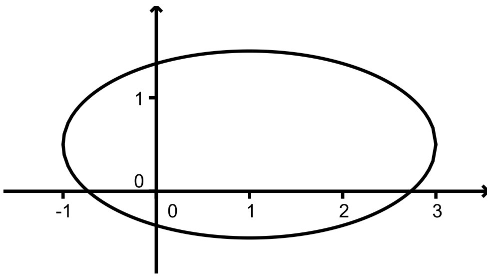
Oppgave 06.01.

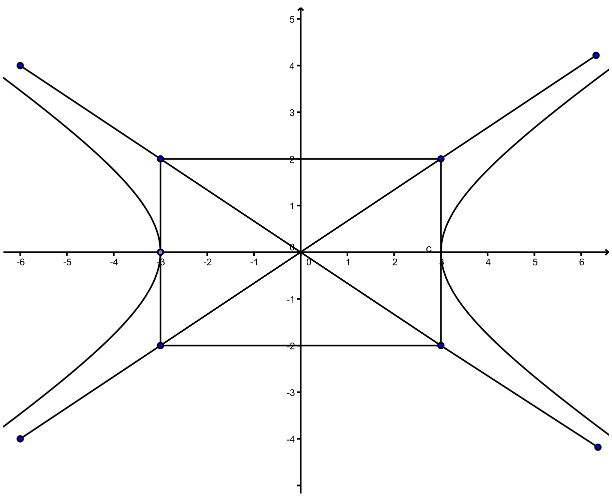
a) Kurven kan skrives som

$$\begin{aligned} x^2-2x+4y^2+4y &= 2 \\ x^2-2x+1+4(y^2+y+\tfrac{1}{4}) &= 2+1+1=4 \\ (x-1)^2+4(y+\tfrac{1}{2})^2 &= 2^2 \\ \frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{1^2} &= 1 \end{aligned}$$

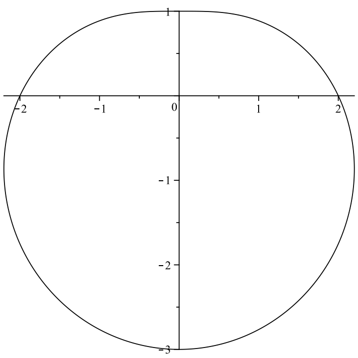
som er ligningen for en ellipse med sentrum i $(1,-\frac{1}{2})$.

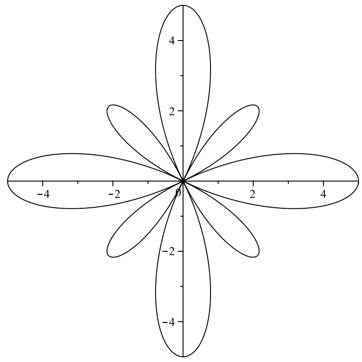


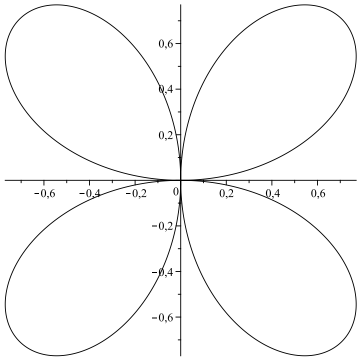
b) Dette er ligningen for en hyperbel med sentrum i origo. For å skissere hyperbelen, tegner vi først rektanglet $-3 \le x \le 3$, $-2 \le y \le 2$ og trekker diagonalene (asymptotene). Det er klart at $x = 0$ aldri kan inntreffe på kurven. Altså ligger hyperbelgrenene til høyre og til venstre for rektanglet.



c), d), e)

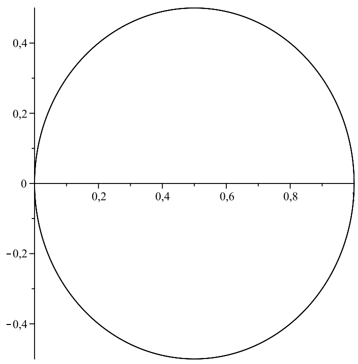


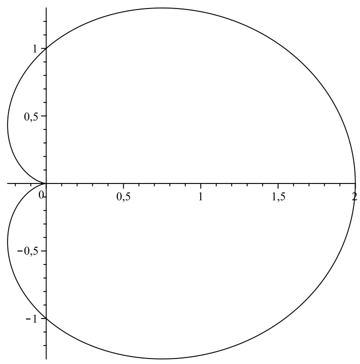


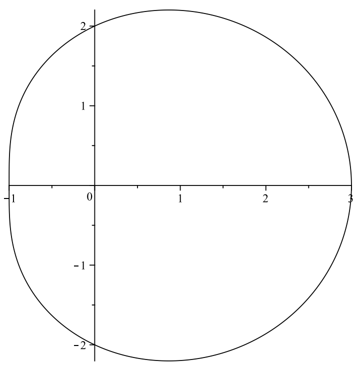


f)

Figurene nedenfor viser de tre tilfellene $a = 0$, $a = 1$ og $a = 2$.







Oppgave 06.02.

Vi observerer først at

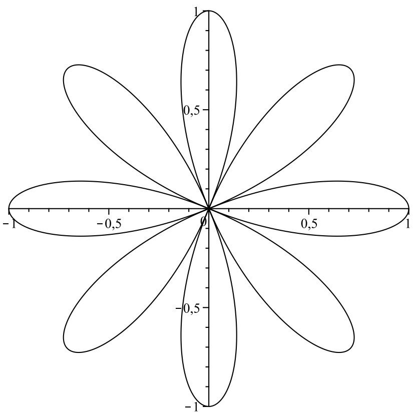
1. $\cos n\theta = 1$ for $n\theta = 2k\pi$ der k er et heltall, det vil si, for $\theta = 2k\pi/n$. Dette gir n forskjellige ytterpunkter $(1, 2k\pi/n)$ (polarkoordinater) for $k = 0, 1, \ldots, n-1$. (Øker vi k ytterligere, tråkker vi bare rundt i samme spor.)

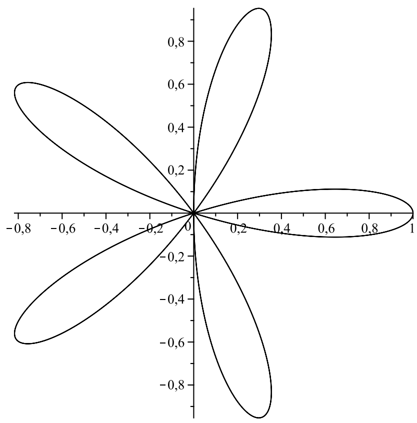
2. $\cos n\theta = -1$ for $n\theta = (2k+1)\pi$ der k er heltall, det vil si, for $\theta = (2k+1)\pi/n$. Dette gir de n ytterpunktene $(-1, (2k+1)\pi/n) = (1, (2k+1)\pi/n + \pi) = (1, (2k+1+n)\pi/n)$.

a) Dersom n er et odde tall, er $2k+1+n$ et jevnt tall, slik at alle ytterpunktene i 2 allerede finnes blant ytterpunktene i 1. Altså er det n ytterpunkter i alt, og derved n kronblader.

b) Dersom n er et jevnt tall, er $2k+1+n$ et odde tall, slik at alle ytterpunktene i 2 er forskjellige fra ytterpunktene i 1. I dette tilfellet får vi altså $2n$ ytterpunkter, og derved $2n$ kronblad.

Figurene nedenfor viser tilfellene $n = 4$ og $n = 5$.

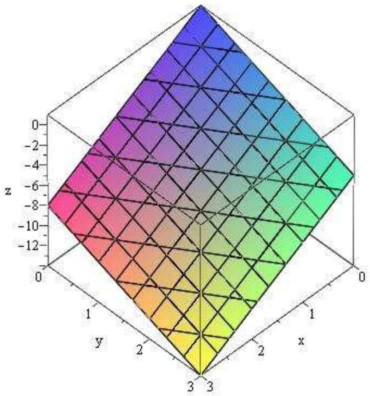


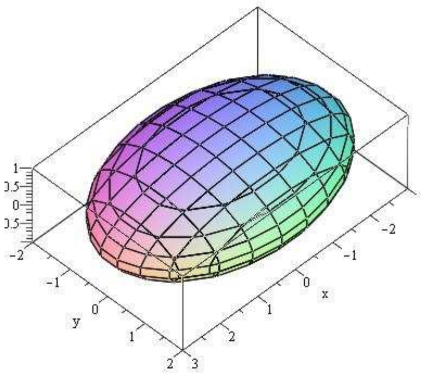


Oppgave 06.03.

a) Flaten er et plan (fordi ligningen er lineær). Planet skjærer koordinataksene i punktene $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0)$ og $(0, 0, 1)$. Du finner flaten skissert nedenfor.

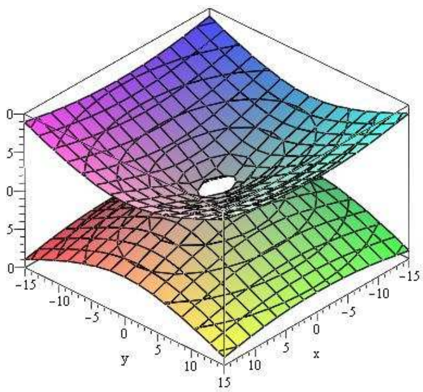
b) Flaten er en ellipsoide med sentrum i origo og halvakser henholdsvis 3, 2 og 1.

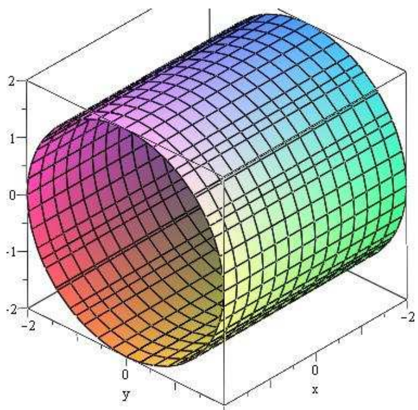




c) Flaten er en elliptisk hyperboloide. Skjæringskurvene mellom flaten og horisontale plan z = konstant er ellipser med sentrum på z-aksen. Ellipsene blir større jo lenger z fjerner seg fra $z = 0$. Du finner flaten skissert nedenfor.

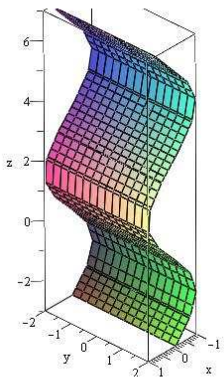
d) Flaten er en sylinder parallell med x-aksen fordi „x mangler" i ligningen. Det er også en rotasjonsflate om x-aksen fordi y, z bare forekommer i par $y^2 + z^2$ i ligningen. Faktisk fremkommer flaten ved å trekke sirkelen $y^2 + z^2 = 2^2$ i yz-planet, parallelt med x-aksen.

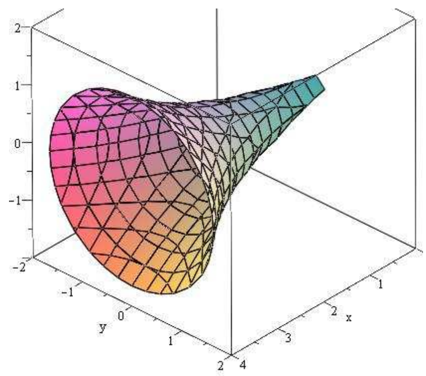




e) Flaten er en sylinder (i matematisk forstand) fordi y mangler i ligningen. Vi kan tegne kurven $x = \sin z$ i xz-planet, og trekke denne parallelt med y-aksen for å få beskrevet flaten. Du finner flaten skissert nedenfor.

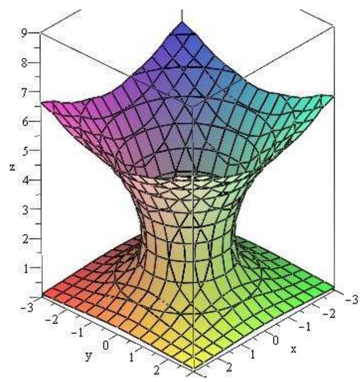
f) Flaten er en rotasjonsflate om x-aksen fordi y, z bare forekommer som par $y^2 + z^2$ i ligningen. Vi kan altså tegne kurven $y^2 = e^x/20$ i xy-planet, og rotere denne kurven for å få beskrevet flaten.

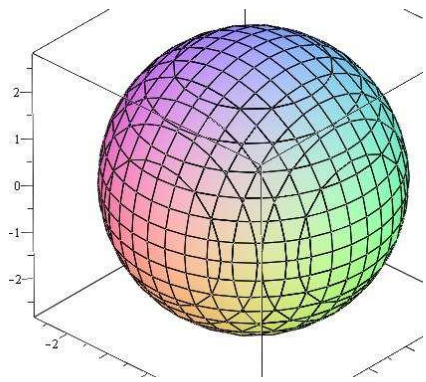




g) Flaten er en rotasjonsflate om z-aksen fordi x, y bare forekommer som par $x^2 + y^2$ i ligningen. (Vi har nemlig at $x^2z^2 + y^2z^2 = z^2(x^2 + y^2)$.) Vi kan derfor tegne kurven $y^2z^2 = e^z$ i yz-planet, og rotere denne om z-aksen for å få beskrevet flaten. Flaten er skissert nedenfor.

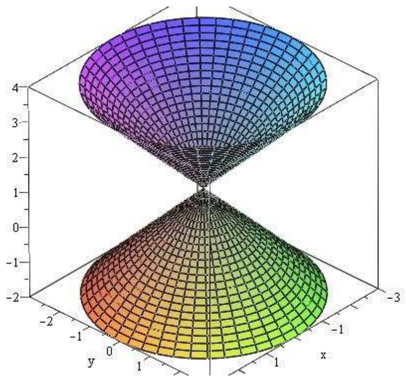
h) Flaten er rett og slett kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ fordi $r^2 = x^2 + y^2$.

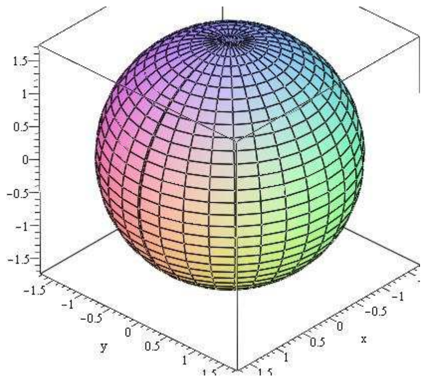




i) Flaten er en rotasjonsflate om z-aksen fordi θ mangler i ligningen. Vi kan derfor tegne linjen $y + 1 = z$ i yz-planet, og rotere denne om z-aksen for å få beskrevet flaten. Flaten er skissert på neste side.

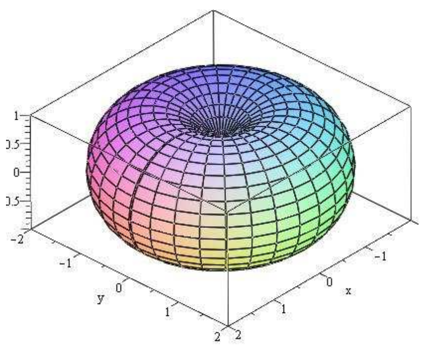
j) Flaten er rett og slett kuleflaten med sentrum i origo og radius $\sqrt{3}$.

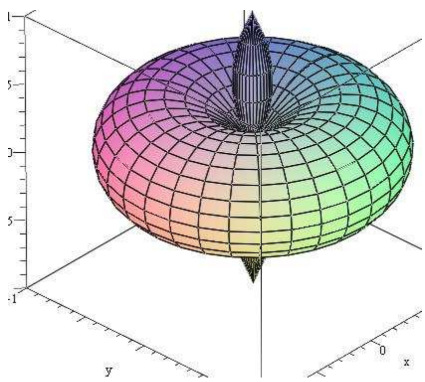




k) Flaten er en rotasjonsflate om z-aksen fordi θ mangler i ligningen. Vi kan derfor tegne kurven ($\rho = 2\sin\varphi$, $\theta = 0$) i xz-planet, for så å rotere denne om z-aksen. Dette gir flaten som er skissert nedenfor.

ℓ) Flaten fremkommer på samme måten som i k).





Oppgave 06.04.

a)

Dette er en sirkel med sentrum i $(1,-1)$ og radius 2. Siden en sirkel med sentrum i origo og radius R har en parameterfremstilling på formen

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t \quad \text{for } 0 \le x < 2\pi,$$

med positiv omløpsretning (mot klokken), kan sirkelen i oppgaven for eksempel parametriseres ved

$$x = 1 + 2\cos t, \quad y = -1 + 2\sin t \quad \text{for } 0 \le t < 2\pi.$$

Også nå er orienteringen mot klokken. Denne parametriseringen følger også ved følgende argument: Vi setter

$$x - 1 = 2\cos t \quad \text{og} \quad y + 1 = 2\sin t$$

fordi $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

b)

Vi setter

$$x = 2\cosh t \quad \text{og} \quad y = \sqrt{2}\sinh t$$

fordi $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Men dette gir bare den ene grenen av hyperbelen (fordi $\cosh t > 0$ for alle t). Den andre grenen får vi ved å sette $x = -2\cosh t$. De to grenene til hyperbelen har derfor en parametrisering på formen

$$(1) \quad x = 2\cosh t, \quad y = \sqrt{2}\sinh t \quad \text{for } -\infty < t < \infty$$

og

$$(2) \quad x = -2\cosh t, \quad y = \sqrt{2}\sinh t \quad \text{for } -\infty < t < \infty.$$

Begge grenene er orientert i retning med voksende y (nedenfra og oppover).

c)

Vi velger å bruke x som parameter. Det gir

$$x = x, \quad y = \sin x \quad \text{for } -\infty < x < \infty.$$

Parametriseringen har gitt kurven en orientering med voksende x (fra venstre mot høyre).

d)

Vi velger å bruke θ som parameter. Det gir

$$x = r\cos\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta, \quad y = r\sin\theta = \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad \text{for } 0 \le \theta \le \pi.$$

(Setter vi $0 \le \theta < 2\pi$, gjennomløpes kurven to ganger.)

Parametriseringen gir kurven en orientering rundt i positiv omløpsretning, altså mot klokken.

e)

Vi velger å bruke θ som parameter. Siden $r^2 \ge 0$, kan vi bare bruke θ-verdier som gjør $\cos 2\theta \ge 0$, det vil si, $-\frac{\pi}{2} \le 2\theta \le \frac{\pi}{2}$ og/eller $2k\pi - \frac{\pi}{2} \le 2\theta \le 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ for et heltall k. Det holder derfor å bruke $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ og $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$. Til gjengjeld får vi to r-verdier for hver slik θ, nemlig $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ og $r = -\sqrt{\cos 2\theta}$.

Vi kan derfor parametrisere kurven i to deler:

$$(1) \quad x = r\cos\theta = \sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = \sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \quad \text{for } -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

$$(2) \quad x = r\cos\theta = -\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = -\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \quad \text{for } -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

Men vi kan også parametrisere kurven ved å sette

$$x = r\cos\theta = \sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = \sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \quad \text{for } -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \text{ og } \frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}.$$

Begge parametriseringene gir første del av kurven en positiv omløpsretning og del 2 en negativ omløpsretning. (Syntes du dette var vanskelig, kan det kanskje hjele å lage en tabell over x og y for ulik verdier av θ, og så plotte grafen.)

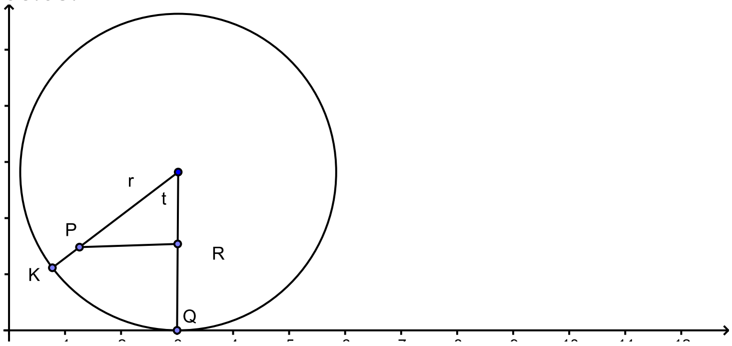
f)

Vi velger å bruke θ som parameter. Det gir

$$x = r\cos\theta = 3\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = 3\sin\theta \quad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Parametriseringen gir kurven en positiv omløpsretning (mot klokken).

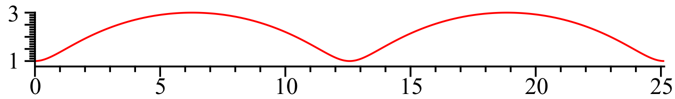
Oppgave 06.05.



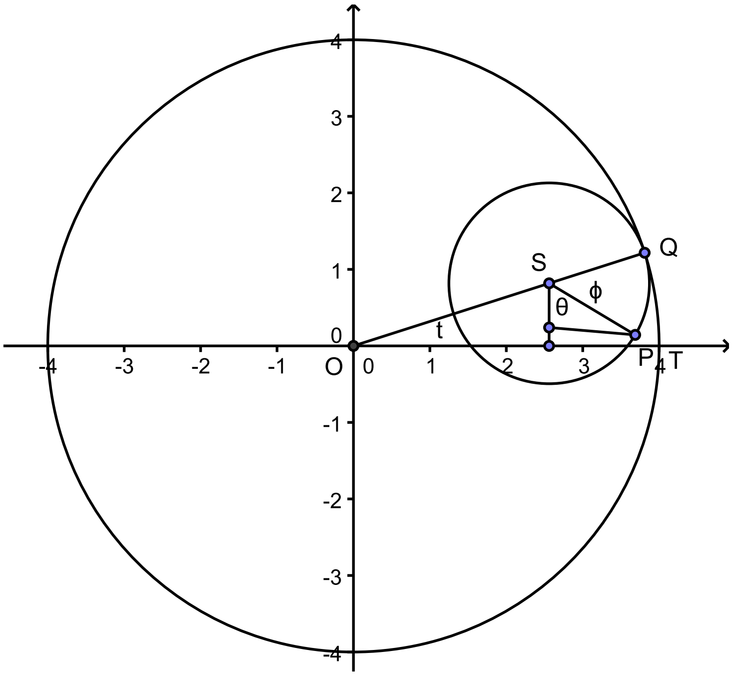
Figuren viser situasjonen etter at hjulet har trillet et lite stykke fra origo O. Vi velger å bruke vinkelen t på figuren som parameter. Sirkelbuen KQ har lengde Rt. Siden hjulet triller uten å gli er denne lengden også lik avstanden OQ som hjulet har trillet. Sentrum av hjulet har derfor koordinater (Rt, R). Det følger derfor av figuren at

$$x = Rt - r\sin t \quad \text{og} \quad y = R - r\cos t \quad \text{for } t \geq 0.$$

Dette er en parametrisering av kurven som blir beskrevet av P. Figuren nedenfor viser denne kurven.



Oppgave 06.06.



Figuren viser situasjonen etter at C har trillet et lite stykke fra punktet $T(4,0)$. Vi velger å bruke vinkelen $t = \angle QOT$ som parameter. Sirkelbuen TQ har lengde $4t$. Siden C triller uten å gli er denne lengden også lik lengden av sirkelbuen QP. Det vil si,

$$4t = q\phi, \quad \text{altså} \quad \phi = \frac{4t}{q}$$

der ϕ er vinkelen $\angle QSP$, som vist på figuren. Videre er vinkelsummen ved S

$$\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \theta + \phi = \pi, \quad \text{slik at} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + t - \phi = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{4}{q} - 1\right) t.$$

Vi observerer først at senteret S i C har kartesiske koordinater $((4-q)\cos t, (4-q)\sin t)$. P har derfor koordinater

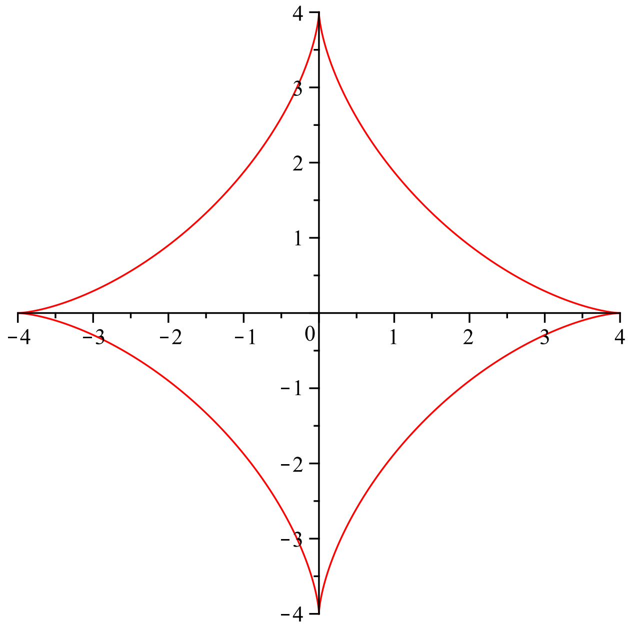
$$x = (4-q)\cos t + q\sin\theta = (4-q)\cos t + q\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{4}{q} - 1\right)\cdot t\right) = (4-q)\cos t + q\cos\left(\left(\frac{4}{q} - 1\right)\cdot t\right)$$

$$y = (4-q)\sin t - q\cos\theta = (4-q)\sin t - q\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{4}{q} - 1\right)\cdot t\right) = (4-q)\sin t - q\sin\left(\left(\frac{4}{q} - 1\right)\cdot t\right)$$

for $0 \le t \le 2\pi$. Dette er en parametrisering av kurven beskrevet av P. For $q = 1$ tar den formen

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t \quad \text{for } 0 \le t < 2\pi.$$

Figuren nedenfor viser denne kurven.



Oppgave 06.07.

a)

Vi velger for eksempel x som parameter. Da er $z = x^2$ og $y = \frac{z}{2} = \frac{x^2}{2}$, slik at skjæringskurven har en parametrisering

$$x = x, \quad y = \tfrac{1}{2}x^2, \quad z = x^2 \quad \text{for } -\infty < x < \infty.$$

Kurven har retning med voksende x.

b)

Vi velger θ som parameter. Siden $\rho = 1$ og derfor $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, er

$$\begin{aligned}
x &= \rho\sin\varphi\cos\theta = 1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\cos\theta = \frac{1}{2}\cos\theta \\
y &= \rho\sin\varphi\sin\theta = 1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta \\
z &= \rho\cos\varphi = 1(\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}) = \pm\sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

for $0 \le \theta \le 2\pi$. Dette betyr at skjæringeskurven består av to horisontale sirkler, begge med radius $\frac{1}{2}$. Den ene ligger i planet $z = \sqrt{3}/2$ og den andre i planet $z = -\sqrt{3}/2$. De to sirklene er parametrisert ved

$$x = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{for } 0 \le \theta < 2\pi$$

og

$$x = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{for } 0 \le \theta < 2\pi.$$

Begge sirklene har positiv omløpsretning (mot klokken) sett ovenfra.

c)

Vi velger θ som parameter. Da er $r = 2\cos\theta$ og derved $z = r^2 = 4\cos^2\theta$. Vi får derfor parametriseringen

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta = (2\cos\theta)\cos\theta = 2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta, \\
y &= r\sin\theta = (2\cos\theta)\sin\theta = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta, \\
z &= 4\cos^2\theta = 2(1+\cos 2\theta)
\end{aligned}$$

for $0 \le \theta \le \pi$ for skjæringskurven. (Øker vi θ videre fra π til 2π, blir punktene (x, y) på kurven akkurat som før, slik at kurven gjennomløpes to ganger.) Kurven er orientert i positiv omløpsretning (mot klokken) sett ovenfra.

d)

Flaten $x + 2y + z = 4$ er et plan som skjærer koordinataksene i punktene $(4,0,0)$, $(0,2,0)$ og $(0,0,4)$.

Flaten $z = r^2 = x^2 + y^2$ er en rotasjonsparaboloide som beskrives ved å rotere kurven $z = x^2$ i xz-planet om z-aksen.

Dersom flatene skjærer hverandre, burde det skje langs en enkel lukket kurve som går en gang rundt z-aksen i litt variabel høyde. Vi kan derfor velge å parametrisere denne kurven ved hjelp av sylinderkoordinater, der θ er parameteren og $r > 0$.

Vi setter $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ og $z = r^2$ inn i ligningen for planet:

$$\begin{aligned} r\cos\theta + 2r\sin\theta + r^2 &= 4 \\ r^2 + (\cos\theta + 2\sin\theta)r - 4 &= 0 \\ r &= \frac{-(\cos\theta + 2\sin\theta) \pm \sqrt{(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + 16}}{2} \end{aligned}$$

der vi bare kan bruke + foran rottegnet når $r > 0$. Det gir parametriseringen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = \frac{-(\cos\theta + 2\sin\theta) + \sqrt{(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + 16}}{2} \cdot \cos\theta \\ y &= r\sin\theta = \frac{-(\cos\theta + 2\sin\theta) + \sqrt{(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + 16}}{2} \cdot \sin\theta \\ z &= 4 - x - y = 4 - (\cos\theta + \sin\theta)\frac{-(\cos\theta + 2\sin\theta) + \sqrt{(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + 16}}{2} \end{aligned}$$

for $0 \le \theta < 2\pi$. Også her er retningen mot klokken sett ovenfra.

Oppgave 06.08.

a)

Siden $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$, er den søkte tangenten parallell med vektoren $\langle 1, 2\cdot 2, 3\cdot 2^2 \rangle = \langle 1, 4, 12 \rangle$. Siden tangenten skal gå gjennom punktet $\langle 2, 4, 8 \rangle$, har den en parameterfremstilling på formen

$$\mathbf{r} = \langle 2, 4, 8 \rangle + \langle 1, 4, 12 \rangle \cdot t \quad \text{for } -\infty < t < \infty.$$

b)

Ligningen $Ax + By + Cz + D = 0$ for planet som går gjennom de tre gitte punktene må ha koefisienter som tilfredsstiller ligningene

$$A + D = 0, \quad 3B + D = 0 \quad \text{og} \quad 3B + 2C + D = 0,$$

det vil si, $A = -D$, $B = -\frac{1}{3}D$ og $C = 0$. Det er altså et vertikalt plan med ligning $-Dx - \frac{1}{3}Dy + D = 0$, det vil si, $y = 3 - 3x = 3(1 - x)$.

Kuleflaten med sentrum i origo og radius 3 har ligning $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Det er klart at planet må skjære kuleflaten langs en sirkel (hvis den skjærer kuleflaten i det hele tatt). Punktet P ligger på denne skjæringskurven fordi $(1, 0, 2\sqrt{2})$ passer i begge ligningene $y = 3(1 - x)$ og $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Vi velger x som parameter for skjæringskurven mellom disse to flatene. Da er $x = x$, $y = 3 - 3x$ og z er en løsning av ligningen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ x^2 + 9(1 - x)^2 + z^2 &= 9 \\ z^2 &= 9 - x^2 - 9(1 - 2x + x^2) \\ z &= \pm\sqrt{18x - 10x^2}. \end{aligned}$$

En parameterfremstilling for skjæringskurven er derfor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = \langle x, 3(1 - x), \sqrt{18x - 10x^2} \rangle \quad \text{og} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = \langle x, 3(1 - x), -\sqrt{18x - 10x^2} \rangle$$

for $18x - 10x^2 \geq 0$.

Siden $\mathbf{r}'(x) = \left\langle 1, -3, \dfrac{9 - 10x}{\sqrt{18x - 10x^2}} \right\rangle$, er tangenten parallell med vektoren $\mathbf{r}'(1) = \left\langle 1, -3, -1/\sqrt{8} \right\rangle$. Den har derfor en parameterfremstilling

$$\mathbf{r} = \langle 1, 0, 2\sqrt{2} \rangle + \langle 1, -3, -1/2\sqrt{2} \rangle \cdot t \quad \text{for } -\infty < t < \infty.$$

c)

Ved implisitt derivasjon med hensyn på x er

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0$$

slik at i punktet P er $y' = -1$. Det vil si, tangenten er parallell med vektoren $\langle 1, -1 \rangle$, og har derfor parametrisering

$$\mathbf{r} = \left\langle \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right\rangle + \langle 1, -1 \rangle \cdot t \quad \text{for } -\infty < t < \infty.$$

d) Det er klart at C gjennomløpes en gang når t går fra 0 til 2π, og at punktet P da er gitt ved $\mathbf{r}(\pi/6)$. Tangenten i P er parallell med vektoren

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t - 2\sin 2t, \cos t - 2\cos 2t \rangle$$

for $t = \pi/6$, altså med

$$\mathbf{r}'(\pi/6) = \left\langle -\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \right\rangle,$$

og har har derfor en parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right\rangle + \left\langle -\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-2}{2} \right\rangle \cdot t \quad \text{for } -\infty < t < \infty.$$

Oppgave 06.09.

a)

Det er klart at $y = -t^2 + 3t - 2 = -(t-1)(t-2) \geq 0$ for $1 \leq t \leq 2$. Derfor er arealet under kurven lik

$$\int_{t=1}^{2} y\,dx = \int_{t=1}^{2} (-t^2 + 3t - 2)\frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_{1}^{2} (-t^2 + 3t - 2)\frac{1}{t}\,dt.$$

b)

Lengden av kurven C er gitt ved

$$L = \int_{t=1}^{2} ds = \int_{t=1}^{2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t=1}^{2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_{1}^{2} \sqrt{\frac{1}{t^2} + (-2t+3)^2}\,dt.$$

c)

Arealet av rotasjonsflaten er gitt ved

$$\int_{t=1}^{2} 2\pi(\text{radius})\,ds = \int_{t=1}^{2} 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{1}^{2} 2\pi(-t^2+3t-2)\sqrt{\frac{1}{t^2} + (-2t+3)^2}\,dt.$$

d)

Volumet innenfor flaten i c) er gitt ved

$$\int_{t=1}^{2} \pi(radius^2)\,dx = \int_{t=1}^{2} \pi y^2 \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_{1}^{2} \pi(-t^2 + 3t - 2)^2 \frac{dt}{t}.$$

e)

Massen til C er gitt ved

$$m = \int_{t=1}^{2} x\,ds = \int_{t=1}^{2} (\ln t)\sqrt{\frac{1}{t^2} + (-2t+3)^2}\,dt.$$

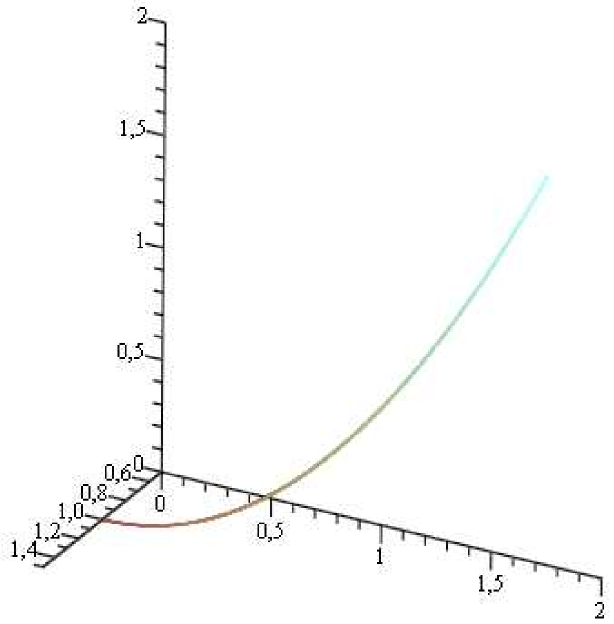
f)

Tyngdepunktet $\overline{x}$ til C er gitt ved at $m \cdot \overline{x}$ = momentet til C med hensyn på y-aksen. Det vil si,

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{m}\int_{t=1}^{2} x\,dm = \frac{1}{m}\int_{t=1}^{2} x^2\,ds = \frac{1}{m}\int_{t=1}^{2} (\ln t)^2 \sqrt{\frac{1}{t^2} + (-2t+3)^2}\,dt \\ &= \frac{\int_1^2 (\ln t)^2 \sqrt{\frac{1}{t^2} + (-2t+3)^2}\,dt}{\int_1^2 (\ln t) \sqrt{\frac{1}{t^2} + (-2t+3)^2}\,dt}.\end{aligned}$$

Oppgave 06.10.

a)



b)

Vi skal studere figuren ved punktet $\mathbf{r}(\frac{1}{2}) = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\rangle = \mathbf{P}$.

Det er litt vanskelig å se av figuren om x-komponenten til tangentvektoren $\mathbf{T}$ er positiv eller negativ, men y-komponenten og z-komponenten er ihvertfall begge positive. Ser vi på parameterfremstillingen til kurven, er faktisk x-komponenten konstant, slik at tangenten ikke får noen x-komponent. Når det gjelder y- og z-komponentene, ser det ut til at y øker fortere enn z langs kurven nær punktet $\mathbf{P}$. Vi gjetter derfor at $\mathbf{T}(\frac{1}{2}) \approx \langle 0, 2, 1\rangle / |\langle 0, 2, 1\rangle|$.

Enhetsnormalen $\mathbf{N}$ skal stå normalt på $\mathbf{T}$ og peke rett inn i svingen. Ifølge figuren betyr det at $\mathbf{N}$ må ha en negativ y-koordinat, ingen x-koordinat (siden $x = 1$ langs hele kurven), men en svakt positiv z-koordinat. Vi gjetter for eksempel $\mathbf{N}(\frac{1}{2}) \approx \langle 0, -1, 1\rangle / |\langle 0, -1, 1\rangle|$.

Binormalen $\mathbf{B}$ skal stå normalt både på $\mathbf{T}$ og $\mathbf{N}$. Siden vi har gjettet at både $\mathbf{T}(\frac{1}{2})$ og

$\mathbf{N}(\frac{1}{2})$ er parallelle med yz-planet, må $\mathbf{B} \perp yz$-planet. Så har vi gjettet noenlunde bra, så burde $\mathbf{B}(\frac{1}{2}) \approx \mathbf{i}$ eller $\mathbf{B}(\frac{1}{2}) \approx -\mathbf{i}$. Ved høyrehåndsregelen må det bli $\mathbf{B}(\frac{1}{2}) \approx \mathbf{i}$.

c)

$\mathbf{r}'(t) = \langle 0, 4t, 8t^3 \rangle$, slik at

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle 0, 4t, 8t^3 \rangle}{\sqrt{16t^2 + 64t^6}} = \frac{\langle 0, 1, 2t^2 \rangle}{\sqrt{1 + 4t^4}}, \\
\mathbf{T}(\tfrac{1}{2}) &= \frac{\langle 0,\ 1,\ \frac{1}{2} \rangle}{\sqrt{1 + 1/4}} = \frac{\langle 0, 2, 1 \rangle}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Du verden! Vi gjettet helt rett. Ja, det var egentlig ren flaks.

For å finne $\mathbf{N}(\frac{1}{2}) = \mathbf{T}'(\frac{1}{2})/|\mathbf{T}'(\frac{1}{2})|$, finner vi først

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'(t) &= \frac{\langle 0, 1, 4t \rangle \cdot \sqrt{1 + 4t^4} - \langle 0, 1, 2t^2 \rangle \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+4t^4}} \cdot 16t^3}{1 + 4t^4} \\
&= \frac{\langle 0, 0, 4t \rangle \cdot (1 + 4t^4) - \langle 0, 1, 2t^2 \rangle \cdot 8t^3}{(1 + 4t^4)\sqrt{1 + 4t^4}} \\
&= \frac{\langle 0,\ -8t,\ 4t + 16t^5 - 16t^5 \rangle}{(1 + 4t^4)^{3/2}},
\end{aligned}$$

slik at

$$\mathbf{T}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\langle 0, -1, 2 \rangle}{(1 + 1/4)^{3/2}} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \langle 0, -1, 2 \rangle.$$

Det gir

$$\mathbf{N}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\langle 0, -1, 2 \rangle}{|\langle 0, -1, 2 \rangle|} = \frac{\langle 0, -1, 2 \rangle}{\sqrt{5}}.$$

Jaja... Vi hadde i alle fall riktige fortegn på komponentene til $\mathbf{N}(\frac{1}{2})$.

Binormalen til $\mathbf{B}(\frac{1}{2})$ behøver vi vel egentlig ikke å regne ut engang, for vår analyse som ga $\mathbf{B}(\frac{1}{2})$ som gjetning var basert på helt riktig grunnlag. Men la oss likevel gjøre det:

$$\mathbf{B}(\tfrac{1}{2}) = \mathbf{T}(\tfrac{1}{2}) \times \mathbf{N}(\tfrac{1}{2}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) - \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 0 = \mathbf{i},$$

akkurat slik vi tenkte.

Oppgave 06.11.

a)

Vi beregner først akselerasjonsvektoren til partikkelen ved tidspunkt t:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \langle \sin t, \cos t, t\rangle \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= \langle \cos t, -\sin t, 1\rangle \\ \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) &= \langle -\sin t, -\cos t, 0\rangle.\end{aligned}$$

Dette viser også at

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle \cos t, -\sin t, 1\rangle}{|\langle \cos t, -\sin t, 1\rangle|} = \frac{\langle \cos t, -\sin t, 1\rangle}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1^2}} = \frac{\langle \cos t, -\sin t, 1\rangle}{\sqrt{2}},$$

slik at komponenten til $\mathbf{a}(t)$ i fartsretningen $\mathbf{T}(t)$ er

$$\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = \langle -\sin t, -\cos t, 0\rangle \cdot \frac{\langle \cos t, -\sin t, 1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{-\cos t \sin t + \cos t \sin t + 0}{\sqrt{5}} = 0.$$

Det vil si, partikkelen beveger seg med konstant fart, og hele akselerasjonsvektoren gir retningsendring. Med andre ord,

$$\mathbf{a}(t) = 0\cdot\mathbf{T}(t) + |\langle -\sin t, -\cos t, 0\rangle|\cdot\mathbf{N}(t) = 0\cdot\mathbf{T} + 1\cdot\mathbf{N}(t).$$

b)

Krumningen til banen er gitt ved

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{|\langle -\sin t, -\cos t, 0\rangle/\sqrt{2}|}{|\langle \cos t, -\sin t, 1\rangle|} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Vi ser at krumningen er konstant lik $1/2$.

c)

Radien i krumningssirkelen er $\rho(t) = 1/\kappa(t) = 2$, uavhengig av t. Sentrum i krumningssirkelen i punktet $\mathbf{P} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 13\pi/6\rangle = \mathbf{r}(13\pi/6)$ er gitt ved

$$\mathbf{C} = \mathbf{P} + \rho(13\pi/6)\cdot\mathbf{N}(13\pi/6).$$

Vi finner derfor først $\mathbf{N}(t)$:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{\langle -\sin t, -\cos t, 0\rangle}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = \langle -\sin t, -\cos t, 0\rangle.$$

Derved er

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{13\pi}{6} \right\rangle + 2\left\langle -\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right), -\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right), 0 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{13\pi}{6} \right\rangle + 2\left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{13\pi}{6} \right\rangle.\end{aligned}$$

Oppgave 06.12.

Akselerasjonsvektoren til ballen er konstant lik $\mathbf{a} = \langle 0, 0, -9.8\rangle$. Med utgangshastighet $\mathbf{v}_0 = \langle a, b, c\rangle$ er derfor ballens hastighet og posisjon ved tidspunkt t før den lander, gitt ved

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}\,dt = \langle a, b, c\rangle + \langle 0, 0, -9.8\rangle\, t,$$
$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t)\,dt = \langle a, b, c\rangle\, t + \langle 0, 0, -4.9\rangle\, t^2.$$

Ifølge oppgave lander ballen i punktet $\langle 200, 200, 9\rangle$ etter to sekunder. Det vil si,

$$\mathbf{s}(2) = \langle a\cdot 2,\ b\cdot 2,\ c\cdot 2 - 4.9\cdot 2^2\rangle = \langle 200, 200, 0\rangle.$$

Altså er $a = 100$, $b = 100$ og $2c - 4\cdot 4.9 = 0$, altså $c = 9.8$. Utgangshastigheten var derfor

$$\mathbf{v}_0 = \langle a,\ b,\ c\rangle = \langle 100, 100, 9.8\rangle.$$

b)

Akselerasjonsvektoren til ballen er denne gangen konstant lik $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -9.8\rangle$. Med utgangshastighet $\mathbf{v}_0 = \langle a, b, c\rangle$ er derfor ballens hastighet og posisjon ved tidspunkt t før den lander, gitt ved

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}\,dt = \langle a, b, c\rangle + \langle 2, 0, -9.8\rangle\, t,$$
$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t)\,dt = \langle a, b, c\rangle\, t + \langle 1, 0, -4.9\rangle\, t^2.$$

Ifølge oppgave lander ballen i punktet $\langle 200, 200, 9\rangle$ etter to sekunder. Det vil si,

$$\mathbf{s}(2) = \langle a\cdot 2 + 2^2,\ b\cdot 2,\ c\cdot 2 - 4.9\cdot 2^2\rangle = \langle 200, 200, 0\rangle.$$

Altså er $a = 98$, $b = 100$ og $2c - 4\cdot 4.9 = 0$, altså $c = 9.8$. Utgangshastigheten var derfor

$$\mathbf{v}_0 = \langle a,\ b,\ c\rangle = \langle 98, 100, 9.8\rangle.$$

c)

Ballens bane i a) er parabelen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) = \langle a, b, c\rangle\, t + \langle 0, 0, -4.9\rangle\, t^2 = \langle 100t,\ 100t,\ 9.8t - 4.9t^2\rangle \quad \text{for } 0 \le t \le 2.$$

Ballens bane i c) er

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) = \langle a, b, c\rangle\, t + \langle 1, 0, -4.9\rangle\, t^2 = \langle 98t + t^2,\ 100t,\ 9.8t - 4.9t^2\rangle \quad \text{for } 0 \le t \le 2.$$

Oppgave 06.13.

Vi legger det hele inn i et xy-plan, slik at maålet ligger i origo og flyet flyr parallelt med x-aksen langs linjen $y = 800$. Vi lar flyet ha samme retning som x-aksen.

Vi velger å bruke enhetene meter og sekund for lengde og tid. Hastigheten 500 km/time er lik $500 \cdot 1000/3600\,\mathrm{m/s} = 1250/9\,\mathrm{m/s}$.

a)

Flyet flyr med konstant hastighetsvektor $\mathbf{v} = \langle 1250/9, 0\rangle$. Slippes pakken ved tidspunkt $t = 0$, har den derfor en utgangshastighet $\mathbf{v}_0 = \langle 1250/9, 0\rangle$ og akselerasjon $\mathbf{a} = \langle 0, -9.8\rangle$. Ved tidspunkt $t > 0$ før den lander, har derfor pakken hastighet

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

og posisjon

$$\mathbf{s}(t) = \langle x_0, 800\rangle + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}\frac{t^2}{2}.$$

Pakken lander idet andre-komponenten av $\mathbf{s}(t)$ (høyden) er lik null, det vil si, når $800-9.8t^2/2 = 0$, altså etter $t = \sqrt{800/4.9} = 40\sqrt{5}/7$ sekunder. Vi vil at posisjonen da skal være $\langle 0, 0\rangle$. Det vil si,

$$x_0 + \frac{1250}{9} \cdot \frac{40\sqrt{5}}{7} = 0 \quad \text{altså,} \quad x_0 = -\frac{1250}{9} \cdot \frac{40\sqrt{5}}{7} \approx -1775\,\mathrm{m}.$$

Konklusjon: flyet bør slippe pakken ca 1775 m før landingsstedet for pakken.

b)

Banen er en parabelbue parametrisert ved

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) = \left\langle -\frac{1250}{9} \cdot \frac{40\sqrt{5}}{7} + \frac{1250t}{9}, 800 - 4.9t^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1250}{9}\left(\frac{40\sqrt{5}}{7} - t\right), 800 - 4.9t^2 \right\rangle$$

for $0 \le t \le \frac{40\sqrt{5}}{7}$.

c)

Hastighetsvektoren idet pakken lander er gitt ved

$$\mathbf{v}\left(\frac{40\sqrt{5}}{7}\right) = \left\langle \frac{1250}{9}, -9.8 \cdot \frac{40\sqrt{5}}{7} \right\rangle,$$

slik at farten er

$$v = \sqrt{\frac{1250^2}{9^2} + 9.8^2 \cdot \frac{800}{4.9}} \approx 187\,\mathrm{m/s}.$$