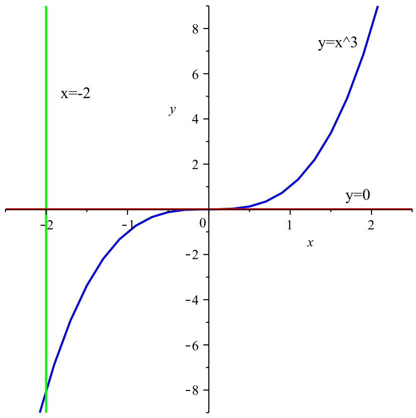
Oppgave 08.01.



Vi ser av figuren at området D ligger i tredje kvadrant. (Det er det eneste av de fire delområdene som er begrenset.) Vi velger å integrere kolonnevis. For en gitt x vil da y gå fra kurven $y = x^3$ til linjen $y = 0$. For å få med alle slike kolonner i området, må x gå fra -2 til 0. Arealet er derfor

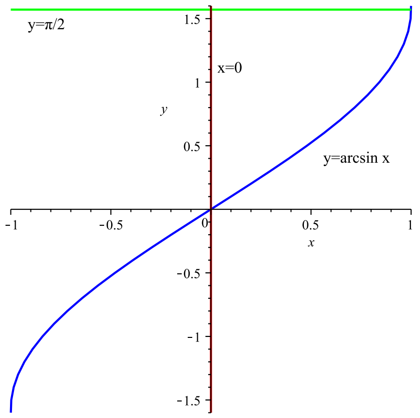
$$A = \iint_D dA = \int_{x=-2}^{0} \int_{y=x^3}^{0} dy\, dx = \int_{-2}^{0} \Big[\, y \,\Big]_{y=x^3}^{0} dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (-x^3)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{0} = 4.$$

Alternativt kunne vi ha beregnet A ved et vanlig enkeltintegral:

$$A = -\int_{-2}^{0} x^3\, dx = -\left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{0} = 4.$$

(Minus foran integralet fordi areal under x-aksen blir negativt når vi regner $\int_a^b f(x)\,dx$ der $a < b$.)

Oppgave 08.02.



Vi ser av figuren at D ligger i første kvadrant. Kurven $y = \sin^{-1} x$ er det samme som kurven $x = \sin y$ for $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Vi integrerer derfor linjevis. For en gitt y vil da x gå fra linjen $x = 0$ til kurven $x = \sin y$. For å få med alle slike linjer i området, må y gå fra 0 til $\pi/2$. Derfor kan et dobbelintegral over D skrives som

$$\iint_D \cdots \, dA = \int_{y=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{\sin y} \cdots \, dx\, dy.$$

Massen til platen er derved

$$m = \iint_D dm = \iint_D 2y\, dA = \int_{y=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{\sin y} 2y\, dx\, dy = \int_{y=0}^{\pi/2} \Big[2xy\Big]_{x=0}^{\sin y} dy$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} y \sin y\, dy = 2\Big[\sin y - y\cos y\Big]_0^{\pi/2} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - (\sin 0 - 0\cos 0)\right) = 2.$$

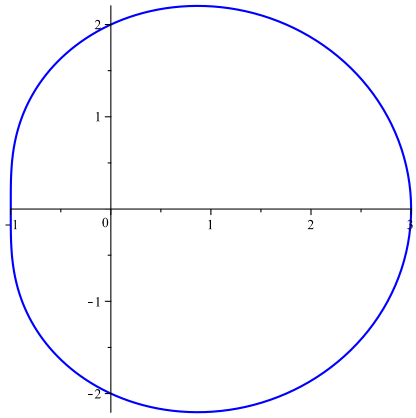
Tyngdepunktet har koordinater $(\overline{x}, \overline{y})$ gitt ved

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\, dm = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{\pi/2}\int_{x=0}^{\sin y} x \cdot 2y\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{\pi/2}\Big[x^2 y\Big]_{x=0}^{\sin y} dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} y \sin^2 y\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} y\,\frac{1-\cos 2y}{2}\, dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} - \left(\frac{1}{4}\cos 2y + \frac{y}{2}\sin 2y\right)\right]_{y=0}^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi^2}{8} - \left(-\frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{4} - 0\right)\right] = \frac{\pi^2+4}{32}$$

og

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\,dm = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{\pi/2}\int_{x=0}^{\sin y} y\cdot 2y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{\pi/2}\Big[2y^2x\Big]_{x=0}^{\sin y}dy = \int_0^{\pi/2} y^2\sin y\,dy$$
$$= \Big[2y\sin y + (2-y^2)\cos y\Big]_{y=0}^{\pi/2} = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0 - (0 + (2-0)\cdot 1) = \pi - 2.$$

Oppgave 08.03.



Figuren viser kurven $r = 2 + \cos\theta$, og derved området D. Antall mennesker som bor på D er

$$P = \iint_D f(x, y)\,dA = 500 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dA.$$

For å beregne dette dobbelintegralet, velger vi å integrere i polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
P &= 500 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2+\cos\theta} \sqrt{x^2 + y^2}\, r\, dr\, d\theta = 500 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2+\cos\theta} r \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= 500 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{2+\cos\theta} d\theta = \frac{500}{3} \int_0^{2\pi} (2 + \cos\theta)^3\, d\theta \\
&= \frac{500}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} (8 + 12\cos\theta + 6\cos^2\theta + \cos^3\theta)\, d\theta \\
&= \frac{500}{3} \int_0^{2\pi} (8 + 6\cos^2\theta)\, d\theta = \frac{500}{3} \int_0^{2\pi} (8 + 3(1 + \cos 2\theta))\, d\theta \\
&= \frac{500}{3} \int_0^{2\pi} 11\, d\theta = \frac{11000\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(Husk at $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta = 0.$)

Oppgave 08.04.

Platen er en sirkelskive med sentrum i $(\frac{1}{2}, 0)$ og radius $\frac{1}{2}$. La oss kalle den D. Vi trenger å bestemme avstanden d mellom aksen $y = x$ og et vilkårlig punkt $P(a, b)$ i D. Dette kan gjøres på flere måter, for eksempel:

Metode 1:

Trekk linjen gjennom P vinkelrett på aksen $y = x$, og la Q betegne skjæringspunktet mellom denne linjen og aksen. Da er lengden av linjestykket PQ lik den søkte avstanden d. Siden denne linjen gjennom P og Q står vinkelrett på linjen $y = x$, har den stigningstall $-1/1 = -1$, og derved ligning

$$y = b - (x - a) = a + b - x.$$

(Husk: hvis to linjer står normalt på hverandre, har de stigningstall m_1 og m_2 der $m_1 m_2 = -1$ eller $m_1 = 0$ og $m_2 = \infty$.)

Skjæringspunktet Q har derfor koordinater (x, y) gitt ved $y = x = a + b - x$, det vil si, $y = x = (a + b)/2$. Lengden av PQ er derfor

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Metode 2: Aksen $y = x$ kan parametriseres ved

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{0} + \mathbf{w}t \quad \text{for } -\infty < t < \infty \quad \text{der } \mathbf{w} = \langle 1, 1 \rangle.$$

Avstanden mellom et punkt $\mathbf{P} = \langle a, b, c \rangle$ og en linje $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}t$ i rommet er

$$d = \frac{|(\mathbf{P} - \mathbf{u}_0) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$

(Se for eksempel side 196 i Kort og Godt-boken.) Siden kryssproduktet bare er definert for vektorer med tre komponenter, skriver vi våre vektorer som $\mathbf{P} = \langle a, b, 0 \rangle$, $\mathbf{u}_0 = \langle 0, 0, 0 \rangle$ og $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 0 \rangle$. Avstanden mellom punktet og aksen er da

$$d = \frac{|(\mathbf{P} - \mathbf{0}) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\langle a, b, 0 \rangle \times \langle 1, 1, 0 \rangle|}{\sqrt{2}}$$

der

$$\langle a, b, 0 \rangle \times \langle 1, 1, 0 \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(a - b).$$

Altså er avstanden lik $d = \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$.

La D være området innenfor den gitte kurven (som er en sirkel med sentrum i $(\frac{1}{2}, 0)$ og radius $\frac{1}{2}$). Da er det søkte treghetsmomentet

$$I = \iint_D \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2 dm = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\cos\theta} \frac{(x-y)^2}{2} \sqrt{x^2+y^2}\, dA.$$

(Vi bemerker at $\cos\theta \geq 0$ for alle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.) Før vi gjennomfører integrasjonen, må vi uttrykke integranden i polarkoordinater. Siden $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$, er

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 = (x^2+y^2) - 2xy = r^2 - 2r^2\cos\theta\sin\theta, \\
\delta(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} = r.
\end{aligned}$$

Derved er

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\cos\theta} (r^2 - 2r^2\cos\theta\sin\theta) \cdot r \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \left[(1 - 2\cos\theta\sin\theta)\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{10} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta\sin\theta)\cos^5\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{10} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\theta\, d\theta - \frac{1}{5} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\theta\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{10} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2\theta)^2 \cos\theta\, d\theta - \frac{1}{5}\left[-\frac{\cos^7\theta}{7}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^2 \cos\theta\, d\theta + 0 \\
&= \frac{1}{10} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2\sin^2\theta + \sin^4\theta)\cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{5}\left[\sin\theta - 2\frac{\sin^3\theta}{3} + \frac{\sin^5\theta}{5}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8}{75}.
\end{aligned}$$

Oppgave 08.05.

a) Beholderen står på xy-planet (fordi $0 \le z \le (5-x+y)$ for alle (x,y) på og innenfor sirkelen $x^2+y^2=4$. Bunnen B av beholderen er sirkelskiven $x^2+y^2 \le 4$ i xy-planet.

Svar 1: Vi velger å integrere i kartesiske koordinater over bunnen B. Volumet er da gitt ved

$$\begin{aligned}
V &= \iint_B (5-x+y)\,dA = \int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (5-x+y)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=-2}^{2}\left[(5-x)y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^{2}\Big((5-x)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x^2})+0\Big)dx \\
&= 10\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx - 2\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

der $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ er lik arealet av halvsirkelskiven $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$, altså $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2\pi$, og det siste integralet er lik null (odde integrand). Altså er

$$V = 10\cdot 2\pi = 20\pi.$$

Svar 2: Vi velger å integrere i polarkoordinater over bunnen B:

$$V = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(5-r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot r\,d\theta\,dr.$$

Siden $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0$, er derved

$$V = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} 5r\,d\theta\,dr = \int_0^2 10\pi\,r\,dr = 10\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 20\pi.$$

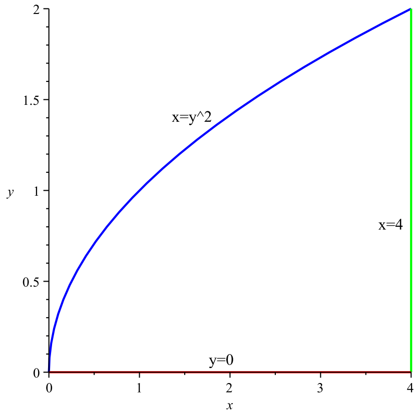
b) Gjennomsnittstemperaturen er

$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{V}\iint_B\int_{z=0}^{5-x+y}\left(80-\sqrt{x^2+y^2}+\frac{z-5}{2}\right)dz\,dA \\
&= \frac{1}{20\pi}\iint_B\left[\left(80-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{5}{2}\right)z+\frac{z^2}{4}\right]_{z=0}^{5-x+y} dA \\
&= \frac{1}{20\pi}\iint_B\left(\left(80-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{5}{2}\right)(5-x+y)+\frac{(5-x+y)^2}{4}\right)dA.
\end{aligned}$$

Vi velger å beregne dette dobbelintegralet i polarkoordinater:

$$
\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{20\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\left(80-r-\frac{5}{2}\right)(5-r\cos\theta+r\sin\theta)+\frac{(5-r\cos\theta+r\sin\theta)^2}{4}\right)r\,d\theta\,dr\\
&= \frac{1}{20\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\left(80-r-\frac{5}{2}\right)5+\frac{25+r^2-10r\cos\theta+10r\sin\theta-2r^2\cos\theta\sin\theta}{4}\right)r\,d\theta\,dr\\
&= \frac{1}{20\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\left(400-5r-\frac{25}{2}\right)+\frac{25+r^2}{4}\right)r\,d\theta\,dr\\
&= \frac{2\pi}{20\pi}\int_{r=0}^{2}\left(400r-5r^2-\frac{25}{2}r+\frac{25}{4}r+\frac{r^3}{4}\right)dr=\frac{4651}{60}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 08.06.



$\mathscr{I}$ er et dobbelintegral over området D vist på figuren over. Siden e^{x^2} ikke har en elementær antiderivert, bytter vi integrasjonsrekkefølgen:

$$\mathscr{I} = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\, e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2} e^{x^2} \right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \frac{x}{2} e^{x^2}\, dx.$$

Substitusjonen $u = x^2$ gir $du = 2x\, dx$, slik at

$$\int \frac{x}{2} e^{x^2}\, dx = \int e^u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} e^u + C = \frac{1}{4} e^{x^2} + C,$$

og derved

$$\mathscr{I} = \left[\frac{1}{4} e^{x^2} \right]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1).$$

Oppgave 08.07.

Vi må først identifisere integrasjonsområdet D for dobbelintegralet $\mathscr{I}$. Vi ser at ved å kvadrere på begge sider av

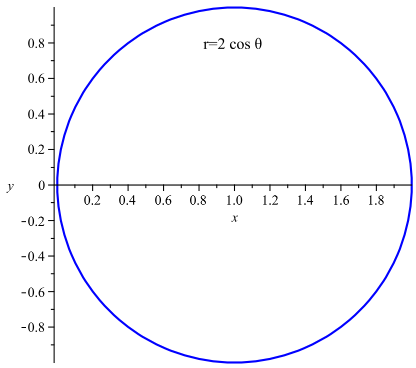
$$y = \pm\sqrt{2x - x^2}$$

får vi en annegradskurve, altså et kjeglesnitt:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x - x^2 \\ y^2 &= -(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

D er altså sirkelskiven med sentrum i $(1,0)$ og radius 1. Ved omgjøring til polarkoordinater, bruker vi at $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$, slik at

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x - x^2 \\ r^2\sin^2\theta &= 2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta \\ r^2 &= 2r\cos\theta \\ r &= 2\cos\theta. \end{aligned}$$



Derved er

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} r\,dA = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8\cos^3\theta}{3}\,d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Oppgave 08.08.

Volumet av pyramiden er

$$V = \frac{1}{3}(\text{grunnflate}) \cdot (\text{høyde}) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \frac{2}{3}\,a^3.$$

Vi legger pyramiden inn i et koordinatsystem slik at grunnflaten står på xy-planet med midtpunktet i origo og sidene parallelle med koordinataksene, og spissen ligger på den positive z-aksen. Symmetrien til T viser at tyngdepunktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ ligger på z-aksen. Det vil si, $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Det gjenstår å beregne

$$\overline{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z\,dV.$$

Et tverrsnitt av pyramiden parallelt med xy-planet i høyde $z \in (0, 2a)$, er et kvadrat med side $b(z)$ der formlike trekanter viser at

$$\frac{b(z)}{2a - z} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \text{slik at} \quad b(z) = \frac{2a - z}{2}.$$

En skive i høyde z har derfor volum

$$dV = b(z)^2\,dz = \frac{(2a - z)^2}{4}\,dz,$$

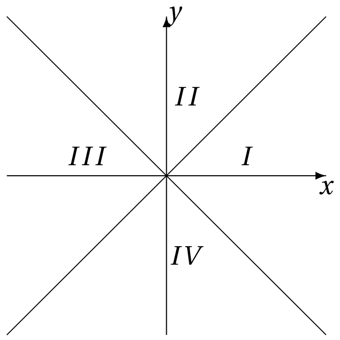
slik at

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{\frac{2}{3}\,a^3} \int_{z=0}^{2a} z \cdot \frac{(2a - z)^2}{4}\,dz = \frac{3}{8a^3} \int_0^{2a} (4a^2 z - 4az^2 + z^3)\,dz \\
&= \frac{3}{8a^3} \left[2a^2 z^2 - \frac{4}{3} a z^3 + \frac{z^4}{4} \right]_0^{2a} = \frac{3}{8a^3} \left(8a^4 - \frac{32}{3}\,a^4 + 4a^4 \right) = \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

Oppgave 08.09.

Grafen til $z = x^2$ er en parabolsk sylinderflate parallell med y-aksen. (I xz-planet er $z = x^2$ en parabel med akse langs den positive z-aksen. Siden y ikke inngår i ligningen, er det ingen restriksjoner på y. Når vi trekker parabelen parallelt med y-aksen, fremkommer derfor flaten $z = x^2$.)

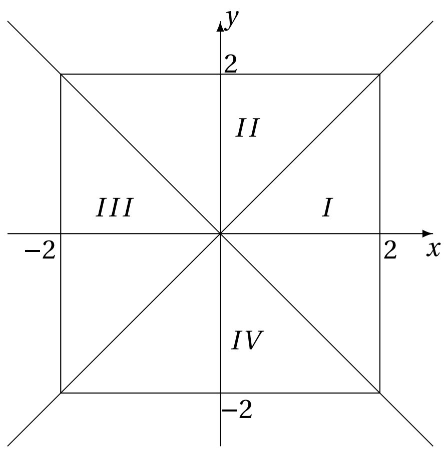
Grafen til $z = y^2$ er en parabolsk sylinderflate parallell med x-aksen. (I yz-planet er $z = x^2$ en parabel med akse langs den positive z-aksen. Siden x ikke inngår i ligningen, er det ingen restriksjoner på x. Når vi trekker parabelen parallelt med x-aksen, fremkommer derfor flaten $z = y^2$.)



For å identifisere flaten $z = \min\{x^2, y^2\}$, ser vi først at $x^2 = y^2$ på de to linjene $y = x$ og $y = -x$. Disse to linjene deler xy-planet i 4 sektorer. Vi nummerer disse med romertall som vist på figuren. I sektorene I og III er det sylinderen $z = y^2$ som ligger lavest, mens i sektorene II og IV er det $z = x^2$ som ligger lavest.

For å se hvor langt ut fra origo projeksjonen av T ned i xy-planet når, ser vi på skjæringskurvene mellom de parabolske sylinderne og planet $z = 4$. Projeksjonen av disse skjæringskurvene ned i xy-planet er gitt ved

$$x^2 = 4 \quad \text{og} \quad y^2 = 4.$$



Altså er projeksjonen av T et kvadrat som vist på figuren. På grunn av symmetrien, er volumet av T lik 8 ganger volumet av den delen av T som ligger over øvre halvdel B av sektor I. I sektor I er $\min\{x^2, y^2\} = y^2$. Volumet av T er derfor gitt ved

$$V = 8 \iint_B \int_{z=y^2}^{4} dz\, dA.$$

Det vil si,

$$V = 8\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x}\int_{z=y^2}^{4} dz\,dy\,dx = 8\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x}(4-y^2)\,dy\,dx = 8\int_{x=0}^{2}\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{x} dx$$

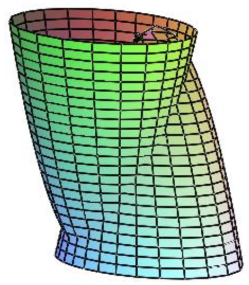
$$\frac{8}{3}\int_{0}^{2}(12x-x^3)\,dx = \frac{8}{3}\left[6x^2-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = \frac{160}{3}.$$

Oppgave 08.10.

Flaten S_1 gitt ved $z = (x-1)^2 + y^2$ er en rotasjonsparaboloide som åpner oppover, med akse parallell med z-aksen og bunnpunkt i $(1,0,0)$ på x-aksen.

Flaten S_2 gitt ved $z = 10-(x+1)^2 - y^2$ er en rotasjonsparaboloide som åpner nedover, med akse parallell med z-aksen og topppunkt i $(-1,0,0)$ på x-aksen.

Det er klart at T ligger mellom disse flatene, slik at „bunnen" ligger på S_1 og „lokket" på S_2.



Projeksjonen B av T ned i xy-planet, er begrenset av projeksjonen til skjæringskurven mellom S_1 og S_2. Denne projeksjonen er gitt ved:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + y^2 &= 10-(x+1)^2 - y^2 \\
x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 10 - x^2 - 2x - 2 - y^2 \\
2x^2 + 2y^2 &= 8 \\
x^2 + y^2 &= 2^2.
\end{aligned}$$

B er altså en sirkelskive med sentrum i origo og radius 2. Massen til T er

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x,y,z)\,dV \\
&= \iiint_T (x^2+y^2)\,dV.
\end{aligned}$$

Vi velger å integrere søylevis i sylinderkoordinater. Det vil si, B deles ved $r =$ konstant og $\theta =$ konstant, og vi får

$$\begin{aligned}
m &= \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=(x-1)^2+y^2}^{10-(x+1)^2-y^2} (x^2+y^2)\,dz\,dA \\
&= \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (x^2+y^2)\Big(10-(x+1)^2 - y^2 - (x-1)^2 - y^2\Big)\,dA.
\end{aligned}$$

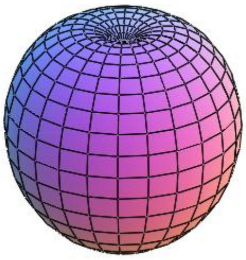
Før vi fortsetter med integrasjonen, må vi skrive integranden i polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2)(10 - x^2 - 2x - 1 - y^2 - x^2 + 2x - 1 - y^2) \\
&= r^2(10 - 2x^2 - 2y^2 - 2) = 2r^2(4 - x^2 - y^2) = 2r^2(4-r^2).
\end{aligned}$$

Massen er derved

$$\begin{aligned} m &= \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} 2r^2(4-r^2)r\,d\theta\,dr = \int_{r=0}^{2} 4\pi(4r^3 - r^5)\,dr \\ &= 4\pi\left[r^4 - \frac{r^6}{6}\right]_0^2 = 4\pi\left(16 - \frac{32}{3}\right) = \frac{64\pi}{3}. \end{aligned}$$

Oppgave 08.11.



Avstanden mellom et punkt (a,b,c) i T og z-aksen, er $d = \sqrt{a^2+b^2}$. Treghetsmomentet er derved

$$I_z = \iiint_T d^2\,dm = \iiint_T (x^2+y^2)\delta(x,y,z)\,dV = \iiint_T (x^2+y^2)r^2\,dV.$$

Vi velger å integrere i kulekoordinater. Da må integranden gjøres om til kulekoordinater og dV skrives $\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$. Siden $x^2+y^2=r^2=\rho^2\sin^2\varphi$, er

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1-\cos\varphi} \rho^4\sin^4\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\
&= 2\pi\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin^5\varphi\left[\frac{\rho^7}{7}\right]_{\rho=0}^{1-\cos\varphi} = \frac{2\pi}{7}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)^2\cdot\sin\varphi\cdot(1-\cos\varphi)^7\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Substitusjonen $u = 1-\cos\varphi$ viser at $du = \sin\varphi\,d\varphi$ og

$$1-\cos^2\varphi = (1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi) = u(2-u),$$

slik at

$$\begin{aligned}
&\int(1-\cos^2\varphi)^2(1-\cos\varphi)^7\sin\varphi\,d\varphi = \int u^2(2-u)^2u^7\,du = \int(4-4u+u^2)u^9\,du \\
&= \int(4u^9-4u^{10}+u^{11})\,du = \frac{2}{5}u^{10}-\frac{4}{11}u^{11}+\frac{1}{12}u^{12}+C.
\end{aligned}$$

Derved er

$$\begin{aligned}
I_z &= \frac{2\pi}{7}\left[\frac{2}{5}(1-\cos\varphi)^{10}-\frac{4}{11}(1-\cos\varphi)^{11}+\frac{1}{12}(1-\cos\varphi)^{12}\right]_{\varphi=0}^{\pi} \\
&= \frac{2\pi}{7}\left(\frac{2}{5}\cdot 2^{10}-\frac{4}{11}\cdot 2^{11}+\frac{1}{12}\cdot 2^{12}\right) = \frac{2^{11}\pi}{1155} = \frac{2048\pi}{1155}.
\end{aligned}$$

Oppgave 08.12.

Arealet av S er gitt ved flateintegralet

$$A = \iint_S d\sigma.$$

For å beregne et slikt integral, må vi parametrisere flaten S.

a) Vi velger å parametrisere S ved

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x,y) = x + y$$

for (x,y) i kvadratet D gitt ved $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Da er

$$\mathbf{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y)\rangle \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

slik at

$$d\sigma = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy = \sqrt{1+1+1}\, dx\, dy = \sqrt{3}\, dx\, dy.$$

Arealet A av S er derfor

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{3}\, dx\, dy = \sqrt{3}(\text{arealet av } D) = 4\sqrt{3}.$$

b) Vi velger å beskrive S i sylinderkoordinater:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = x^2 + y^2 = r^2 = g(r,\theta)$$

for $(r,\theta) \in D$ gitt ved $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Da er

$$\mathbf{r}(r,\theta) = \langle r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ g(r,\theta)\rangle$$

og

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & g_r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & g_\theta \end{vmatrix} = (g_\theta \sin\theta - g_r r\cos\theta)\mathbf{i} - (g_\theta\cos\theta + g_r r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

slik at (etter litt regning)

$$d\sigma = |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\, dr\, d\theta = \sqrt{r^2 + r^2 g_r^2 + g_\theta^2}\, dr\, d\theta = \sqrt{r^2 + 4r^2 + 0}\, dr\, d\theta = \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta.$$

Arealet A av S er derfor

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}\, r\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr.$$

Substitusjonen $u = 1+4r^2$ gir så at

$$A = 2\pi \left[\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{8\cdot\frac{3}{2}} \right]_0^{sqrt2} = 2\pi \frac{(1+8)^{3/2}}{12} = \frac{9\pi}{2}.$$

c) Med $f(x,y) = \cosh x$ og formelen for $d\sigma$ fra punkt a) over, er

$$d\sigma = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx\, dy = \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx\, dy = \cosh x\, dx\, dy,$$

slik at

$$A = \iint_S d\sigma = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{2} \cosh x\, dy\, dx = 2\Big[\sinh x\Big]_0^2 = 2\sinh 2.$$