Oppgave 02.01.

a)

$$f_1(x) = 1 + (\sqrt{x})^4 = 1 + x^2,$$
$$f_2(x) = \sqrt{1 + x^4}.$$

Sammensetningen $g \circ h$ er definert for $x \geq 0$ (fordi $h(x)$ krever at $x \geq 0$). Sammensetningen $h \circ g$ er definert for alle reelle x.

b)

$$f_1(x) = e^{\ln x + 2} = e^{\ln x} \cdot e^2 = x \cdot e^2 = e^2 x,$$
$$f_2(x) = \ln(e^{x+2}) = x + 2.$$

Sammensetningen $g \circ h$ er definert for $x > 0$ (fordi $h(x)$ krever at $x > 0$). Sammensetningen $h \circ g$ er definert for alle reelle x (fordi $e^{x+2} > 0$ for alle x).

c)

$$f_1(x) = \sin(\arcsin x) = x,$$
$$f_2(x) = \arcsin(\sin x) = x \text{ flyttet til intervallet } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Sammensetningen $g \circ h$ er definert for $-1 \leq x \leq 1$ (fordi $h(x)$ bare er definert for disse verdiene av x). Sammensetningen $h \circ g$ er definert for alle reelle x, men merk at for eksempel $h \circ g(5\pi/2) = \pi/2$.

d)

$$f_1(x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1 - x^2},$$
$$f_2(x) = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \tfrac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \text{ flyttet til intervallet } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Sammensetningen $g \circ h$ er definert for $-1 \leq x \leq 1$ (fordi $h(x)$ bare er definert for disse verdiene av x). (Vi får bare den positive roten for $g \circ h$ fordi $\cos x \geq 0$ for alle x i verdimengden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ til $\arcsin x$.) Sammensetningen $h \circ g$ er definert for alle reelle x, men merk at for eksempel $h \circ g(5\pi/2) = 0$.

Oppgave 02.02.

a)

$$
\begin{aligned}
(x^2)^{3/4} + 2x^{3/4} &= 1 \\
x^{3/2} + 2x^{3/4} &= 1 \\
(x^{3/4})^2 + 2 \cdot x^{3/4} - 1 &= 0 \\
x^{3/4} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Derved får vi løsningen

$$
\begin{aligned}
x^{3/4} &= -1 + \sqrt{2} \\
x &= (\sqrt{2} - 1)^{4/3}.
\end{aligned}
$$

Det er en definisjonssak om vi skal tillate $x < 0$, det vil si $x^{3/4} = -1 - \sqrt{2}$ som gir $x = (-1 - \sqrt{2})^{4/3} = [(-1 - \sqrt{2})^{1/3}]^4 = [(-1 - \sqrt{2})^4]^{1/3} > 0$ og derved $x^{3/4} = -\sqrt[4]{x^3}$. Gjør vi det (vi har gjort det i boken), får vi også løsningen

$$
x = (-1 - \sqrt{2})^{4/3} = (1 + \sqrt{2})^{4/3}.
$$

b)

$$
\begin{aligned}
2^x + 4^x + \frac{1}{4} &= 0 \\
2^x + (2^2)^x + \frac{1}{4} &= 0 \\
2^x + 2^{2x} + \frac{1}{4} &= 0 \\
2^x + (2^x)^2 + \frac{1}{4} &= 0 \\
2^x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

som er umulig fordi $2^x > 0$ for alle x. Denne ligningen har derfor ingen løsninger.

c)

$$
\begin{aligned}
\ln(x + 1) &= 3e \\
e^{\ln(x+2)} &= e^{3e} \\
x + 2 &= e^{3e} \\
x &= e^{3e} - 2.
\end{aligned}
$$

d)

$$\begin{aligned}
\sin x + \tan x &= 0 \\
\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} &= 0 \\
\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)\sin x &= 0
\end{aligned}$$

som holder hvis enten $\sin x = 0$ eller $\cos x = -1$. Ligningen har derfor uendelig mange løsninger, nemlig alle $x = n\pi$ der n er heltall (positivt eller negativt eller null).

e)

$$\begin{aligned}
e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{x^2} &= 1 \\
e^{x+2x+x^2} &= 1 \\
\ln(e^{3x+x^2}) &= \ln 1 \\
3x + x^2 &= 0 \\
x(3+x) &= 0
\end{aligned}$$

slik at $x = 0$ og $x = -3$ er løsningene av ligningen.

f)

$$\begin{aligned}
e^x + e^{2x} + \frac{1}{4} &= 0 \\
e^x + (e^x)^2 + \frac{1}{4} &= 0 \\
e^x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

som er umulig fordi $e^x > 0$ for alle x. Ligningen har altså ingen løsninger.

g)

$$\begin{aligned}
\ln x + \ln(2x) - 4 &= 0 \\
\ln(x \cdot 2x) - 4 &= 0 \\
\ln(2x^2) &= 4 \\
e^{\ln(2x^2)} &= e^4 \\
2x^2 &= e^4 \\
x &= \pm\sqrt{\frac{e^4}{2}} = \pm\frac{e^2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

h)

$$
\begin{aligned}
\sinh(\ln x) &= 4 \\
\frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} &= 4 \\
e^{\ln x} - \frac{1}{e^{\ln x}} &= 8 \\
x - \frac{1}{x} &= 8 \\
x^2 - 1 &= 8x \\
x^2 - 8x - 1 &= 0 \\
x &= \frac{8 \pm \sqrt{64+4}}{2} = 4 \pm \sqrt{17}
\end{aligned}
$$

der bare $x = 4 + \sqrt{17}$ er en løsning fordi $\ln x$ bare er definert for positive x.

i)

$$
\begin{aligned}
\ln x - \ln(x+1) &= 1 \\
\ln \frac{x}{x+1} &= 1 \\
\frac{x}{x+1} &= e^1 = e \\
x &= e(x+1) = ex + e \\
x - ex &= e \\
x(e-1) &= -e \\
x &= \frac{-e}{e-1},
\end{aligned}
$$

men dette er et negativt tall. Siden $\ln x$ ikke er definert for negative x, har denne ligningen ingen løsning. (Den har en kompleks løsning, men det er en annen sak.)

Oppgave 02.03.

a) Det er klart at siden $A = 2$, må $a = 2$.

Siden $2\sin(b + c(x + \pi))$ skal være lik $2\sin(b + cx) = 2\sin(b + cx + 2\pi)$, er $c = 2$ et mulig valg. ($c = -2$ vil også fungere.)

Siden $f(0) = 2\sin(b+0) = f_0 = 0$, kan vi for eksempel bruke $b = 0$ eller $b = \pi$ (som gir to ulike funksjoner).

b) Det er klart at siden $A = 2$, må $a = 2$.

Perioden skal være som for $\sin x$, så vi setter $c = 1$. ($c = -1$ er også et mulig valg.)

Siden $f(0) = 2\sin(b + 0) = f_0 = 1$, må $\sin b = \frac{1}{2}$. Vi kan derfor for eksempel bruke $b = \frac{\pi}{6}$ eller $b = \frac{5\pi}{6}$ (som gir to ulike funksjoner).

c) Det er klart at siden $A = \frac{1}{2}$, må $a = \frac{1}{2}$.

Siden $\frac{1}{2}\sin(b + c(x + 1))$ skal være lik $\frac{1}{2}\sin(b + cx) = \frac{1}{2}\sin(b + cx + 2\pi)$, kan vi sette $c = 2\pi$. ($c = -2\pi$ er også et mulig valg.)

$f(0) = \frac{1}{2}\sin(b + 0) = f_0 = 1$ er umulig, for $|\sin x| \le 1$ for alle x. Altså finnes ikke noen slik funksjon. (Dette kunne vi ha sett med en gang, for $f(x)$ skulle bare ha utsving på $\frac{1}{2}$.)

d) Det er klart at siden $A = 30$, må $a = 30$.

Siden $30\sin(b + c(x + 50))$ skal være lik $30\sin(b + cx) = 30\sin(b + cx + 2\pi)$,setter vi $c = \frac{2\pi}{50}$. ($c = -\frac{2\pi}{50}$ er også et mulig valg.)

Siden $f(0) = 30\sin(b+0) = f_0 = -15$, må $\sin b = -\frac{1}{2}$, og vi kan for eksempel bruke $b = -\frac{\pi}{6}$ eller $b = \frac{7\pi}{6}$ (som gir to ulike funksjoner).

Oppgave 02.04.

a) Vi løser ligningen $y = e^{x+1}$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} \ln y &= x + 1 \\ x &= \ln y - 1. \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(x) = -1 + \ln x$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er $(0, \infty)$.

b) Vi løser ligningen $y = e^{x^3}$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} \ln y &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{\ln y}. \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\ln y}$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er $(0, \infty)$ fordi $\ln y$ krever at $y > 0$.

c) Vi løser ligningen $y = 1 + e^{3x}$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y - 1 &= e^{3x} \\ \ln(y-1) &= 3x \\ x &= \frac{1}{3}\ln(y-1). \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\ln(y-1)$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er $(1, \infty)$.

d) Vi løser ligningen $y = \frac{1+p}{1-p}$ med hensyn på p:

$$\begin{aligned} y(1-p) &= 1 + p \\ y - yp &= 1 + p \\ y - 1 &= p(y+1) \\ p &= \frac{y-1}{y+1}. \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er alle $y \neq -1$.

e) Vi løser ligningen $x = \frac{1-y^3}{1+y^3}$ med hensyn på y:

$$\begin{aligned} x(1+y^3) &= 1-y^3 \\ x + xy^3 &= 1-y^3 \\ y^3(x+1) &= 1-x \\ y^3 &= \frac{1-x}{1+x} \\ y &= \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}. \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er alle $x \neq -1$.

f) Vi løser ligningen $y = \arcsin x^3$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x^3 \\ \sin y &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{\sin y}. \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\sin y}$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er lik verdimengden for f, det vil si, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

g) Vi løser ligningen $y = \ln(x+1)$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= \ln(x+1) \\ e^y &= x+1 \\ x &= e^y - 1. \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(y) = e^y - 1$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er $(-\infty, \infty)$.

h) Vi løser ligningen $y = \log_2(t^3 - 1)$ med hensyn på t:

$$\begin{aligned} y &= \log_2(t^3-1) \\ 2^y &= t^3 - 1 \\ t^3 &= 1 + 2^y \\ t &= \sqrt[3]{1+2^y}. \end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{1+2^y}$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er $(-\infty, \infty)$.

i) Vi løser ligningen $y = \sinh x$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
2y &= e^x - e^{-x} \\
2ye^x &= (e^x)^2 - 1 \\
(e^x)^2 - 2ye^x - 1 &= 0 \\
e^x &= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{1+y^2}
\end{aligned}$$

der bare den positive roten kan brukes fordi $e^x > 0$ for alle x. Derved er $f^{-1}(y) = y + \sqrt{1+y^2}$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er $(-\infty, \infty)$.

j) Funksjonen $y = \cosh x$ er ikke én-entydig, og har derfor ingen invers. Vi kan restriktere definisjonsområdet for funksjonen, naturligvis, men det er ikke gjort her.

k) Vi løser ligningen $y = \tanh x$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
y(e^x + e^{-x}) &= e^x - e^{-x} \\
y((e^x)^2 + 1) &= (e^x)^2 - 1 \qquad \text{(multipliserer med } e^x\text{)} \\
(e^x)^2(y-1) &= -y - 1 \\
e^{2x} &= \frac{1+y}{1-y} \\
2x &= \ln \frac{1+y}{1-y} \\
x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.
\end{aligned}$$

Derved er $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$. Det naturlige definisjonsområdet for f^{-1} er lik verdimengden for $\tanh x$, det vil si, $(-1, 1)$.

Oppgave 02.05.

a) Siden $e^{\ln x} = x$, er $f'(x) = 1$.

b)

$$f'(x) = e^{\log_2 x} \cdot (\log_2 x)' = e^{\log_2 x} \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \frac{e^{\log_2 x}}{x \ln 2}.$$

c) Siden $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$, er

$$f'(x) = \frac{1}{5}\, x^{1/5-1} = \frac{x^{-4/5}}{5} = \frac{1}{5x^{4/5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

d) Siden $\sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$, er

$$f'(x) = \frac{3}{5}\, x^{3/5-1} = \frac{3}{5}\, x^{-2/5} = \frac{3x^{-2/5}}{5} = \frac{3}{5x^{2/5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

e) Siden den deriverte av $x = \tan y$ er $\sec^2 y$, er

$$f'(x) = (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Vi vil ha svaret uttrykt ved x. Siden $\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$, er $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, og vi får

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

f)

$$f'(y) = (e^{y^2})' = e^{y^2} \cdot (y^2)' = e^{y^2} 2y.$$

g)

$$f'(p) = (p)' \ln p + p(\ln p)' = 1 \cdot \ln p + p \cdot \frac{1}{p} = \ln p + 1.$$

h)

$$f'(t) = \frac{(t \sin t)'(1+t^2) - (t \sin t)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{(\sin t + t \cos t)(1+t^2) - (t \sin t) \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t^2)\sin t + (1+t^2)\cos t}{(1+t^2)^2}.$$

Oppgave 02.06.
Beregn $f'(a)$.

a) $f'(x) = 2^x \ln 2$, så $f'(1) = 2\ln 2$.

b) $f'(x) = (2^x)' \ln x + 2^x (\ln x)' = (2^x \ln 2)\ln x + 2^x \dfrac{1}{x}$, så

$$f'(e) = (2^e \ln 2)\ln e + 2^e \frac{1}{e} = (2^e \ln 2)\cdot 1 + 2^e \frac{1}{e} = 2^e \left(\ln 2 + \frac{1}{e}\right).$$

c) Siden $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\, x^{-1/2}$, er

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-1/2-1} = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}},$$

slik at

$$f'(4) = \frac{-1}{4\sqrt{4^3}} = \frac{-1}{4\cdot 8} = \frac{-1}{32}.$$

d) Den inverse funksjonen til $g(x) = \dfrac{x^5-1}{x^5+1}$ finner vi ved å løse ligningen $y = g(x)$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^5-1}{x^5+1} \\ y(x^5+1) &= x^5 - 1 \\ x^5(y-1) &= -1-y \\ x^5 &= \frac{1+y}{1-y} \\ x &= \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{1/5}. \end{aligned}$$

Det vil si, $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/5}$, og derved

$$f'(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/5-1}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-4/5}\cdot\frac{2}{(1-x)^2},$$

slik at

$$f'(2) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{-1}\right)^{-4/5}\cdot\frac{2}{(-1)^2} = \frac{2}{5}(-3)^{-4/5} = \frac{2}{5(-3)^{4/5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{81}}.$$

e) Ved implisitt derivasjon gjelder

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' + 2 \cdot \frac{1}{y^2} \cdot (y^2)' + y' &= 1 \\ \frac{1}{y} \cdot y' + \frac{4}{y} \cdot y' + y' &= 1. \end{aligned}$$

Vi setter inn $x = 5 + e$ og $y = e$ og får

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e} + \frac{4}{e} + 1\right) y' &= 1 \\ y' &= \frac{1}{\frac{5}{e} + 1} = \frac{e}{5 + e}. \end{aligned}$$

Oppgave 02.07.
La $y = \log_{a^2} x$. Da er $(a^2)^y = x$. Det vil si, $a^{2y} = x$. Vi tar logartimen med a som grunntall på hver side av denne likheten:

$$2y = \log_a x \quad \text{slik at} \quad y = \frac{1}{2}\log_a x = \log_a x^{1/2} = \log_a \sqrt{x}.$$

Oppgave 02.08.
Vi har per definisjon at

$$\sinh(u+v) = \frac{e^{u+v} - e^{-u-v}}{2}.$$

På den andre siden er

$$\begin{aligned}
\sinh u \cosh v + \cosh v \sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2} \cdot \frac{e^v + e^{-v}}{2} + \frac{e^v - e^{-v}}{2} \cdot \frac{e^u + e^{-u}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^u e^v + e^u e^{-v} - e^{-u} e^v - e^{-u} e^{-v} + e^v e^u + e^v e^{-u} - e^{-v} e^u - e^{-v} e^{-u}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(2e^u e^v - 2e^{-u} e^{-v}\Big) = \frac{e^{u+v} - e^{-u-v}}{2}.
\end{aligned}$$

Dette viser likheten.

Oppgave 02.09.

a)

Det er klart at

- Ved $t = 0$ er verdien $f(0) = 800\,000$.
- Ved $t = 1$ er verdien $f(1) = 800\,000 - 800\,000 \cdot 0.10 = 0.90 \cdot 800\,000$.
- Ved $t = 2$ er verdien $f(2) = f(1) - f(1) \cdot 0.10 = 0.90 f(1) = (0.90)^2 800\,000$.
- Ved $t = 3$ er verdien $f(3) = f(2) - f(2) \cdot 0.10 = 0.90 f(2) = (0.90)^3 800\,000$.

Og så videre. Vi kan derfor bruke funksjonen

$$f(t) = 800\,000 \cdot (0.9)^t.$$

(Faktisk, siden det alltid skal gjelde at $f(t+1) = 0.9 \cdot f(t)$, er dette det eneste mulige valget for f.) Det gir spesielt at

$$f(2.3) = 800\,000 \cdot (0.9)^{2.3} \approx 630\,000.$$

b)

$$f'(t) = 800\,000 \cdot (0.9)^t \ln 0.9 = f(t) \cdot \ln 0.9$$

slik at

$$f'(2.3) = f(2.3) \cdot \ln 0.9 \approx 630\,000 \cdot \ln 0.9 \approx -66\,000.$$

Den avtar altså med hastighet 66 000 kroner per år akkurat i dette øyeblikket.

Til sammenligning er 10% av $f(2.3)$ lik 63 000, altså noe mindre. Det kommer av at 63 000 er en gjennomsnittlig hastighet gjennom et år som starter ved $t = 2.3$. Siden den øyeblikkelige hastigheten avtar gjennom dette året, vil den gjennomsnittlige hastigheten være mindre enn $f'(2.3)$.

Oppgave 02.10.

Høydeforskjellen er

$$f(d/2) - f(0) = A\cosh(pd/2) - A\cosh(0) = A\left(\cosh\frac{pd}{2} - 1\right).$$

Oppgave 02.11.

La A_8 og A_9 være amplitydene ved de to skjelvene, slik at

$$\log_{10}\frac{A_8}{T}?B = 8 \quad \text{og} \quad \log_{10}\frac{A_9}{T} + B = 9.$$

Da er

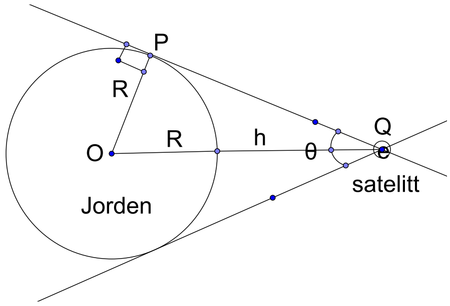
$$\log_{10}\frac{A_9}{T} + B - \left(\log_{10}\frac{A_8}{T} + B\right) = \log_{10}\frac{A_9/T}{A_8/T} = \log_{10}\frac{A_9}{A_8} = 1$$

slik at

$$\frac{A_9}{A_8} = 10^1 = 10.$$

Det vil si, bølgehøyden er 10 ganger så høy ved 9-skjelvet som ved 8-skjelvet.

Oppgave 02.12.



a) Trekanten $\triangle OPQ$ er rettvinklet, vinkelen $\angle OQP = \theta/2$ og hypotenusen OQ har lengde $(R+h)$. Derfor er

$$\sin(\theta/2) = \frac{R}{R+h}.$$

Når vi løser denne ligningen med hensyn på h får vi

$$\begin{aligned}
(R+h)\sin(\theta/2) &= R \\
h\sin(\theta/2) &= R - R\sin(\theta/2) \\
h &= R\cdot\frac{1-\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = R\left(\csc\frac{\theta}{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

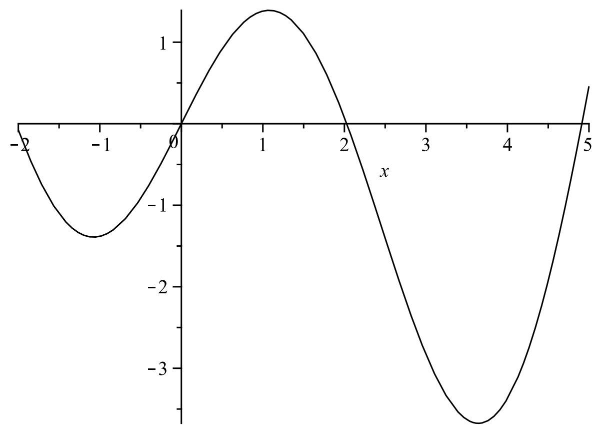
b) Siden

$$\frac{dh}{d\theta} = R\cdot\frac{-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - (1-\sin\frac{\theta}{2})\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2} = R\left(-\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}\right)\cdot\frac{1}{2},$$

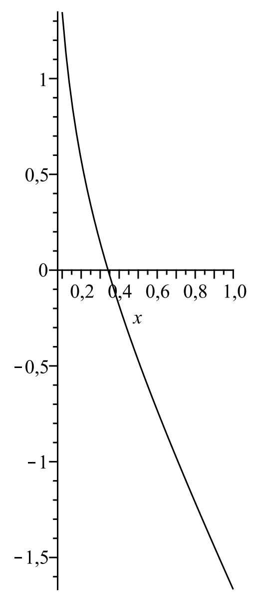
er den søkte hastigheten

$$\frac{R}{2}\left(-\frac{\cos(\pi/6)}{\sin^2(\pi/6)}\right) = -\frac{R}{2}\,\frac{\sqrt{3}/2}{(1/2)^2} = -R\sqrt{3}.$$

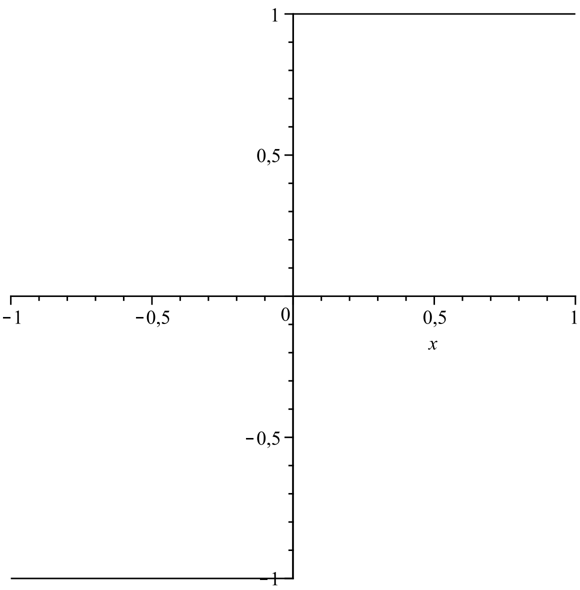
Oppgave 02.13.
a)



b)



c)



d)