $|x| < \frac{1}{5}$ og divergerer for $|x| > \frac{1}{5}$. Det gjenstår å kontrollere for $x = \pm\frac{1}{5}$. Men for disse verdiene av x har alle leddene i rekken absoluttverdi 1, så rekken divergerer.

Konklusjon: rekken konvergerer absolutt for $|x| < \frac{1}{5}$ og divergerer for $|x| \geq \frac{1}{5}$.

b) Vi bruker først forholdstesten for å sjekke absolutt konvergens:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}/3^{n+1}}{x^{2n}/3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\right| = \left|\frac{x^2}{3}\right| < 1 \quad \text{for } |x| < \sqrt{3}.$$

Rekken konvergerer altså absolutt for $|x| < \sqrt{3}$ og divergerer for $|x| > \sqrt{3}$. Det gjenstår å kontrollere for $x = \pm\sqrt{3}$. Men for disse verdiene av x har alle leddene i rekken absoluttverdi 1, så rekken divergerer.

Konklusjon: rekken konvergerer absolutt for $|x| < \sqrt{3}$ og divergerer for $|x| \geq \sqrt{3}$.

c) Vi bruker først forholdstesten for å sjekke absolutt konvergens:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{2(n+1)+1}/(n+1)(n+2)}{(x+1)^{2n+1}/n(n+1)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{2n+3}}{(x+1)^{2n+1}}\cdot\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x+1)^2}{n+2}\right| = |x+1|^2 < 1 \quad \text{for } |x+1| < 1.\end{aligned}$$

Rekken konvergerer altså absolutt for $|x+1| < 1$ og divergerer for $|x+1| > 1$. Det gjenstår å kontrollere for $x+1 = \pm 1$. For $x+1 = 1$, altså, $x = 0$, har leddene i rekken formen $1/n(n+1) < \frac{1}{n^2}$. Siden $\sum 1/n^2$ konvergerer, konvergerer også $\sum 1/n(n+1)$ (sammenligningstesten).

For $x+1 = -1$ har leddene formen $-1/n(n+1)$, slik at rekken konvergerer absolutt også for denne verdien av x.

Konklusjon: rekken konvergerer absolutt for $|x+1| \leq 1$ og divergerer for $|x+1| > 1$.

d) Vi bruker først forholdstesten for å sjekke absolutt konvergens:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-x)^{n+1}/(n+1)}{(1-x)^n/n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\right| = |x-1| < 1 \quad \text{for } x \in (0,2).$$

Rekken konvergerer altså absolutt for $|x-1| < 1$ og divergerer for $|x-1| > 1$. Det gjenstår å kontrollere for $x-1 = \pm 1$. For $x-1 = -1$, altså, $x = 0$, har leddene i rekken formen $(-1)^n/n$. Rekken konvergerer derfor ved alternerende rekketesten.

For $x-1 = 1$ har leddene formen $1/n$, slik at rekken divergerer. Det betyr også at konvergensen bare er betinget for $x = 0$.

Konklusjon: rekken konvergerer absolutt for $|x-1| < 1$, den konvergerer betinget for $x = 0$ og divergerer for alle andre verdier av x.

Oppgave 05.07.

a) Rekken konvergerer ved integraltesten fordi

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^{4/3}} = \lim_{T\to\infty}\int_a^T x^{-4/3}dx = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{x^{-4/3+1}}{-4/3+1}\right]_a^T = \lim_{T\to\infty}\left(-3T^{-1/3}+3a^{-1/3}\right) = \frac{3}{a^{1/3}}$$

for $a > 0$. La S være summen av rekken og S_n være summen av de n første leddene i rekken. Da er

$$0 < S-S_n \le a_{n+1}+\int_{n+1}^\infty x^{-4/3}dx = \frac{1}{(n+1)^{4/3}}+\frac{3}{(n+1)^{1/3}} = \frac{1}{(n+1)^{1/3}}\left(\frac{1}{n+1}+3\right) < 0.01$$

for $n = 30\,000\,000$ (30 millioner). (Dette ser vi ved å sette inn ulike verdier for n i uttrykket og kontrollere.)

Det er klart at denne rekken konvergerer fryktelig sakte. Delsummen $S_{30\,000\,000}$ vil ta altfor lang tid å beregne, men den skal gjøre susen. Et problem er likevel at avrundingsfeil vil addere seg opp i denne lange summen, så man må bruke mange nok sikre sifre i mellomregningene.

b) Rekken konvergerer ved alternerende rekketesten. (Den konvergerer faktisk absolutt ved resultatet i a).) La S være summen av rekken og S_n være summen av de n første leddene i rekken. Da er

$$\begin{aligned}|S-S_n| < |a_{n+1}| = (n+1)^{-4/3} &< 0.01\\ (n+1)^{4/3} &> \frac{1}{0.01} = 100\\ n+1 &> 100^{3/4} \approx 31.6,\end{aligned}$$

slik at $n = 31$ vil være stor nok. Det vil si $S \approx S_{31} = -0.7479$ med ønsket nøyaktighet. (Faktisk, siden det siste leddet i S_5 er negativt, er $S > S_5$.)

c) Rekken konvergerer ved alternerende rekke testen.

La S være summen av rekken og S_n være summen av leddene i rekken opp til og med leddet $(-1)^n/(n^2 \ln n)$. Da er

$$|S-S_n| \le |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2\ln(n+1)} < 0.01$$

når $n \ge 7$. (Dette ser vi ved å sette inn ulike verdier for n i utrrykket og kontrollere.) Derfor er

$$S \approx S_7 = \frac{1}{2^2\ln 2}-\frac{1}{3^2\ln 3}+\frac{1}{4^2\ln 4}-\frac{1}{5^2\ln 5}+\frac{1}{6^2\ln 6}-\frac{1}{7^2\ln 7} \approx 0.2848$$

med ønsket nøyaktighet.

Oppgave 05.08.

a) Dette er en geometrisk rekke med faktor $r = -x^2$. Den konvergerer derfor for $|-x^2| < 1$, altså for $|x| < 1$, med verdi

$$f(x) = \frac{\text{første ledd}}{1 - \text{faktoren}} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x \\
&= \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right) dt \\
&= \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^4\,dt - \int_0^x t^6\,dt + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{for } |x| < 1.
\end{aligned}$$

Denne rekken har riktig form. Altså er det Taylorrekken til $\arctan x$ om origo.

Oppgave 05.09.

a) Siden

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{for alle } x,$$

er

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots \quad \text{for alle } x,$$

og derved

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin x^2\,dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots \right) dx \\
&= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \int_9^1 \frac{x^{10}}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^{14}}{7!} dx + \cdots \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} - \frac{x^{15}}{7!\cdot 15} + \cdots \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{5!\cdot 11} - \frac{1}{7!\cdot 15} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot(4n+3)}.
\end{aligned}$$

b) Rekken i a) er en alternerende rekke med monotont avtagende ledd. Ved alternerende rekketesten gjelder derfor at

$$\left| \int_0^1 \sin x^2\,dx - S_n \right| < |a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+1)!\cdot(4n+3)}$$

der

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2n+1)!\cdot(4n+3)} &< 0.002 \\
(2n+1)!\cdot(4n+3) &> \frac{1}{0.002} = 500
\end{aligned}$$

som holder for alle $n \geq 2$. Det vil si,

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{13}{42} \approx 0.3095$$

med den ønskede nøyaktigheten.

Oppgave 05.10.

La

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1.$$

Vi skal manipulere denne rekken slik at vi får rekken i oppgaven. For å få en faktor $(n+1)$ i nevnerne på leddene i rekken, integrerer vi rekken:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^x = -\ln(1-x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{for } |x| < 1.\end{aligned}$$

For å få en faktor n i tellerne på leddene i rekken, vil vi derivere rekken. Problemet er at det gir en faktor $(n+1)$. Derfor dividerer vi først rekken med x. Dette krever at $x \neq 0$, så la oss forutsette dette for øyeblikket:

$$\frac{-\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad \text{for } 0 < |x| < 1.$$

Nå kan vi derivere rekken:

$$\left(\frac{-\ln(1-x)}{x}\right)' = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n+1} \quad \text{for } 0 < |x| < 1.$$

For å få rekken i oppgaven, trenger vi nå bare å multiplisere med x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1} = x \cdot \left(\frac{1}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{for } 0 < |x| < 1.$$

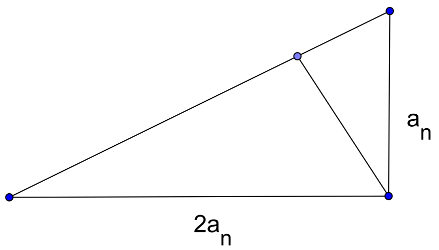
Diskontinuiteten på høyre side er hevbar. Rekken konvergerer derfor mot

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{for } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Oppgave 05.11.

Vinkelen $\angle BAC$ er felles for alle trekantene. Derfor er den ene kateten dobbelt så stor som den andre for alle trekantene. La trekant nummer n ha kateter a_n og $2a_n$. Da er arealet av denne trekanten a_n^2, og vi søker summen

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{der } a_1 = a.$$



Figuren over viser trekant nummer n og delestreken som gir oss trekant nummer $(n+1)$ til venstre. Hypotenusen i trekant nummer n er $\sqrt{(2a_n)^2 + a_n^2} = a_n\sqrt{5}$, slik at arealet av trekant nummer n er

$$a_n^2 = \frac{1}{2}(a_n\sqrt{5}) \cdot a_{n+1},$$

det vil si,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 a_{n-1} = \cdots = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n a.$$

Derved er

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} a\right)^2 = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{a^2}{1-4/5} = 5a^2.$$

Oppgave 05.12.

a) Vi velger å bruke Taylorrekken til $f(x) = e^x$ om origo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{for alle } x$$

som gir

$$f(1) = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

La $P_k(1)$ være summen av de første $k+1$ leddene. Ifølge Taylors restleddsskranke, er

$$|f(1) - P_k(1)| \le \frac{M_k}{(k+1)!} \quad \text{der } |f^{(k+1)}(t)| \le M_k \quad \text{for alle } x \text{ mellom 0 og 1.}$$

Siden $f^{(k)}(x) = e^x$ for alle k, kan vi bruke $M_k = e$ for alle k. Derved er

$$|f(1) - P_k(1)| \le \frac{e}{(k+1)!} < 0.01 \text{ for } (k+1)! > \frac{e}{0.01} = 100e,$$

noe som holder for $k \ge 5$. Altså er

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} \approx 2.17167.$$

b) Vi velger å bruke Taylorrekken til $f(x) = \arctan x$ om origo:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{for } -1 < x \le 1$$

som gir

$$f(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Dette er en alternerende rekke. Ved alternerende rekketesten gjelder

$$\left| f(1) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| \le \frac{1}{2(k+1)+1} = \frac{1}{2k+3}$$

som er < 0.05 når $(2k+3) > 1/0.05 = 20$. Vi kan derfor bruke

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} = \frac{11757173}{14549535} \approx 0.808$$

med ønsket nøyaktighet.

c) Vi velger for eksempel å bruke Taylorrekken til $g(x) = \ln(1+x)$ om origo:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{for } -1 < x \leq 1$$

som gir

$$f(4/3) = \ln\frac{4}{3} = g(1/3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1/3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \cdot n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2\cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} - \cdots .$$

Dette er en alternerende rekke. Ved alternerende rekketesten gjelder

$$\left| g(1/3) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n} \right| \leq \frac{1}{3^{k+1}(k+1)}$$

som er < 0.02 når $3^{k+1}(k+1) > 1/0.02 = 50$, noe som holder for $k+1 \geq 3$. (Dette ser vi ved prøving og feiling.) Vi kan derfor bruke

$$\ln\frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 \cdot 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18} \approx 0.27778$$

med ønsket nøyaktighet.