Oppgave 03.01.

a)

$$f(p) = \frac{15p}{(10+p)(100-p)} = \frac{15p}{1000+90p-p^2}$$

slik at

$$f'(p) = 15 \cdot \frac{1(1000+90p-p^2) - p(90-2p)}{(1000+90p-p^2)^2}.$$

For $p = 10$ er derfor

$$f(10) = \frac{150}{20 \cdot 90} \approx 0.083\,\text{milliarder} = 83\,\text{millioner}$$

og

$$f'(10) = 15 \cdot \frac{1000+900-100-10\cdot 70}{(1000+900-100)^2} = \frac{11}{2160} \approx 0.005\,\text{milliarder} = 5\,\text{millioner}.$$

b) $f(10)$ viser hvor dyrt det er for bedriften å sette igang tiltak som reduserer utslippet med 10 % fra det nivået som formelen gjelder for.

$f'(10)$ viser hvor mye det koster ekstra per prosentpoeng over 10 % hvis de reduserer *litt* mer.

Oppgave 03.02.

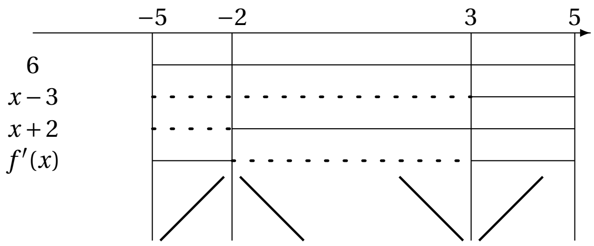
a)

Kandidater til ekstremalpunktene er de to randpunktene $x = -5$ og $x = 5$ og de kritiske punktene gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 &= 0 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}. \end{aligned}$$

Begge disse to kritiske punktene ligger i intervallet I.

For å klassifisere de lokale ekstremalpunktene ser vi på fortegnet til $f'(x) = 6(x-3)(x+2)$. Fortegnsskjema:



Det viser at $x = -5$ og $x = 3$ er lokale minimalpunkter mens $x = -2$ og $x = 5$ er lokale maksimalpunkter.

For å finne de absolutte ekstremalpunktene, sammenligner vi funksjonsverdiene i kandidatpunktene. Her er $f(-5) = -131$, $f(-2) = 58$, $f(3) = -67$ og $f(5) = 9$. Altså har f absolutt minimum for $x = -5$ og absolutt maksimum for $x = -2$ på I.

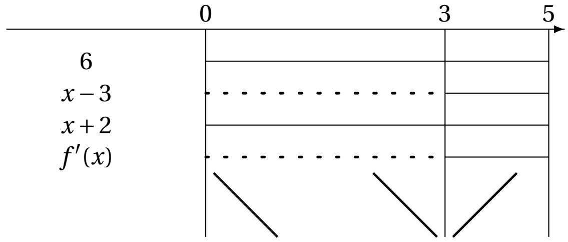
b)

Kandidater til ekstremalpunktene er randpunktet $x = 0$ og de kritiske punktene gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 &= 0 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}. \end{aligned}$$

Bare det kritiske punktet $x = (1+5)/2 = 3$ ligger i intervallet I.

For å klassifisere de lokale ekstremalpunktene ser vi på fortegnet til $f'(x) = 6(x-3)(x+2)$. Fortegnsskjema:



Det viser at $x = 3$ er et lokalt minimalpunkt og $x = 0$ er et lokalt maksimalpunkt.

For å finne de absolutte ekstremalpunktene, sammenligner vi funksjonsverdiene i kandidatpunktene. Vi ta også med endepunktet $x = 5$ (selv om det ikke er et kandidatpunkt). Vi må jo passe på at funksjonsverdien ikke blir for stor når x nærmer seg 5. Her er $f(0) = 14$, $f(3) = -67$ og $f(5) = 9$. Altså har f absolutt minimum for $x = -3$ og absolutt maksimum for $x = 0$ på I.

c) Kandidater til ekstremalpunkter er bare de kritiske punktene gitt ved

$$f'(x) = (\operatorname{sech}^2 x^2)2x = 0 \qquad \text{det vil si,} \quad x = 0.$$

Vi ser på fortegnet til $f'(x)$. $\operatorname{sech}^2 x^2 \geq 0$ for alle x, så $f'(x)$ har samme fortegn som x. Det viser at $x = 0$ er et lokalt minimalpunkt.

For å avgjøre om $x = 0$ også er at globalt minimalpunkt, må vi se hva som skjer med $f(x)$ når $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x^2 = \lim_{x\to-\infty} \tanh x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{e^{x^2} + e^{-x^2}} = 1.$$

Altså er $x = 0$ også et global minimalpunkt.

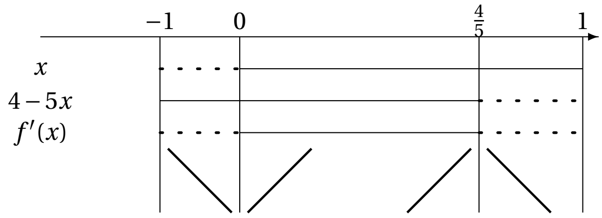
d)

Kandidater til ekstremalpunktene er de to randpunktene $x = -1$ og $x = 1$ og de kritiske punktene gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) = 2x\sqrt{1-x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) &= 0 \\ 4x(1-x) - x^2 &= 0 \\ 4x - 5x^2 &= 0 \\ x(4-5x) &= 0 \end{aligned}$$

som gir $x = 0$ og $x = 4/5$. Begge disse to kritiske punktene ligger i intervallet I.

For å klassifisere de lokale ekstremalpunktene ser vi på fortegnet til $f'(x) = x(4-5x)$. Fortegnsskjema:



Det viser at $x = 0$ og $x = 1$ er lokale minimalpunkter mens $x = -1$ og $x = 4/5$ er lokale maksimalpunkter.

For å finne de absolutte ekstremalpunktene, sammenligner vi funksjonsverdiene i kandidatpunktene. Her er $f(-1) = \sqrt{2} \approx 1.4142$, $f(0) = 0$, $f(4/5) = 16/(25\sqrt{5}) \approx 0.2862$ og $f(1) = 0$. Altså har f absolutt minimum for $x = 0$ og $x = 1$, og absolutt maksimum for $x = -1$ på I.

e)

Kandidater til ekstremalpunktene er randpunktet $x = 3$ og de kritiske punktene gitt ved

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 16x^3 = 0 \\ x^2(3 - 16x) &= 0. \end{aligned}$$

Det gir de to kritiske punktene $x = 0$ og $x = 3/16$ som begge ligger i intervallet I.

For å klassifisere de lokale ekstremalpunktene ser vi på fortegnet til $f'(x) = x^2(3 - 16x)$. $x^2 \geq 0$ for alle x, så $f'(x) > 0$ for $x < 3/16$ og $f'(x) < 0$ for $x > 3/16$. Det viser at $x = 0$ og $x = 3$ er lokale minimalpunkter, mens $x = 3/16$ er et lokalt maksimalpunkt.

For å finne de absolutte ekstremalpunktene, sammenligner vi funksjonsverdiene i kandidatpunktene. Vi ta også med endepunktet $x = -3$ (selv om det ikke er et kandidatpunkt). Vi må jo passe på at funksjonsverdien ikke blir for liten når x nærmer seg -3. Her er $f(-3) = -351$, $f(0) = 0$, $f(3/16) = 27/16384 \approx 0.0016$ og $f(3) = -297$. Altså har f absolutt maksimum for $x = 3/16$, men ikke noe globalt minimum på I.

Oppgave 03.03.

a)

Avstanden mellom et punkt (x, y) og origo i xy-planet er gitt ved $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vi skal minimalisere denne avstanden for punkter (x, y) som ligger på kurven $y = f(x) = 4/x$. De har avstand $d = \sqrt{x^2 + (4/x)^2}$. Vi kan like gjerne minimalisere kvadratet av avstanden d. Det vil si, vil vil finne globale minimalpunkt for

$$g(x) = x^2 + \frac{16}{x^2} \quad \text{for } x \neq 0.$$

Kandidater er de kritiske punktene gitt ved

$$g'(x) = 2x - 2 \cdot \frac{16}{x^3} = 0$$
$$\frac{2}{x^3}\left(x^4 - 16\right) = 0$$

som gir det ene punktet $x = 2$. Siden $g(x) \to \infty$ når $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$, må $x = 2$ være det globale minimalpunktet.

Konklusjon: Punktet nærmest origo på grafen $y = 4/x$ er punktet der $x = 2$ og $y = 4/2 = 2$, altså punktet $(2, 2)$.

b)

Avstanden mellom et punkt (x, y) og punktet $(3, 0)$ i xy-planet er gitt ved $d = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$. Vi skal minimalisere denne avstanden for punkter (x, y) som ligger på kurven $y = x\sqrt{4 - x^2}$. De har avstand $d = \sqrt{(x-3)^2 + x^2(4 - x^2)}$. Vi kan like gjerne minimalisere kvadratet av avstanden d. Det vil si, vil vil finne globale minimalpunkt for

$$g(x) = (x-3)^2 + 4x^2 - x^4 \quad \text{for } |x| \leq 2.$$

(Funksjonen $f(x)$ er bare definert for $|x| \leq 2$.) Kandidater er de to randpunktene $x = 2$ og $x = -2$, pluss de kritiske punktene gitt ved

$$g'(x) = 2(x-3) + 8x - 4x^3 = 0.$$

Dette er en tredjegradsligning i x, men vi ser raskt at $x = 1$ er en løsning. Polynomdivisjon viser at

$$(-4x^3 + 10x - 6)(x - 1) = -4x^2 - 4x + 6.$$

Ligningen $4x^2 + 4x - 6 = 0$ har løsninger $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{7})$, slik at

$$g'(x) = -4(x-1)(x + \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{7}))(x + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{7})).$$

De kritiske punktene for g er altså

$$x = 1, \quad x = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{7}) \quad \text{og} \quad x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{7}).$$

Alle disse ligger i intervallet $[-2, 2]$.

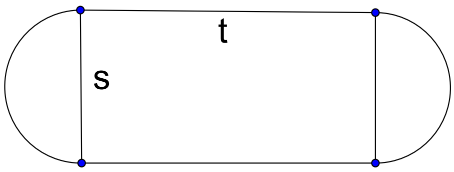
Vi sammenligner funksjonsverdiene for g i de fem kandidatpunktene:

$$g(-2) = 1, \quad g(1) = 7, \quad g(\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{7})) = \frac{65}{4} - \frac{7\sqrt{7}}{2} \approx 6.99, \quad g(\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{7})) = \frac{65}{4} + \frac{7\sqrt{7}}{2} \approx 25.5$$

og ser at $g(x)$ er minimal for $x = 1$.

Konklusjon: Punktet nærmest origo på grafen $y = f(x)$ er punktet der $x = 1$, altså punktet $(1, 0)$.

Oppgave 03.04.



La s og t være lengden av de to sidene i rektanglet, slik at radien i de to halvsirklene er $s/2$. Lengden av løpenbanen i innerkant er da

$$L = 2t + 2\pi \cdot \frac{s}{2} = 2t + \pi s = 400.$$

Det vil si, $t = 200 - \frac{1}{2}\pi s$.

Arealet innenfor løpebanen er derfor

$$A = t \cdot s + \pi \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s\left(200 - \frac{\pi s}{2}\right) + \frac{\pi s^2}{4} = s\left(200 - \frac{\pi s}{4}\right) = f(s).$$

Vi vil maksimere A. Det vil si, vi søker maksimum for $f(s)$. Det er klart at $s \geq 0$ og $t \geq 0$ er nødvendig. Det vil si, $0 \leq s \leq 400/\pi$. Vi søker derfor maksimum for s på intervallet $I = [0, 400/\pi]$

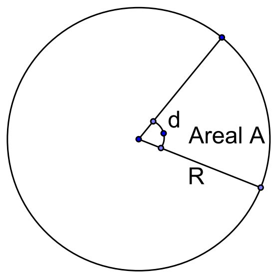
De kritiske punktene for $f(s)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(s) = 200 - \frac{2\pi s}{4} &= 0 \\ \frac{\pi s}{2} &= 200 \\ s &= \frac{400}{\pi}. \end{aligned}$$

Vi har altså bare ett kritisk punkt, nemlig endepunktet $s = 400/\pi$. Videre er $f(0) = 0$, så $400/\pi$ må være det globale maksimalpunktet.

Konklusjon: dimensjonene på det indre området er $s = 400/\pi$ og $t = 200 - \frac{1}{2}\pi s = 200 - 200 = 0$. Det vil si, arealet er maksimalt når banen er sirkelrund.

Oppgave 03.05.



La d betegne vinkelåpningen og R være radien i sirkelsektoren. Da er arealet av sektoren gitt ved

$$A = \pi R^2 \cdot \frac{d}{2\pi} = \frac{R^2 d}{2} \quad \text{slik at} \quad d = \frac{2A}{R^2}.$$

Omkretsen av sirkelsektoren har lengde

$$L = 2R + 2\pi R \cdot \frac{d}{2\pi} = 2R + Rd = 2R + \frac{2A}{R} = f(R).$$

Vi vil minimalisere $f(R)$ for $0 \leq R < \infty$. Det er klart at $L \to \infty$ dersom $R \to 0$ eller $R \to \infty$, så minimum må finnes i et kritisk punkt mellom disse ytterpunktene.

$$f'(R) = 2 - \frac{2A}{R^2} = 0 \qquad \text{for} \quad R = \sqrt{A}.$$

Dette er det eneste kritiske punktet for $f(R)$ i intervallet. Det må derfor være et minimumspunkt.

Konklusjon: radien i sirkelsektoren må være $R = \sqrt{A}$ og vinkelåpningen må være $d = 2A/R^2 = 2$.

Oppgave 03.06.

Vi vil maksimere vekstraten

$$f'(t) = \frac{-10}{(1+4e^{-t})^2} \cdot 4e^{-t} \cdot (-1) = \frac{40e^{-t}}{(1+4e^{-t})^2}$$

over intervallet $0 < t < \infty$. Vi søker kritiske punkter for funksjonen $f'(t)$ ved å kreve at den deriverte av $f'(t)$ skal være 0 dersom den eksisterer. Vi har

$$(f')'(t) = f''(t) = \frac{-40e^{-t}(1+4e^{-t})^2 - 40e^{-t} \cdot 2(1+4e^{-t}) \cdot 4e^{-t} \cdot (-1)}{(1+4e^{-t})^4}.$$

Nevneren i denne brøken er $\neq 0$ for alle t, så den deriverte eksisterer i hele intervallet. Selve brøken er lik null hvis og bare hvis telleren er lik null. Den felles faktoren $40e^{-t}(1+4e^{-t})$ i telleren er alltid $\neq 0$. Telleren er derfor lik null hvis og bare hvis

$$-(1+4e^{-t}) + 8e^{-t} = 0,$$

det vil si, hvis $4e^{-t} = 1$. Populasjonen vokser derfor raskest ved tidspunktet $t = -\ln\frac{1}{4} = \ln 4 \approx 1.39$.

Oppgave 03.07.

a) Vi har

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x^2+1), && f(1) = \ln 2,\\
f'(x) &= \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}, && f'(1) = 1,\\
f''(x) &= \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}, && f''(1) = 0,\\
f'''(x) &= \frac{-4x(x^2+1)^2-(2-2x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}\\
&= \frac{-4x(x^2+1)-8x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}, && f'''(1) = -1
\end{aligned}
$$

Taylorpolynimet er derfor

$$
P_3(x) = \ln 2 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{0}{2!}(x-1)^2 + \frac{-1}{3!}(x-1)^3 = \ln 2 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3.
$$

b) Vi har

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sqrt{x+1}}, && f(0) = e^1 = e,\\
f'(x) &= e^{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}e^{\sqrt{x+1}}, && f''(0) = \frac{e}{2},\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}e^{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}e^{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\\
&= -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}e^{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4}(x+1)^{-1}e^{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{4}e^{\sqrt{x+1}}\left((x+1)^{-1}-(x+1)^{-3/2}\right), && f''(0) = 0,\\
f'''(x) &= \frac{1}{4}e^{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}[(x+1)^{-1}-(x+1)^{-3/2}] + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x+1}}\left(-(x+1)^{-2}+\frac{3}{2}(x+1)^{-5/2}\right), && f'''(0) = \frac{e}{8}.
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomet er derfor

$$
P_3(x) = e + \frac{e/2}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{e/8}{3!}x^3 = e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48}.
$$

c) Taylorpolynomet er rett og slett $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ fordi dette polynomet har riktig form og Taylorpolynomer er unike.

Oppgave 03.08.

La $f(x) = \sqrt{x}$. Du vil beregne $f(17)$. Heldigvis vet du at $\sqrt{16} = 4$, så et Taylorpolynom om $x = 16$ burde kunne brukes. Du har

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} & f(16) &= 4, \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}, & f'(16) &= \frac{1}{8}, \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}, & f''(16) &= -\frac{1}{4\cdot 4^3} = -\frac{1}{256}, \\
f'''(x) &= -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8}x^{-5/2}, & f'''(16) &= \frac{3}{8\cdot 4^5} = \frac{3}{8192},
\end{aligned}$$

Du ser at de deriverte begynner å bli ganske små. For $16 \le c \le 17$ er for eksempel $|f'''(c)| \le |f'''(16)| \approx 0.000366$, slik at ved Taylors feilskranke er

$$|f(17) - P_2(17)| \le 0.000366 \cdot \frac{1^3}{3!} = \frac{0.000366}{6} < 0.001,$$

så du kan i alle fall bruke

$$\sqrt{17} \approx P_2(17) = 4 + \frac{1/8}{1!}(17-16) - \frac{1/256}{2!}(17-16)^2 = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{512} = \frac{2111}{512} \approx 4.12305.$$

Oppgave 03.09.

Volumet av en kolbe med slik form er

$$V = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3 = f(r)$$

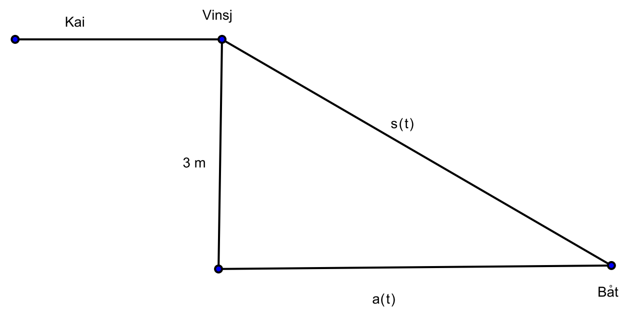
som funksjon av r. Volumet er eksakt 1 liter dersom $f(r) = 1$, det vil si, $r = r_0 = 1/\sqrt[3]{\pi}$. Dersom fabrikken produserer med en annen r-verdi, blir avviket

$$|f(r) - 1| = |f(r) - f(r_0)| \approx |f'(r_0)(r - r_0)| = |3\pi r_0^2 (r - r_0)| < 6.5|r - r_0|.$$

Skal dette avviket være < 0.001, må

$$|r - r_0| < \frac{0.001}{6.5} \approx 0.00015.$$

Oppgave 03.10.



a) La $s(t)$ være avstanden mellom vinsjen og båten ved tidspunkt t og $a(t)$ være den horisontale avstanden mellom vinsj og båt, målt i meter. Sammenhengen mellom $s(t)$ og $a(t)$ er da gitt ved

$$s(t)^2 = a(t)^2 + 3^2.$$

Vi kjenner $s'(t) = 1\,\mathrm{m/s}$, og søker $a'(t)$. Vi deriverer derfor ligningen over med hensyn på t, der t er målt i sekunder:

$$2s(t) \cdot s'(t) = 2a(t) \cdot a'(t) + 0.$$

Vi setter inn at $a(t) = 10$ og derved $s(t) = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}$, slik at

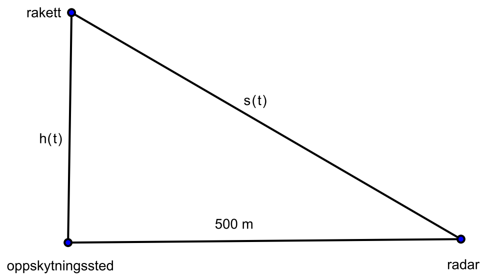
$$2\sqrt{109} \cdot 1 = 2 \cdot 10 \cdot a'(t)$$

som viser at $a'(t) = \sqrt{109}/10$. Båtens hastighet er altså $\sqrt{109}/10\,\mathrm{m/s}$ idet $a(t) = 10\,\mathrm{m}$.

b) Båtens hastighet øker når den nærmer seg kaien. Dette følger fordi fra a) er

$$a'(t) = \frac{s(t)}{a(t)} \cdot s'(t) = \frac{\sqrt{3^2 + a(t)^2}}{a(t)} = \sqrt{\frac{9}{a(t)^2} + 1}.$$

Oppgave 03.11.



La $h(t)$ være rakettens høyde t sekunder etter oppskytning. Sammenhengen mellom $s(t)$ og $h(t)$ er da

$$500^2 + h(t)^2 = s(t)^2.$$

Siden $s'(t) = 1 + 2t$, er $s'(5) = 1 + 2 \cdot 5 = 11$. Vi søker $h'(t)$. Den finner vi ved å derivere sammenhengen mellom $s(t)$ og $h(t)$ med hensyn på t:

$$2h(t) \cdot h'(t) = 2s(t) \cdot s'(t)$$

og setter inn at $s(5) = 500 + 5 + 25 = 530$ og $h(5) = \sqrt{530^2 - 500^2} = \sqrt{30900} = 10\sqrt{309}$:

$$h'(5) = \frac{s(5) \cdot s'(5)}{h(5)} = \frac{530 \cdot 11}{10\sqrt{309}} \approx 33.2\,\text{m/s}.$$

Oppgave 03.12.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\sin x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x - x\sin x}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{\sin(x-2)}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\cos(x-2)}=0.$$

OBS! Husk at vi ikke kan bruke L'Hôpitals regel når telleren går mot null, men ikke nevneren.

c)

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{t}\frac{\sin t}{t}=0\cdot 1=0.$$

(Vi har brukt substitusjonen $\frac{1}{x}=t$. Det er klart at $t\to 0^+$ når $x\to\infty$.)

e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{3^x-1}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5^x\ln 5}{3^x\ln 3}=\frac{\ln 5}{\ln 3}.$$

f) Vi finner først

$$L=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a/x}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+a/x}=a.$$

Derav følger det at

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a.$$

g) Vi finner først

$$L=\lim_{x\to 0^+}\ln\left((\cos 2x)^{1/x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\ln(\cos 2x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos 2x)}{x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(1/\cos 2x)(-\sin 2x)\cdot 2}{1}=0.$$

Derav følger det at

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos 2x)^{1/x} = e^0 = 1.$$

Oppgave 03.13.

a) Dette er en separabel differensialligning:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy \\
\int \frac{dy}{y} &= \int x\,dx \\
\ln|y| &= \frac{x^2}{2} + C_1 \\
|y| &= e^{x^2/2 + C_1} = C_2 e^{x^2/2} \quad \text{der } C_2 = e^{C_1} > 0 \text{ er en vilkårlig konstant} \\
y &= C\,e^{x^2/2}
\end{aligned}$$

der C er en vilkårlig reell konstant. (Egentlig skulle $C \neq 0$, men en ser lett ved innsetting i ligningen at også $y = 0$ er en løsning.)

b) Dette er en separabel differensialligning:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (y+3)(x-1) \\
\int \frac{dy}{y+3} &= \int (x-1)\,dx \\
\ln|y+3| &= \frac{(x-1)^2}{2} + C_1 \\
|y+3| &= e^{(x-1)^2/2 + C_1} = C_2 e^{(x-1)^2/2} \quad \text{der } C_2 = e^{C_1} > 0 \text{ er en vilkårlig konstant} \\
y+3 &= C\,e^{(x-1)^2/2} \quad \text{der } C \text{ er en vilkårlig konstant} \\
y &= C\,e^{(x-1)^2/2} - 3.
\end{aligned}$$

(Egentlig skulle $C \neq 0$, men en ser lett ved innsetting i ligningen at også $y = 0$ er en løsning.)

c) Dette er en lineær førsteordens differensialligning. Vi søker først en integrerende faktor $v(x)$ som er slik at

$$\begin{aligned}
y'v + vxy &= (yv)' \\
y'v + vxy &= y'v + yv' \\
xv &= v' \\
\frac{dv}{dx} &= xv \\
\int \frac{dv}{v} &= \int x\,dx \\
\ln|v| &= \frac{x^2}{2} + C_1
\end{aligned}$$

Det vil si, vi kan bruke $v(x) = e^{x^2/2}$:

$$\begin{aligned}
y'v + vxy &= vx \\
(yv)' &= x \cdot e^{x^2/2}
\end{aligned}$$

Vi integrerer med hensyn på x på begge sider av likhetstegnet. På venstre side får vi yv. På høyre side bruker vi substitusjonen $t = x^2/2$ som gir $dt = x\,dx$ og derved

$$\begin{aligned}
y \cdot e^{x^2}/2 &= \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2/2} + C \\
y &= 1 + C e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

der C er en vilkårlig konstant.

d) Dette er en lineær førsteordens differensialligning som kan skrives

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} = \frac{x^{3/2}}{1+x}$$

for $x \neq -1$. En differensialligning løses alltid på et intervall. Vi velger derfor å løse denne ligningen på intervallet $(-1, \infty)$. Vi søker først en integrerende faktor $v(x)$ som er slik at

$$\begin{aligned}
y'v + \frac{vy}{1+x} &= (yv)' \\
y'v + \frac{vy}{1+x} &= y'v + yv' \\
\frac{v}{1+x} &= v' \\
\frac{dv}{dx} &= \frac{v}{1+x} \\
\int \frac{dv}{v} &= \int \frac{dx}{x+1} \\
\ln|v| &= \ln|x+1| + C_1
\end{aligned}$$

Det vil si, vi kan bruke $v(x) = x + 1$. Ah! Dette kunne vi ha spart oss, for

$$(1+x)y' + y = ((1+x)y)'.$$

Vi får derfor

$$
\begin{aligned}
(1+x)\,y' + y &= x^{3/2} \\
((1+x)\,y)' &= x^{3/2} \\
(1+x)\,y &= \frac{x^{5/2}}{5/2} + C_1 = \frac{2x^{5/2}}{5} + C_1 \\
y &= \frac{2x^{5/2}+C}{5(x+1)} \quad \text{for } x > -1
\end{aligned}
$$

der $C = 5C_1$ er en vilkårlig konstant.

Oppgave 03.14.

a) Ligningen er separabel:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2(y-1)(y+2) \\
\int \frac{dy}{(y-1)(y+2)} &= \int 2dx \\
\int \left(\frac{1/3}{y-1} - \frac{1/3}{y+2}\right) dy &= 2\int dx \\
\frac{1}{3}\ln|y-1| - \frac{1}{3}\ln|y+2| &= 2x + C_1 \\
\ln\left|\frac{y-1}{y+2}\right| &= 6x + C_2 \\
\left|\frac{y-1}{y+2}\right| &= e^{6x+C_2} = C_3 e^{6x} \\
\frac{y-1}{y+2} &= Ce^{6x} \\
y-1 &= Ce^{6x}(y+2) \\
(1-Ce^{6x})y &= 2Ce^{6x}+1 \\
y &= \frac{2Ce^{6x}+1}{1-Ce^{6x}}.
\end{aligned}
$$

Kravet $y(0) = 2$ holder hvis $\frac{2C+1}{1-C} = 2$, det vil si, $2C+1 = 2-2C$, altså $C = 1/4$. Løsningen av initialverdiproblemet er derfor

$$
y = \frac{\frac{1}{2}e^{6x}+1}{1-\frac{1}{4}e^{6x}} = 2\frac{e^{6x}+2}{4-e^{6x}}.
$$

b) Dette er en separabel differensialligning.

$$
\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) \\
\int \frac{dN}{N(1-\frac{N}{k})} &= \int r\,dt \\
\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1/k}{1-N/k}\right) dN &= \int r\,dt \\
\ln|N| - \ln\left|1 - \frac{N}{k}\right| &= rt + C_1 \\
\ln\left|\frac{N}{1-\frac{N}{k}}\right| &= rt + C_1 \\
\frac{N}{1-\frac{N}{k}} &= \pm e^{rt+C_1} = C_2 e^{rt} \\
N &= C_2 e^{rt} - \frac{N}{k} C_2 e^{rt} \\
N\left(1 + \frac{C_2}{k} e^{rt}\right) &= C_2 e^{rt} \\
N &= \frac{C_2 e^{rt}}{1 + \frac{C_2}{k} e^{rt}} = \frac{C_2}{e^{-rt} + \frac{C_2}{k}}.
\end{aligned}
$$

Kravet $N(0) = 10k$ gir at

$$10k = \frac{C_2}{1+10}, \quad \text{slik at} \quad C_2 = 110k.$$

Løsningen av initialverdiproblemet er derfor

$$N(t) = \frac{110k}{e^{-rt} + 110}.$$

c) Ligningen er en førsteordens lineær differensialligning. Vi søker først en integrerende faktor v slik at

$$
\begin{aligned}
y'v - yv &= (yv)' \\
y'v - yv &= y'v + yv' \\
v &= v'
\end{aligned}
$$

så vi kan bruke $v(x) = e^x$. Det gir

$$
\begin{aligned}
e^x y' - e^x y &= e^x \cdot x^3 \\
(e^x y)' &= e^x \cdot x^3
\end{aligned}
$$

Når vi integrerer med hensyn på x på begge sider, får vi $e^x y$ på venstre side. På høyre side bruker vi delvis integrasjon gjentatte ganger:

$$\begin{aligned}\int x^3e^x\,dx &= x^3e^x - \int 3x^2e^x\,dx = x^3e^x - 3x^2e^x + \int 6xe^x\,dx \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6\int e^x\,dx \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C.\end{aligned}$$

Dette viser at

$$\begin{aligned}e^x y &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C \\ y &= x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + Ce^{-x}.\end{aligned}$$

Initialkravet $y(1) = 2$ viser at

$$2 = 1 - 3 + 6 - 6 + \frac{C}{e}, \quad \text{det vil si,} \quad C = 4e,$$

og løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + 4e^{1-x}.$$

d) Dette er en separabel differensialligning:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y(1+x^2) \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (1+x^2)\,dx \\ \ln|y| &= x + \frac{x^3}{3} + C_1 \\ |y| &= C_2 e^{x+x^3/3} \\ y &= Ce^{x+x^3/3}.\end{aligned}$$

Initialkravet $y(0) = 4$ viser at $C = 4$, slik at løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = 4e^{x+x^3/3}.$$