Oppgave 01.01.

a) Vi finner først funksjonene $y = f(x)$ ved å løse ligningen med hensyn på y. Det gir to funksjoner

$$y = f_1(x) = \sqrt{1-x^3}, \qquad y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^3}.$$

Begge disse funksjonene krever at $1-x^3 \geq 0$, altså $1 \geq x^3$, slik at begge har naturlig definisjonsområde $(-\infty, 1]$.

Ligningen gir også en funksjon $x = f_3(y)$ implisitt. For å finne denne, løser vi ligningen med hensyn på x. Det gir

$$x = f_3(y) = \sqrt[3]{1-y^2}$$

som er definert for alle reelle y. Det naturlige definisjonsområdet for f_3 er derfor $(-\infty, \infty)$.

b) For å finne y som funksjon av x, løser vi ligningen med hensyn på y og får

$$y = f_1(x) = (2x^2)^2 = 4x^4$$

som har naturlig definisjonsområde $(-\infty, \infty)$.

For å finne x som funksjon av y, løser vi ligningen med hensyn på x. Det gir to løsninger:

$$x = f_2(y) = \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{2}} = \sqrt[4]{\frac{y}{4}} \quad \text{og} \quad x = f_3(y) = -\sqrt{\frac{\sqrt{y}}{2}} = -\sqrt[4]{\frac{y}{4}}.$$

Begge disse funksjonene krever at $y \geq 0$, slik at de har naturlige definisjonsområder $[0, \infty)$.

c) For å finne y som funksjon av x, løser vi ligningen med hensyn på y og får

$$y = f_1(x) = (x^2 + 2x - 1)^3$$

som har naturlig definisjonsområde $(-\infty, \infty)$.

For å finne x som funksjon av y, løser vi annengradsligningen

$$x^2 + 2x - (1 + \sqrt[3]{y}) = 0$$

i x. Det gir to løsninger:

$$x = f_2(y) = \frac{-2+\sqrt{4+4+4\sqrt[3]{y}}}{2} = -1+\sqrt{2+\sqrt[3]{y}}$$
$$x = f_3(y) = \frac{-2-\sqrt{4+4+4\sqrt[3]{y}}}{2} = -1-\sqrt{2+\sqrt[3]{y}}.$$

Begge disse funksjonene krever at

$$\begin{aligned} 2+\sqrt[3]{y} &\geq 0 \\ \sqrt[3]{y} &\geq -2 \\ y &\geq (-2)^3 = -8, \end{aligned}$$

slik at de har naturlige definisjonsområder $[-8,\infty)$.

d) For å finne y som funksjon av x, løser vi ligningen med hensyn på y og får

$$y = f_1(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$$

som krever at nevneren er $\neq 0$. Men det holder for alle x, slik at f_1 har naturlig definisjonsområde $(-\infty,\infty)$.

For å finne x som funksjon av y, løser vi annengradsligningen

$$x^2+4x+(5-1/y) = 0$$

i x. Det gir to løsninger:

$$x = f_2(y) = \frac{-4+\sqrt{16-20+4/y}}{2} = -2+\sqrt{-1+1/y}$$
$$x = f_3(y) = \frac{-4-\sqrt{16-20+4/y}}{2} = -2-\sqrt{-1+1/y}.$$

Begge disse funksjonene krever at

$$\begin{aligned} -1+1/y &\geq 0 \\ 1/y &\geq 1, \end{aligned}$$

altså, y positiv med $y \leq 1$, slik at de har naturlige definisjonsområder $(0,1]$.

Oppgave 01.02.

a) $f(x) = x^3 - 1$ er verken odde eller jevn fordi $f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1$ som verken er lik $-f(x)$ eller $f(x)$.

b) $f(x) = x^2 - 1$ er en jevn funksjon fordi $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$ for alle x.

c) $f(x) = \sin x^2$ er en jevn funksjon fordi $f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x)$ for alle x.

d) $f(x) = \sin^2 x$ er en jevn funksjon fordi $f(-x) = \sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$ for alle x.

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ er verken odde eller jevn fordi

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{-x + 2} = \frac{x^2 - 4}{-x + 2}$$

som verken er lik $-f(x)$ eller $f(x)$.

Oppgave 01.03.

a) La g og h være jevne funksjoner. Da er $g(-x) = g(x)$ for alle $x \in D_g$ og $h(-x) = h(x)$ for alle $x \in D_h$, og derved $f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = g(x) \cdot h(x) = f(x)$ for alle $x \in D_f = D_g \cap D_h$. Altså er også f en jevn funksjon.

b) La g og h være odde funksjoner. Da er $g(-x) = -g(x)$ for alle $x \in D_g$ og $h(-x) = -h(x)$ for alle $x \in D_h$, og derved $f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = [-g(x)] \cdot [-h(x)] = g(x) \cdot h(x) = f(x)$ for alle $x \in D_f = D_g \cap D_h$. Altså er f en jevn funksjon.

c) La g være en jevn og h være en odde funksjon. Da er $g(-x) = g(x)$ for alle $x \in D_g$ og $h(-x) = -h(x)$ for alle $x \in D_h$. Derved er $f(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = g(x) \cdot [-h(x)] = -g(x) \cdot h(x) = -f(x)$ for alle $x \in D_f = D_g \cap D_h$. Altså er f en odde funksjon.

Oppgave 01.04.

a) Grafen består av en samling horisontale linjestykker.

- Det første går fra $x = 0$ til $x = 20$ i høyde 8.50.
- Det andre går fra $x = 20$ til $x = 50$ i høyde 13.00.
- Det tredje går fra $x = 50$ til $x = 100$ i høyde 16.00.
- Det fjerde går fra $x = 100$ til $x = 350$ i høyde 26.00.
- Det femte går fra $x = 350$ til $x = 1000$ i høyde 63.00.
- Det siste går fra $x = 1000$ til $x = 2000$ i høyde 140.00.

b) Funksjonen er bare definert for $0 < x < 2000$. Den er kontinuerlig i alle punktene der den er definert, bortsett fra i diskontinuitetspunktene $x = 20$, $x = 50$, $x = 100$, $x = 350$ og $x = 1000$.

c) Funksjonen i a) er høyrekontinuerlig i alle diskontinuitetspunktene i b).

Oppgave 01.05.

a) Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 1$ dersom grenseverdien $\lim_{x\to 1} f(x)$ eksisterer og er lik funksjonsverdien $f(1) = 3$. Siden nevneren i brøken går mot null når $x \to 1$, kan ikke grenseverdien eksistere med mindre også telleren går mot null. Vi trenger derfor at $1^3 - c + 1 = 0$, det vil si, $c = 2$. Men dette garanterer ikke at grenseverdien eksisterer, eller at den er lik 3. Vi sjekker:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2 + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

der vi har brukt polynomdivisjon i nest siste overgang. Funksjonen er altså kontinuerlig i $x = 1$ når $c = 2$.

b) Funksjonen f er kontinuerlig i $x = -1$ dersom grenseverdien $\lim_{x\to -1} f(x)$ eksisterer og er lik funksjonsverdien $f(-1) = 2$. Siden nevneren i brøken går mot null når $x \to -1$, kan ikke grenseverdien eksistere med mindre også telleren går mot null. Vi trenger derfor at $(-1)^2 - c^2 = 0$, det vil si, $c = 1$ eller $c = -1$. Men dette garanterer ikke at grenseverdien eksisterer, eller at den er lik 2. Vi sjekker. For begge c-verdiene er $c^2 = 1$ slik at

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - c^2}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x\to -1} (x - 1) = -2 \neq f(-1),$$

der vi har brukt polynomdivisjon i nest siste overgang. Funksjonen er altså ikke kontinuerlig i $x = -1$ for noen verdi av c.

c) Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 1$ dersom grenseverdien $\lim_{x\to 1} f(x)$ eksisterer og er lik funksjonsverdien $f(1) = 0$. Siden nevneren i brøken går mot null når $x \to 1$, kan ikke grenseverdien eksistere med mindre også telleren går mot null. Vi trenger derfor at $1^2 + \sqrt{c} = 0$, men det er umulig, for $\sqrt{c}$ er alltid ≥ 0. Funksjonen er altså ikke kontinuerlig i $x = 1$ for noen verdi av c.

d) Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 2$ dersom grenseverdien $\lim_{x\to 2} f(x)$ eksisterer og er lik funksjonsverdien $f(2) = 2^{-3/2}$. Siden nevneren i brøken går mot null når $x \to -1$, kan ikke grenseverdien eksistere med mindre også telleren går mot null. Vi trenger derfor at $\sqrt{2} - c^2 = 0$, det vil si, $c = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ eller $c = -\sqrt[4]{2}$. Men dette garanterer ikke at grenseverdien eksisterer, eller at den er lik $2^{-3/2}$. Vi sjekker:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 2^{-3/2}.\end{aligned}$$

Dette betyr at funksjonen er kontinuerlig i $x = 2$ dersom $c = \sqrt{2}$ eller $c = -\sqrt{2}$.

Oppgave 01.06.

a) Skal diskontinuiteten være hevbar, må $\lim_{x\to a} f(x)$ eksistere. Siden funksjonsuttrykket er forskjellig for $x > a$ og $x < a$, må vi kreve at de ensidige grenseverdiene $\lim_{x\to a^+} f(x)$ og $\lim_{x\to a^-} f(x)$ begge eksisterer og er like. Vi sjekker:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+c}{x-c} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 & \text{for } c = 0, \\ \dfrac{0+c}{0-c} = -1 & \text{for } c \neq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + c) = c.$$

Dersom $c = 0$, er grenseverdien fra høyre lik 1, mens grenseverdien fra venstre er lik $c = 0$. Diskontiuniteten er altså ikke hevbar når $c = 0$.

La $c \neq 0$. Da er grenseverdien fra høyre lik -1, mens grenseverdien fra venstre er lik c. De to grenseverdiene er derfor bare like når $c = -1$.

Konklusjon: diskontinuiteten er bare hevbar for $c = -1$.

b) Skal diskontinuiteten være hevbar, må $\lim_{x\to a} f(x)$ eksistere. Siden funksjonsuttrykket er forskjellig for $x > a$ og $x < a$, må vi kreve at de ensidige grenseverdiene $\lim_{x\to a^+} f(x)$ og $\lim_{x\to a^-} f(x)$ begge eksisterer og er like. Vi sjekker:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+c} = \frac{1}{1+c} \quad \text{for } c \neq -1.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x + 4c) = 1 + 4c.$$

La $c \neq -1$. Da er grenseverdien fra høyre lik $1/(1+c)$, mens grenseverdien fra venstre er lik $1 + 4c$. Diskontiuniteten er altså hevbar når

$$\begin{aligned} 1 + 4c &= 1/(1+c) \\ (1+4c)(1+c) &= 1 \\ 1 + 5c + 4c^2 &= 1 \\ 4c^2 + 5c &= 0 \\ c(4c+5) &= 0 \end{aligned}$$

Det vil si, når $c = 0$ og når $c = -5/4$.

c) Skal diskontinuiteten være hevbar, må $\lim_{x\to a} f(x)$ eksistere. Siden funksjonsuttrykket er forskjellig for $x > a$ og $x < a$, må vi kreve at de ensidige grenseverdiene $\lim_{x\to a^+} f(x)$ og $\lim_{x\to a^-} f(x)$ begge eksisterer og er like. Vi sjekker:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(x + c) = \cos c.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 + x^2) = 1.$$

Diskontiuniteten er altså hevbar når $\cos c = 1$, det vil si, for $c = 2n\pi$ for alle heltall n (positive og negative og null).

d) Skal diskontinuiteten være hevbar, må $\lim_{x\to a} f(x)$ eksistere. Siden funksjonsuttrykket er forskjellig for $x > a$ og $x < a$, må vi kreve at de ensidige grenseverdiene $\lim_{x\to a^+} f(x)$ og $\lim_{x\to a^-} f(x)$ begge eksisterer og er like. Vi sjekker:

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \sqrt[3]{-c} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-c} + \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{-c} + 2.$$

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} (x - 7) = 1.$$

Diskontiuniteten er altså hevbar når

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{-c} + 2 &= 1 \\
\sqrt[3]{-c} &= -1 \\
-c &= (-1)^3 = -1 \\
c &= 1
\end{aligned}$$

Oppgave 01.07.

Volumet av en kube med side s er gitt ved

$$V = s^3 = f(s).$$

Siden

$$\frac{dV}{ds} = f'(s) = 3s^2,$$

øker volumet med $f'(3) = 3 \cdot 3^2 = 27$ cm^3 per cm økning i s idet $s = 3$ cm.

Oppgave 01.08.

Siden $a = v'(t)$ der v er hastigheten ved tidspunkt t, er $v(t)$ den antideriverte til a, det vil si,

$$v(t) = at + C = 9.8t + C$$

for en konstant C når vi måler tiden t i sekunder. Siden vi ser bort fra luftmotstanden, har du hastighet 0.5 m/s idet du passerer stupebrettet på vei nedover igjen. Vi lar t være lik 0 i dette øyeblikket, slik at $v(0) = 0.5$ m/s. (Den positive retningen er nedover, slik oppgaven er gitt.) Derfor er $v(0) = C = 0.5$. For å finne $v(t)$ idet du treffer vannet, må vi vite hvor lang tid du bruker. Så la oss finne ut det først.

Siden $v(t) = s'(t)$ der $s(t)$ er tilbakelagt veilengde, er $s(t)$ den antideriverte til $v(t)$. Det vil si,

$$s(t) = a \cdot \frac{t^2}{2} + Ct + C_1 = 4.9\,t^2 + 0.5t + C_1$$

for en konstant C_1, når vi måler s i meter og $s(t)$ er den vertikale avstanden fra stupebrettet ved tidspunkt $t \geq 0$ i stupet. Denne avstanden er 0 ved tid $t = 0$. Altså er $s(0) = C_1 = 0$. Du treffer vannet idet $s(t) = 10$, altså

$$\begin{aligned} 4.9t^2 + 0.5t &= 10 \\ 4.9t^2 + 0.5t - 10 &= 0 \\ t &= \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 40 \cdot 4.9}}{2 \cdot 4.9} \approx \frac{-0.5 \pm 14.0}{9.8} \approx 1.4\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Hastigheten er derfor cirka

$$v(1.4) \approx 9.8 \cdot 1.4 + 0.5 \approx 14\,\mathrm{m/s}.$$

Det er temmelig fort!

Oppgave 01.09.

På Jorden er tyngdens akselerasjon 9.8 m/s^2 i retning inn mot Jordens sentrum, altså nedover for Sidensvans. Vi lar oppover være den positive retningen. Da opplever Sidensvans en akselerasjon $a_J = -9.8$ m/2^2. Siden denne akselerasjonen er den deriverte av hastigheten $v_J(t)$ til Sidensvans ved tidspunkt t (målt i sekunder) i hoppet, er $v_J(t)$ den antideriverte til a_J, det vil si,

$$v_J(t) = a_j \cdot t + C_1$$

for en konstant C_1. Vi lar $t = 0$ idet han starter hoppet. Da er utgangshastighten $v_J(0) = C_1$ m/s. $v_J(t)$ avtar etterhvert. Idet $v_J(t) = 0$, når Sidensvans det høyeste punktet i hoppet. Det skjer ved tidspunkt

$$t_J = \frac{C_1}{-a_J} = \frac{C_1}{|a_J|}.$$

Siden $v_J(t) = s_J'(t)$ der $s_J(t)$ er høyden ved tidspunkt t, er

$$s_J(t) = a_j \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

der $C_2 = 0$ fordi $s_J(0) = 0$. Spesielt er $s_J(t_J) = 0.6$, altså

$$s_J(t_J) = \frac{a_J}{2} \cdot t_J^2 + C_1 t_J = \frac{C_1^2}{2a_J} + \frac{C_1^2}{|a_J|} = \frac{C_1^2}{2|a_J|} = 0.6.$$

På tilsvarende måte er høyden på hoppet på Månen

$$s_M(t_M) = a_M \cdot \frac{t_M^2}{2} + C_1 t_M = \frac{C_1^2}{2|a_M|} = \frac{C_1^2}{2|a_J|} \cdot \left|\frac{a_J}{a_M}\right| = 0.6 \cdot \frac{9.8}{1.6} \approx 3.7\,\text{m}.$$

Oppgave 01.10.

a) Gjennomsnittshastigheten er

$$\overline{v} = \frac{\text{tilbakelagt veilengde}}{\text{tidsforbruk}} = \frac{500}{7.5}\,\text{km/time} \approx 67\,\text{km/time}.$$

b) Gjennomsnittshastigheten er

$$\overline{v} = \frac{\text{tilbakelagt veilengde}}{\text{tidsforbruk}} = \frac{300}{3.25}\,\text{km/time} \approx 92\,\text{km/time}.$$

c) Gjennomsnittshastigheten er

$$\overline{v} = \frac{\text{tilbakelagt veilengde}}{\text{tidsforbruk}} = \frac{2(500+300)}{7.5+3.25+12.0}\,\text{km/time} \approx 70\,\text{km/time}.$$

Oppgave 01.11.

a) La $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$, slik at kurven er grafen til f. Da er

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{slik at} \quad f'(4) = 3 \cdot 16 - \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{191}{4}$$

og $f(4) = 64 - 2 = 62$. Tangenten har derfor ligning

$$y = 62 + \frac{191}{4}(x-4) = \frac{191}{4}x - 129.$$

b) La $f(x) = \dfrac{x^3 + \sqrt[4]{x}}{x^2 - 2}$, slik at kurven er grafen til f. Da er

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + \frac{1}{4}x^{-3/4})(x^2-2) - (x^3 + \sqrt[4]{x}) \cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

og derved

$$f(1) = \frac{1+1}{1-2} = -1 \quad \text{og} \quad f'(1) = \frac{-(3+\frac{1}{4}) - (1+1) \cdot 2}{(-1)^2} = -\frac{29}{4}.$$

Tangenten har derfor en ligning

$$y = -1 - \frac{29}{4}(x-1) = -\frac{29}{4}x + \frac{25}{4}.$$

c) Ligningen definerer en funksjon $y = f(x)$ med $f(1) = 2$ implisitt. Ved implisitt derivasjon får vi

$$3x^2 + 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Vi setter inn at $x = 1$ og $y = 2$ og får

$$3 + 24\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{slik at} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}.$$

Tangenten har derfor en ligning

$$y = 2 - \frac{1}{8}(x-1).$$

d) Ligningen definerer en funksjon $y = f(x)$ med $f(2) = -1$ implisitt. Ved implisitt derivasjon får vi

$$3x^2 + 1 - 6y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Vi setter inn at $x = 2$ og $y = -1$ og får

$$12 + 1 - 6\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{slik at} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{13}{5}.$$

Tangenten har derfor en ligning

$$y = -1 + \frac{13}{5}(x - 2).$$