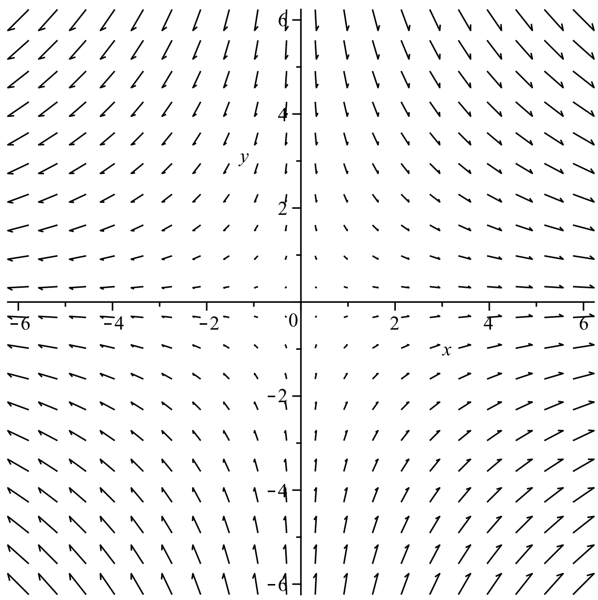
Oppgave 09.01.

a)



b)

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = \nabla\cdot\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 1-1 = 0.$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y) = \nabla\times\mathbf{F}(x,y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(0-0) = \mathbf{0}.$$

c) At $\operatorname{curl}\mathbf{F}(4,4) = \mathbf{0}$, betyr at hvis vi lar en partikkel gå rundt en gang på en liten sirkel med sentrum i $(4,4)$, i positiv omløpsretning, så er bidraget fra kraftfeltet til arbeidet cirka lik 0 ganger arealet av området innenfor sirkelen, altså cirka lik 0. La S være en slik sirkel. Ser vi på feltet, motvirker kraftfeltet bevegelsen langs S ganske sterkt på en del av S, og bidrar positivt til bevegelsen, men litt svakere, på resten av S.

Men feltet motvirker bevegelsen på en kortere del av S og bidrar positivt på en lengre del.

Derved kan kraft ganger vei der arbeidet motvirkes, muligvis akkurat oppveie kraft ganger vei langs delen der arbeidet påhjelpes.

d) Kurven C kan for eksempel parametriseres ved

$$C: \qquad x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta \quad \text{for } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Derved får vi

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\,d\theta$$

der $\mathbf{r}(\theta) = \langle 2\cos\theta,\ 2\sin\theta\rangle$, og derved $\mathbf{r}'(\theta) = \langle -2\sin\theta,\ 2\cos\theta\rangle$. Derved er

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \langle x, -y\rangle \cdot \langle -2\sin\theta, 2\cos\theta\rangle d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \langle 2\cos\theta, -2\sin\theta\rangle \cdot \langle -2\sin\theta, 2\cos\theta\rangle\,d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} -8\sin\theta\cos\theta\,d\theta = -4\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,d\theta = -4\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = -4.
\end{aligned}$$

e) Dersom $\mathbf{F}$ er et kraftfelt som virker på P, er $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ lik kraft ganger vei langs C. Det vil si, integralet gir bidraget fra kraftfeltet til arbeidet med å flytte partikkelen en gang langs C.

Oppgave 09.02.

a) La D være sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq R^2$ på og innenfor C. Greens Teorem kan ikke brukes fordi feltet ikke er kontinuerlig derverbart i hele D. Vi har et problempunkt i origo der feltet ikke engang er definert. Vi må derfor beregne linjeintegralet ved å

- parametrisere C:

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

  er for eksempel en slik parametrisering. Den følger sirkelen, og går presist en gang rundt i positiv omløpsretning.

- skrive linjeintegralet som et vanlig enkelintegral med θ som integrasjonsvariabel:

$$\begin{aligned}
W = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathbf{F}\cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\, d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right\rangle \cdot \langle -R\sin\theta, R\cos\theta\rangle d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\langle \frac{-R\sin\theta}{R^2}, \frac{R\cos\theta}{R^2} \right\rangle \cdot \langle -R\sin\theta, R\cos\theta\rangle d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi.
\end{aligned}$$

b) La $\tilde{D}$ være området på og innenfor kurven $\tilde{C}$.

Tilfelle 1: $0 \notin \tilde{D}$.
Da er $\mathbf{F}$ kontinuerlig deriverbar i et åpent område som inneholder hele $\tilde{D}$. Vi kan derfor bruke Greens teorem. Siden

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathbf{k} \\
&= \frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{k} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

er derfor

$$\tilde{W} = \iint_{\tilde{D}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, dA = \iint_{\tilde{D}} \mathbf{0}\cdot\mathbf{k}\, dA = \iint_{\tilde{D}} 0\, dA = 0.$$

Tilfelle 2: $0 \in \tilde{D}$.
La R være så stor at $\tilde{D}$ ligger helt innenfor sirkelen C i **a)**. La G være området som ligger mellom C og $\tilde{C}$. Da kan vi bruke Greens teorem på G der $\mathbf{F}$ er kontinuerlig deriverbar. Derfor er

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds - \oint_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_G \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA = 0,$$

og derved

$$\tilde{W} = \oint_{\tilde{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = 2\pi.$$

Oppgave 09.03.

La D være området på og innenfor C. C er lukket og stykkevis glatt, og **F** er kontinuerlig deriverbar i et åpent område som inneholder D. Vi kan derfor bruke Greens Teorem:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \iint_D \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - \frac{1}{2-\sin^2 y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(2\sin x^2 - xy^2)\right) dA \\
&= \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=-\sin x}^{\sin x} (2x - 2xy)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{\pi} 2x\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sin x}^{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\pi} 2x\cdot 2\sin x\,dx.
\end{aligned}$$

Ved delvis integrasjon er

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Derved er

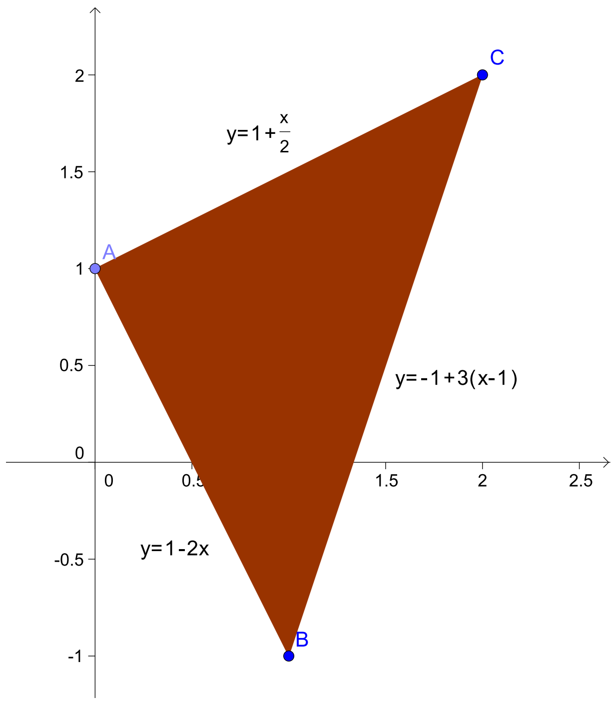
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = 4\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\pi} = 4\pi.$$

Oppgave 09.04.

C er lukket og stykkevis glatt, og $\mathbf{F}$ er kontinuerlig deriverbar i et åpent område som inneholder C og området D innenfor C. Vi kan derfor bruke Greens Teorem:

$$\Phi = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = \iint_D \left(\frac{\partial(2x^2y - e^{y^2})}{\partial x} + \frac{\partial(2x^2y + \ln(1+x^2))}{\partial y}\right) dA.$$

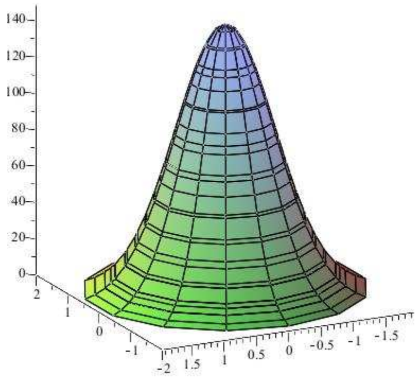
For å beregne dette dobbelintegralet lager vi en skisse av området D i xy-planet:

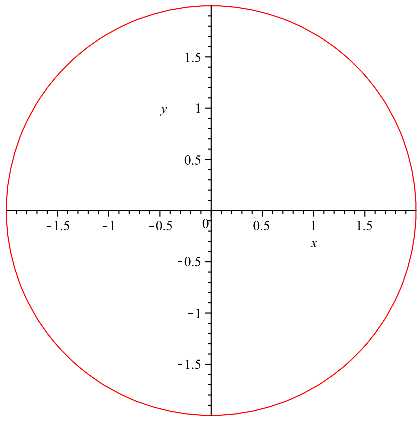


Vi velger å „telle” kolonnevis. Det gir

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=1-2x}^{1+x/2}(4xy+2x^2)\,dy\,dx + \int_{x=1}^{2}\int_{y=-1+3(x-1)}^{1+x/2}(4xy+2x^2)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{1}\Big[2xy^2+2x^2y\Big]_{y=1-2x}^{1+x/2}dx + \int_{x=1}^{2}\Big[2xy^2+2x^2y\Big]_{y=3x-4}^{1+x/2}dx \\
&= \int_0^1\left(-\frac{5}{2}x^3+10x^2\right)dx + \int_1^2\left(-\frac{45}{2}x^3+60x^2-30x\right)dx \\
&= \left[-\frac{5}{8}x^4+\frac{10}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-\frac{45}{8}x^4+20x^3-15x^2\right]_1^2 = \frac{40}{3}.
\end{aligned}$$

Oppgave 09.05.





Feltet ser litt komplisert ut, så la oss prøve med Stokes Teorem. Orienteringen av C stemmer med orientering av $\mathbf{n}$. Derved er:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,d\sigma.$$

Det ble kanskje ikke så mye bedre? Men vi kan bruke Stokes Teorem en gang til. For kurven C er naturligvis randen til mange flater. Spesielt er den randen til den plane flaten

$$B: \qquad z = e \quad \text{for } x^2 + y^2 \le 4.$$

Orienteringen til C må stemme med orienteringen av B. Enhetsnormalen til B må derfor være $\mathbf{k}$. Derved er

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_B \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_B \mathbf{G}\cdot\mathbf{k}\,d\sigma \\ &= \iint_B z\cos(x^2+y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2} e\cos r^2\cdot r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi e\left[\frac{1}{2}\sin r^2\right]_{r=0}^{2} = \pi\, e\sin 4\end{aligned}$$

der vi har integrert i polarkoordinater.

Oppgave 09.06.

a) Siden $\mathbf{F} = \nabla f$ for $f(x, y, z) = xy^2 \sin z + yz$ for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, følger det at $\mathbf{F}$ er et gradientfelt, og derved et konservativt felt.

b) Kurven C starter i punktet

$$A = \left(0^3 \sin 0,\ 0 + \ln 1,\ \frac{1+0}{1+0}\right) = (0, 0, 1),$$

og ender i punktet

$$B = \left(1^3 \sin 1,\ 1 + \ln \frac{1}{2},\ \frac{1+1}{1+1}\right) = (\sin 1,\ 1 - \ln 2,\ 1).$$

Derfor er

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \Big[f(x, y, z)\Big]_A^B = f(\sin 1,\ 1 - \ln 2,\ 1) - f(0, 0, 1) \\ &= (\sin 1)(1 - \ln 2)^2 \sin 1 + (1 - \ln 2) \cdot 1 - 0 = \{(1 - \ln 2) \sin 1\}^2 + 1 - \ln 2.\end{aligned}$$

Oppgave 09.07.

a) Kraftfeltet **F** må ha formen

$$\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$$

der

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|}\cdot\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\,dt = \int_C M\,dx + N\,dy = \mathscr{I}.$$

Det vil si, $M(x,y) = -y^2$ og $N(x,y) = x^2$, slik at $\mathbf{F}(x,y) = -y^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$.

b) Vektorfeltet **G** må ha formen

$$\mathbf{G}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$$

der

$$\Phi = \int_C \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

med $\mathbf{n}\perp\mathbf{T}$, $|\mathbf{n}| = 1$ og $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} > 0$. La (for eksempel)

$$C: \qquad y = t, \quad x = t^3 \quad \text{for } -2 \le t \le 2$$

være en parametrisering av C. Da er orienteringen av C også riktig, og

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle = \langle 3t^2, 1\rangle$$

sik at $\mathbf{T} = \langle 3t^2, 1\rangle / |\mathbf{r}'(t)|$, og **n** er enten $\langle 1, -3t^2\rangle / |\mathbf{r}'(t)|$ eller $\langle -1, 3t^2\rangle / |\mathbf{r}'(t)|$.

Vi vet at **n** skal ha positiv **j**-komponent (Φ skal være fluksen *opp* over C).

Altså er $\mathbf{n} = \langle -1, 3t^2\rangle / |\mathbf{r}'(t)| = \langle -\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}\rangle / |\mathbf{r}'(t)|$, slik at

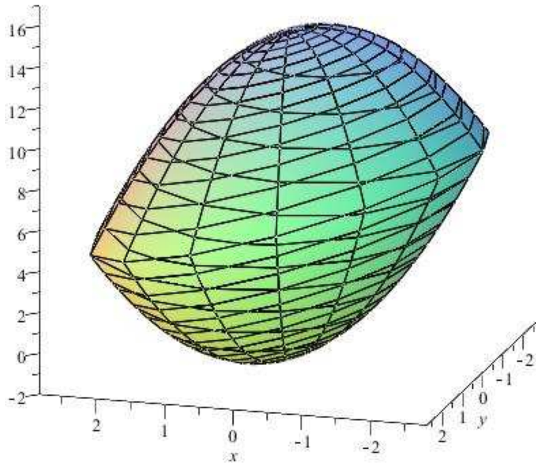
$$\Phi = \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{\langle -\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}\rangle}{|\mathbf{r}'(t)|}\cdot|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_C \mathbf{G}\cdot\langle -dy, dx\rangle = \int_C -P\,dy + Q\,dx = \mathscr{I}.$$

Derfor må $P(x,y) = -x^2$ og $Q(x,y) = -y^2$, slik at $\mathbf{G}(x,y) = -x^2\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}$.

c) Vi bruker parametriseringen av C som foreslått i **b)**. Det gir

$$\mathscr{I} = \int_{t=-2}^{2} \left((t^3)^2 \frac{dt}{dt} - t^2 \frac{dt^3}{dt} \right) dt = \int_{-2}^{2} (t^6 - t^2\cdot 3t^2)\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{3}{5}t^5 \right]_{-2}^{2} = \frac{1088}{35}.$$

Oppgave 09.08.



a) Projeksjonen er gitt ved

$$\begin{aligned} x^2+3x+y^2 &= 8-x^2-5x-y^2 \\ 2x^2+8x+2y^2 &= 8 \\ x^2+4x+4+y^2 &= 4+4 \\ (x+2)^2+y^2 &= 8 \end{aligned}$$

som er en sirkel med sentrum i $(-2,0)$ og radius $2\sqrt{2}$.

b) La D være sirkelskiven i xy-planet med sentrum i $(-2,0)$ og radius $2\sqrt{2}$. Volumet til T er da gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (z_{\text{oppe}} - z_{\text{nede}})\,dA = \iint_D (8-x^2-5x-y^2-x^2-3x-y^2)\,dA \\ &= 2\iint_D \left(8-(x+2)^2-y^2\right)dA. \end{aligned}$$

Sirkelskiven D kan beskrives ved

$$D: \qquad x=-2+r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta \quad \text{for } 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2\sqrt{2}.$$

Dette er polarkoordinater med polarsenter i $(-2,0)$, så $dA = r\,dr\,d\theta$, og derved

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\sqrt{2}} (8 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta \\ &= 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\sqrt{2}} (8 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 4\pi\left[4r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{2\sqrt{2}} = 64\pi. \end{aligned}$$

c) La S være overfaten til T. Ved divergensteoremet er da

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_T (1+1+1)\,dV = 3V = 3\cdot 64\pi = 192\pi.$$

d) La $\tilde{S}_2$ være den delen av overflaten S som ligger på S_2. Vi parametriserer $\tilde{S}_2$, for eksempel ved

$$\tilde{S}_2: \qquad x = x, \quad y = y, \quad z = 8 - x^2 - 5x - y^2 \quad \text{for } (x,y)\in D.$$

På vektorform kan det skrives

$$\tilde{S}_2: \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y) = \langle x,\, y,\, 8 - x^2 - 5x - y^2\rangle \quad \text{for } (x,y)\in D.$$

Det fundamentale vektorproduktet er da

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x-5 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(2x+5) - \mathbf{j}(-2y) + \mathbf{k}\cdot 1 = \langle 2x+5,\, 2y,\, 1\rangle. \end{aligned}$$

$\mathbf{N}$ er en normalvektor til $\tilde{S}_2$, med positiv $\mathbf{k}$-komponent. Det vil si, den peker ut av T. Derfor er $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$, og fluksen ut av T gjennom $\tilde{S}_2$ er

$$\Phi_2 = \iint_{\tilde{S}_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_D \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}\,dA = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA$$

der

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} &= \langle x+y,\, x^3+y,\, z+5x\rangle\cdot\langle 2x+5,\, 2y,\, 1\rangle \\ &= (x+y)(2x+5) + (x^3+y)\cdot 2y + (8 - x^2 - 5x - y^2) + 5x \\ &= 2x^3y + x^2 + y^2 + 2xy + 5x + 5y + 8. \end{aligned}$$

For $(x,y)\in D$ bruker vi parametriseringen fra **b)**, slik at

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = {} & 2(-2+r\cos\theta)^3 r\sin\theta + (-2+r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta \\ & + 2(-2+r\cos\theta)r\sin\theta + 5(-2+r\cos\theta+r\sin\theta) + 8 \\ = {} & 2r^4\cos^3\theta\sin\theta - 12r^3\cos^2\theta\sin\theta + r^2(1+26\cos\theta\sin\theta) + r(\cos\theta - 15\sin\theta) + 2. \end{aligned}$$

Derved er

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA \\ &= \int_{r=0}^{2\sqrt{2}}\int_{\theta=-\pi}^{\pi}\Big(24r^4\cos^3\theta\sin\theta - 12r^3\cos^2\theta\sin\theta + r^2(26\cos\theta\sin\theta+1) \\ &\qquad\qquad + r(\cos\theta - 15\sin\theta) + 2\Big)\,r\,d\theta\,dr \\ &= \int_{r=0}^{2\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}(r^2 + r\cos\theta + 2)\,r\,d\theta\,dr\end{aligned}$$

fordi de leddene som er fjernet fra integranden er odde funksjoner av θ, og derfor bare gir bidrag 0 til θ-integralet. Vi kan også fjerne leddet $r\cos\theta$ fra integranden fordi integralet av $\cos\theta$ over et intervall av lengde 2π er lik null. Altså er

$$\Phi_2 = \int_{r=0}^{2\sqrt{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^2+2)r\,d\theta\,dr = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}(r^3+2r)dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}+r^2\right]_{r=0}^{2\sqrt{2}} = 64\pi.$$

e) La $\tilde{S}_1$ være den delen av overflaten til T som ligger på S_1. Da er

$$\Phi_1 = \iint_{\tilde{S}_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

fluksen av $\mathbf{F}$ gjennom $\tilde{S}_1$ ut av T dersom enhetsnormalen $\mathbf{n}$ har negativ $\mathbf{k}$-komponent.

Vi kan naturligvis beregne Φ_1 på samme måte som for Φ_2, men vi har en smartere måte:

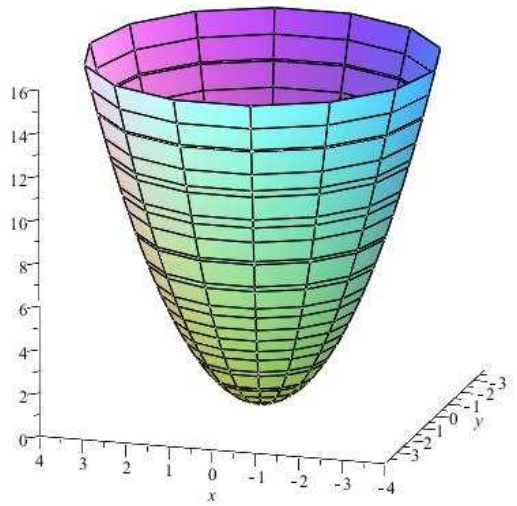
Fra **c)** følger det at

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi = 192\pi.$$

Derved er

$$\Phi_1 = 192\pi - 64\pi = 128\pi.$$

Oppgave 09.09.



Siden div$\mathbf{F}(x,y,z) = 1-2y+1 = 2(1-y)$, er det fristende å benytte divergensteoremet. Men flaten S er ikke lukket. La derfor L være den horisontale flaten

$$L: \qquad z = 16 \quad \text{for } x^2+y^2 \le 16.$$

Da fungerer L som et lokk på „bøtten" S.

La T være området mellom S og L (området nede i bøtten under lokket L). Ved divergensteoremet er da

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_S d\sigma + \iint_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_L\, d\sigma = \iiint_T 2(1-y)\,dV$$

der $\mathbf{n}_S$ og $\mathbf{n}_L$ er enhetsnormalene til henholdsvis S og L som peker ut av området T som er avgrenset av „bøtten" og „lokket". Det betyr at $\mathbf{n}_S$ har negativ $\mathbf{k}$-komponent, og $\mathbf{n}_L = \mathbf{k}$. Den søkte fluksen er derfor

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = -\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_S\,d\sigma = \iint_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,d\sigma - \iiint_T 2(1-y)\,dV$$

der

$$\iint_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,d\sigma = \iint_L z\,d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 16} 16\,dA = 16(\pi\cdot 4^2) = 16^2\pi = 256\pi$$

og

$$\begin{aligned}
\iiint_T 2(1-y)\,dV &= \int_{r=0}^{4}\int_{z=r^2}^{16}\int_{\theta=0}^{2\pi} 2(1-r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dz\,dr \\
&= \int_{r=0}^{4}\int_{z=r^2}^{16} 2\cdot 2\pi\,r\,dz\,dr = 4\pi\int_{r=0}^{4}(16-r^2)\,r\,dr \\
&= 4\left[8r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^4 = 256\pi.
\end{aligned}$$

Derved er $\Phi = 0$. (Alt renner ut gjennom lokket.)

Oppgave 09.10.

a)

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = z - z + g(x,y,z) + zg_z(x,y,z) = 0$$

holder bare hvis $g + zg_z = 0$. Det vil si, $g(x,y,z) = f(z)\cdot h(x,y)$ der h er kontinuerlig deriverbar og $f(z)$ er en løsning av differensialligningen

$$f + zf' = 0.$$

Dette er en separabel differensialligning med løsning $f(z) = C/z$. Altså må $g(x,y,z)$ ha formen

$$g(x,y,z) = \frac{h(x,y)}{z} \quad \text{for } (x,y,z) \in T.$$

b) Ifølge **a)**, må $g(x,y,z) = h(x,y)/z$, slik at

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (x+y)z & (x-y)z & h(x,y) \end{vmatrix} \\ &= \big(h_y(x,y) - x + y\big)\,\mathbf{i} - \big(h_x(x,y) - x - y\big)\,\mathbf{j} + (z-z)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Skal dette være lik $-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, må $h_x(x,y) = x$ og $h_y(x,y) = -y$. Det vil si, $h(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$ og $g(x,y,z) = \dfrac{x^2 - y^2 + C}{2z}$.

c) Skal $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ og $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, følger det av **b)** at

$$g(x,y,z) = \frac{h(x,y}{z} \quad \text{der } h_x(x,y) = x + y \text{ og } h_y(x,y) = x - y.$$

Siden $h_x(x,y) = x + y$, må $h(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi(y)$ der $\varphi(y)$ er en deriverbar funksjon. Det gir $h_y(x,y) = x + \varphi'(y)$ som er lik $x - y$ når $\varphi'(y) = -y$, altså dersom $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$.

Det betyr at kravene er oppfylt når $h(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2yx - y^2 + C_1)$, og derved $g(x,y,z) = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2 + C_1}{2z}$.